J. OPERATOR THEORY
6(1981), 233–311



# ТЕОРЕМЫ СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ В АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА

М. Ш. ГОЛЬДШТЕЙН

Сходимость почти всюду последовательностей операторов, принадлежащих некоторой алгебре фон Неймана, была впервые рассмотрена в работе Сигала [17]. В этой же работе был получен целый ряд обобщений важнейших результатов теории меры и интегрирования для алгебр фон Неймана со следом, а также выдвинута общая идея изучения свойств операторов или же последовательностей операторов, принадлежащих некоторой алгебре фон Неймана, свойств самих алгебр фон Неймана и некоторых их преобразований, состояний на алгебрах фон Неймана, при помощи методов теории меры и теории вероятностей. После появления работы Сигала, в этом направлении, был получен целый ряд результатов, так, в частности, изучались различные статистические и индивидуальные эргодические теоремы, проблема существования условного математического ожидания и сходимость мартингалов, центральная предельная теорема для последовательностей операторов. Настоящая работа посвящена «некоммутативному» обобщению индивидуальной эргодической теоремы, теореме о сходимости условных математических ожиданий, теореме об усиленном законе больших чисел и теореме о законе повторного логарифма.

Статистические эргодические теоремы были получены в работах Kovacs, Szucs [9], Radin [15], Lance [10]. Впервые индивидуальная эргодическая теорема для преобразования сдвига в алгебрах локальных наблюдаемых была получена в работе Синая и Аншелевича [18]. Lance в своей работе [11] доказал, что если $\alpha$ — автоморфизм произвольной алгебры фон Неймана $M$, сохраняющий точное нормальное состояние, то для любого $A \in M$ последовательность $N^{-1}\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n(A)$ сходится почти всюду. Yeadon [23] доказал индивидуальную эргодическую теорему в следующей ситуации: пусть $\alpha$ линейное положительное отображение алгебры фон Неймана $M$ такое, что $\alpha(I) \leqslant I, \rho\circ\alpha \leqslant \rho$, где $\rho$ точный нормальный полуконечный след; тогда для любого $A \in L^2(M, \rho)$ последовательность $N^{-1}\sum_{n=0}^{N-1} \hat{\alpha}^n(A)$ сходится почти всюду (здесь $\hat{\alpha}$ продолжение отображения $\alpha$ на $L^2(M, \rho)$). В § 1 настоящей работы будет доказана следующая теорема. Пусть $\alpha$ линейное положительное отображение алгебры фон Неймана $M$, обладающее свойствами $\alpha(I) \leqslant I$, $\rho \circ \alpha \leqslant \rho$, где $\rho$ точное нормальное состояние на $M$. Пусть далее $X$ замыкание в $L^2(M, \rho)$ множества $\{A \in M : A^* = A\}$, $\hat{\alpha}$ продолжение отображения $\alpha$ на $X + iX$ (такое продолжение всегда существует [8]). Тогда для любого $\xi \in X + iX$ последовательность $N^{-1}\sum_{n=0}^{N-1} \hat{\alpha}^n(\xi)$ сходится почти всюду. Доказательство этого результата опирается на полученную в § 1 теорему, которая является обобщением максимальной эргодической теоремы.

§2 посвящен доказательству теоремы о сходимости почти всюду условных математических ожиданий в алгебрах фон Неймана. Свойства условных математических ожиданий в алгебрах фон Неймана изучались в работах Umegaki [21], Tomiyama [20]. Takesaki [19] получил необходимое и достаточное условие существования условного математического ожидания на данную подалгебру, сохраняющего состояние. Arveson [4] доказал, что если $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывающая, или же возрастающая последовательность подалгебр фон Неймана алгебры фон Неймана $M$, $M_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \left(\text{соответственно } M_0 = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)''\right)$, $\varphi_n$ условное математическое ожидание на $M_n$, сохраняющее некоторое точное нормальное состояние $\rho$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то для каждого $A \in M$, $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(A) - \varphi_0(A)\|_2 = 0$, где $\|\cdot\|_2$ норма в пространстве $L^2(M, \rho)$. В предположении, что состояние $\rho$ является конечным следом Cuculescu [5] получил обобщение теоремы Дуба о сходимости почти всюду мартингалов в алгебрах фон Неймана. Lance [12] получил аналогичный результат, предполагая лишь полуконечность следа $\rho$. В настоящей работе теоремы о сходимости условных математических ожиданий доказана в следующем виде. Пусть $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ те же, что и выше. Тогда для любого $\xi \in X + iX$ (см. обозначения предыдущего абзаца) $\lim \varphi_n(\xi) = \varphi_0(\xi)$ почти всюду (состояние $\rho$ является произвольным).

В §3 получены различные варианты усиленного закона больших чисел и закона повторного логарифма для последовательностей операторов, принадлежащих некоторой алгебре фон Неймана. При этом основным условием, которое накладывается на последовательность, является условие Розенблата [1]. Вторым условием (от которого удается избавиться во многих результатах) является условие асимптотического коммутирования (в той или иной форме; см., например, [1]). Важные примеры таких последовательностей возникают при рассмотрении систем квантовой статистической физики [2]. В работе Аншелевича [1] для последовательностей операторов, удовлетворяющих указанным условиям, была получена центральная предельная теорема. Отметим, что во всех основных результатах §3 мы накладываем условия лишь на коммутаторы самих элементов последовательности, в отличие от условия асимптотического коммутирования, использованного в работе [2]. С другой стороны, в §3 показано, что если последовательность операторов удовлетворяет последнему условию, то она в определенном смысле близка в некоторой последовательности коммутирующих операторов.

Часть результатов настоящей работы была анонсирована в работах [24] — [28].

## 1. ИНДИВИДУАЛЬНАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ АЛГЕБР ФОН НЕЙМАНА

Пусть $M$ алгебра фон Неймана, $\rho$ точное нормальное состояние на $M$ [6]. Пусть далее $H = L^2(M, \rho)$ пополнение пространства $M$ по норме $\|\cdot\|_2$, где $\|A\|_2 = \rho(A^*A)^{1/2}$. Алгебра фон Неймана $M$ стандартно действует в гильбертовом пространстве $H$, причем в $H$ существует вектор $\xi_0$, являющийся для $M$ отделяющим и тотализирующим, такой, что $\rho(A) = (A\xi_0, \xi_0)$ для всех $A \in M$ [6] (здесь и в дальнейшем мы отождествляем $M$ с плотным в $H$ подпространством $M\xi_0$; норму оператора $A \in M$ будем обозначать $\|A\|_\infty$). Последовательность $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов $H$ называется сходящейся почти всюду к элементу $\zeta \in H$ если для любого $\varepsilon > 0$ существует проектор $E \in M$ (ср. [17], [5], [18], [11], [22]), такой, что $E(\zeta - \zeta_n) \in M$ для $n \geqslant n_0$ и $\lim\limits_{\to\infty} \| E(\zeta - \zeta_n)\|_\infty = 0$.

Пусть $\alpha$ линейное положительное отображение $M$ в себя, обладающее следующими свойствами:

1) $\rho(\alpha(A)) \leqslant \rho(A)$ для всех $A \in M, A \geqslant 0$;

2) $\alpha(I) \leqslant I$

(здесь и всюду в дальнейшем $I$—единичный оператор). Для любого самосопряженного оператора $A \in M$ имеет место неравенство $\alpha(A)^2 \leqslant \alpha(A^2)$ [8]. Следовательно, $\|\alpha(A)\|_2 \leqslant \|A\|_2$ для всех самосопряженных операторов $A \in M$. Пусть $X$ замыкание в $H$ множества $\{A \in M : A^* = A\}$. Тогда $\alpha$ продолжается до линейного непрерывного отображения $X + iX$ в $X + iX$, которое мы также обозначим $\alpha$, причем $\|\alpha(\xi)\|_2 \leqslant \|\xi\|_2$ для всех $\xi \in X$. Для $\xi \in X + iX$ положим

$$\sigma_N(\xi) = N^{-1}(\xi + \alpha(\xi) + \ldots + \alpha^{N-1}(\xi)), \quad \text{где } N = 1, 2, \ldots .$$

ТЕОРЕМА 1.1. (1) *Для каждого* $\xi \in X + iX$ *существует единственное* $\hat{\xi} \in X + iX$ *такое, что* $\lim_{N\to\infty} \|\sigma_N(\xi) - \hat{\xi}\|_2 = 0$ *при этом* $\alpha(\hat{\xi}) = \hat{\xi}$.

(2) *последовательность* $\{\sigma_N(\xi)\}_{N=1}^{\infty}$ *сходится к* $\hat{\xi}$ *почти всюду.*

Доказательство теоремы 1.1 опирается на следующую теорему 1.2, которая является обобщением максимальной эргодической теоремы.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть* $M, \rho, \alpha$ *те же, что и выше,* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *последовательность положительных операторов из* $M$, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ *последовательность положительных чисел. Если* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{-1}\rho(A_n) < 1/2$, *то существует проектор* $E \in M$ *такой, что* $\|E\sigma_m(A_n)E\|_\infty \leqslant 2\varepsilon_n$ *для всех* $m, n = 1, 2, \ldots$, *причем* $\rho(E) \geqslant 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{-1}\rho(A_n)$.

В свою очередь, для доказательства теоремы 1.2 нам понадобятся несколько лемм. Всюду в дальнейшем коммутант алгебры $M$ будет обозначать $M'$.

ЛЕММА 1.1. *Пусть* $M, \rho, \alpha, H, \xi_0, M'$ *те же, что и выше. Тогда существует отображение* $\alpha' \colon M' \to M'$, *которое обладает следующими свойствами:*

(i) $\alpha'$ *линейно и положительно;*

(ii) $\alpha'(I) \leqslant I$;

(iii) $(\alpha'(T)\xi_0, \xi_0) \leqslant (T\xi_0, \xi_0)$ *для любого* $T \in M'$, $T \geqslant 0$;

(iv) $(\alpha(T)S\xi_0, \xi_0) = (T\alpha'(S)\xi_0, \xi_0)$ *для любых* $T \in M$, $S \in M'$.

*Если* $\alpha(I) = I$, $\rho(\alpha(T)) = \rho(T)$ *для любого* $T \in M$, *то также* $\alpha'(I) = I$, $(\alpha'(T)\xi_0, \xi_0) = (T\xi_0, \xi_0)$ *для любого* $T \in M'$.

*Доказательство.* Пусть $S \in M'$, $S \geqslant 0$. Положим для $T \in M$, $\varphi(T) = (\alpha(T)S\xi_0, \xi_0)$. Если $T \in M$, $T \geqslant 0$, то

$$\varphi(T) = (S\alpha(T)^{1/2}\xi_0, \alpha(T)^{1/2}\xi_0) \leqslant \|S\|_\infty(\alpha(T)^{1/2}\xi_0, \alpha(T)^{1/2}\xi_0) =$$
$$= \|S\|_\infty(\alpha(T)\xi_0, \xi_0) = \|S\|_\infty\rho(\alpha(T)) \leqslant \|S\|_\infty\rho(T) = \|S\|_\infty(T\xi_0, \xi_0);$$
$$\varphi(T) = (\alpha(T)S^{1/2}\xi_0, S^{1/2}\xi_0) \geqslant 0.$$

Таким образом $\varphi$ представляет собой положительный линейный функционал на $M$, причем $\varphi(T) \leqslant \|S\|_\infty(T\xi_0, \xi_0)$. По лемме 1, § 4, гл. 1 [6] существует единственный положительный оператор $S' \in M'$ такой, что $\varphi(T) = (TS'\xi_0, \xi_0)$ для любого $T \in M$. Положим $\alpha'(S) = S'$. Тогда

$$\alpha'(a_1S_1 + a_2S_2) = a_1\alpha'(S_1) + a_2\alpha'(S_2)$$

для любых $S_1, S_2 \in M'$, $S_1, S_2 \geqslant 0$ и положительных вещественных чисел $a_1$, $a_2$. Отображение $\alpha'$ единственным образом продолжается до положительного линейного отображения $\alpha'\colon M' \to M'$. По построению $(\alpha(T)S\xi_0, \xi_0) = (T\alpha'(S)\xi_0, \xi_0)$ для любых $T \in M$, $S \in M'$.

Для любого $T \in M$ имеем

$$(\alpha'(I)T\xi_0, T\xi_0) = (\alpha(T^*T)\xi_0, \xi_0) = \rho(\alpha(T^*T)) \leqslant \rho(T^*T) = (T\xi_0, T\xi_0)$$

и если $\rho(\alpha(A)) = \rho(A)$ для любого $A \in M$, то $(\alpha'(I)T\xi_0, T\xi_0) = (T\xi_0, T\xi_0)$. Поскольку множество векторов вида $T\xi_0$, где $T \in M$, плотно в $H$, то это значит, что $\alpha'(I) \leqslant I$ и $\alpha'(I) = I$ если только $\rho(\alpha(A)) = \rho(A)$ для любого $A \in M$.

Пусть $S \in M'$, $S \geqslant 0$. Тогда

$$(\alpha'(S)\xi_0, \xi_0) = (\alpha(I)S\xi_0, \xi_0) = (\alpha'(I)S^{1/2}\xi_0, S^{1/2}\xi_0) \leqslant (S^{1/2}\xi_0, S^{1/2}\xi_0) = (S\xi_0, \xi_0)$$

и если $\alpha(T) = I$, то $(\alpha'(S)\xi_0, \xi_0) = (S\xi_0, \xi_0)$. Таким образом отображение $\alpha'$ обладает всеми требуемыми свойствами.

ЛЕММА 1.2. *Пусть $M, \rho, H, \xi_0, M'$ те же, что и выше, $\{A_i\}_{i\in I}$ семейство положительных операторов из $M$, $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ семейство положительных чисел. Пусть далее $F$ проектор из $M'$, обладающий следующим свойством: если $T \in FM'F$, $T \geqslant 0$, то $(A_iT\xi_0, \xi_0) \leqslant \varepsilon_i(T\xi_0, \xi_0)$ для всех $i \in I$. Тогда существует проектор $E \in M$ такой, что $\rho(E) \geqslant (F\xi_0, \xi_0)$, $\|EA_iE\|_\infty \leqslant \varepsilon_i$ для всех $i \in I$.*

*Доказательство*. Рассмотрим на $M$ следующий нормальный функционал $\tau(A) = (AF\xi_0, \xi_0)$, $A \in M$. Пусть $\zeta$ нормальный функционал на $M$ такой, что $\zeta(A) \leqslant c\tau(A)$ для всех $A \in M$, $A \geqslant 0$, где $c > 0$ постоянная. Тогда для любого $A \in M$, $A \geqslant 0$ имеем

$$0 \leqslant c\tau(A) - \zeta(A) \leqslant c\tau(A) = c(A\xi_0, \xi_0) - c((I - F)A^{1/2}\xi_0, A^{1/2}\xi_0) \leqslant c(A\xi_0, \xi_0).$$

По лемме 1, гл. 1, §4 [6] существует единственный оператор $R \in M'$ такой, что $c\tau(A) - \zeta(A) = (AR\xi_0, \xi_0)$ для любого $A \in M$, при этом $R \geqslant 0$. Следовательно, $\zeta(A) = (AT\xi_0, \xi_0)$ для всех $A \in M$, где $T = cF - R$. Поскольку $\zeta(A) \geqslant 0$ для всех $A \in M$, $R \geqslant 0$, то $0 \leqslant T \leqslant cF$. Следовательно, $T \in FMF$. По свойству проектора $F$ имеем

$$(A_iT\xi_0, \xi_0) \leqslant \varepsilon_i(T\xi_0, \xi_0) \quad \text{для всех } i \in I.$$

Таким образом $\zeta(A_i) \leqslant \varepsilon_i\zeta(I)$ для всех $i$.

Пусть $E$ носитель функционала $\tau$, $\mathscr{U} = EME$. Если $\theta$ нормальный функционал на $\mathscr{U}$, $\theta(B) \leqslant c\tau(B)$ для всех $B \in \mathscr{U}$, $B \geqslant 0$, где $c > 0$ постоянная, то положим $\zeta(A) = \theta(EAE)$ для $A \in M$. Тогда

$$\zeta(A) \leqslant c\tau(EAE) = c\tau(A) \quad \text{для всех } A \in M.$$

По доказанному $\zeta(A_i) \leqslant \varepsilon_i\zeta(I)$ для всех $i \in I$. Следовательно, $\theta(EA_iE) \leqslant \leqslant \varepsilon_i\theta(E)$ для всех $i \in I$. Существует гильбертово пространство $K$ и вектор $\eta_0 \in K$ такие, что $\mathscr{U}$ действует в $K$, $\eta_0$ является отделяющим тотализирующим вектором для $\mathscr{U}$, и $\tau(B) = (B\eta_0, \eta_0)$ для всех $B \in \mathscr{U}$ [6]. Пусть $T \in \mathscr{U}'$, $T \geqslant 0$, где $\mathscr{U}'$ коммутант $\mathscr{U}$. Положим $\theta(B) = (BT\eta_0, \eta_0)$ для $B \in \mathscr{U}$. Функционал $\theta$ является нормальным, и

$$\theta(B) \leqslant \|T\|_\infty(B\eta_0, \eta_0) = \|T\|_\infty\tau(B), \text{ для всех } B \in \mathscr{U},\ B \geqslant 0.$$

Следовательно, $\theta(EA_iE) \leqslant \varepsilon_i\theta(E)$ для всех $i \in I$. Таким образом

$$(EA_iET\eta_0, \eta_0) \leqslant \varepsilon_i(T\eta_0, \eta_0) \quad \text{для любого } T \in \mathscr{U}',\ T \geqslant 0.$$

Полагая $T = R^*R$, получим

$$(EA_iER\eta_0, R\eta_0) \leqslant \varepsilon_i(R\eta_0, R\eta_0) \quad \text{для любого } R \in \mathscr{U}'.$$

Поскольку множество векторов вида $R\eta_0$ плотно в $K$, то $(EA_iE\eta, \eta) \leqslant \varepsilon_i(\eta, \eta)$ для любого $\eta \in K$. Следовательно, $\|EA_iE\|_\infty \leqslant \varepsilon_i$ для всех $i$. Кроме того, имеем:

$$\rho(E) = (EF\xi_0, \xi_0) = (E\xi_0, \xi_0) + ((I - F)E\xi_0, E\xi_0) \geqslant (EF\xi_0, \xi_0) =$$

$$= \tau(E) = \tau(I) = (F\xi_0, \xi_0).$$

Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть $M, \rho, H, \xi_0, M'$ те же, что и выше, $A \in M$, $A \geqslant 0$. Пусть далее $R$ положительный оператор из $M'$ такой, что $(AT\xi_0, \xi_0) \leqslant \leqslant (T\xi_0, \xi_0)$ для любого $T \in M'$, $0 \leqslant T \leqslant R$, и $F$ носитель оператора $R$. Тогда для любого $T \in FM'F$, $T \geqslant 0$ имеет место неравенство $(AT\xi_0, \xi_0) \leqslant \leqslant (T\xi_0, \xi_0)$.*

*Доказательство.* Если $T \in M'$, $0 \leqslant T \leqslant cR$, где $c > 0$, то $0 \leqslant c^{-1}T \leqslant R$, и по условию $(Ac^{-1}T\xi_0, \xi_0) \leqslant (c^{-1}T\xi_0, \xi_0)$, т. е. $(AT\xi_0, \xi_0) \leqslant (T\xi_0, \xi_0)$. Пусть $T \in FM'F$, $T \geqslant 0$. Для целого $n > 0$ положим $F_n = \{R \geqslant n^{-1}\}$. Тогда $F_n \leqslant \leqslant nR$. Поскольку $T \leqslant \|T\|_\infty F$, то

$$F_nTF_n \leqslant \|T\|_\infty F_n \leqslant \|T\|_\infty \cdot n \cdot R.$$

Следовательно,

$$(AF_nTF_n\xi_0, \xi_0) \leqslant (F_nTF_n\xi_0, \xi_0) \quad \text{для любого } n = 1, 2, \ldots .$$

Поскольку последовательность $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ сильно сходится к $F$, то переходя к пределу, в последнем равенстве получим $(AT\xi_0, \xi_0) \leqslant (T\xi_0, \xi_0)$. Лемма доказана.

*Доказательство теоремы 1.2.* Пусть $N>0$ целое. Построим проектор $E_N \in M$ такой, что

$$\rho(E_N) \geqslant 1 - \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^{-1}\rho(A_n), \quad \|E_N\sigma_k(A_n)E_N\|_\infty \leqslant \varepsilon_n, \quad \text{для } k, n = 1, 2, \ldots, N.$$

Рассмотрим алгебру фон Неймана $\mathscr{U} = \prod_{i=1}^{N^2} M'$, где $M'$ так же как и выше коммутант $M$. Будем записывать элементы алгебры $\mathscr{U}$ в виде последовательностей $(T_{n,k})$, где $T_{n,k} \in M'$, $n, k = 1, 2, \ldots, N$. Пусть

$$L = \left\{(T_{n,k}) \in \mathscr{U} : 0 \leqslant T_{n,k}; \sum_{n,k=1}^{N} T_{n,k} \leqslant I\right\}.$$

Рассмотрим на $L$ слабо непрерывную функцию

$$g((T_{n,k})) = \sum_{n=1}^{N} g_n(T_{n,1}, T_{n,2}, \ldots, T_{n,N}),$$

где

$$g_n(T_{n,1}, T_{n,2}, \ldots, T_{n,N}) = \sum_{k=1}^{N} k[(\sigma_k(B_n)T_{n,k}\xi_0, \xi_0) - (T_{n,k}\xi_0, \xi_0)],$$

$$B_n = \varepsilon_n^{-1}A_n, \qquad n = 1, 2, \ldots, N;$$

$\sigma_k$, $\xi_0$ те же, что и выше. Поскольку множество $L$ слабо компактно, то существует элемент $(\overline{T}_{n,k}) \in L$ на котором $g$ принимает наибольшее на $L$ значение. Пусть $T_N = I - \sum_{n,k=1}^{N} \overline{T}_{n,k}$. Пусть далее $T \in M', 0 \leqslant T \leqslant T_N$, $1 \leqslant n \leqslant N$. Положим $T_{ij} = \overline{T}_{ij}$ если $(i, j) \neq (n, k)$, $T_{n,k} = \overline{T}_{n,k} + T$. Тогда $(T_{ij}) \in L$. Следовательно, $g((T_{ij})) \leqslant g((\overline{T}_{ij}))$. Откуда $(\sigma_k(B_n)T\xi_0, \xi_0) \leqslant (T\xi_0, \xi_0)$ или $(\sigma_k(A_n)T\xi_0, \xi_0) \leqslant \varepsilon_n(T\xi_0, \xi_0)$. Пусть $F_N$ носитель оператора $T_N$. Тогда по лемме 1.3 для любого $T \in F_N M' F_N, T \geqslant 0$ имеет место неравенство $(\sigma_k(A_n)T\xi_0, \xi_0) \leqslant \leqslant \varepsilon_n(T\xi_0, \xi_0)$. По лемме 1.2 существует проектор $E_N \in M$ такой, что $\rho(E_N) \geqslant \geqslant (F_N\xi_0, \xi_0)$, $\|E_N\sigma_k(A_n)E_N\|_\infty \leqslant \varepsilon_n$ для всех $k, n = 1, 2, \ldots, N$.

Положим

$$T_{11} = \alpha'(\overline{T}_{1,2}),\ T_{1,2} = \alpha'(\overline{T}_{1,3}), \ldots, T_{1,N-1} = \alpha'(\overline{T}_{1,N}),\ T_{1,N} = 0,$$

$$T_{21} = \alpha'(\overline{T}_{2,2}),\ T_{22} = \alpha'(\overline{T}_{2,3}), \ldots, T_{2,N-1} = \alpha'(\overline{T}_{2,N}),\ T_{2,N} = 0,$$

$$\ldots,$$

$$T_{N1} = \alpha'(\overline{T}_{N,2}),\ T_{N,2} = \alpha'(\overline{T}_{N,3}),\ \ldots,\ T_{N,N-1} = \alpha'(\overline{T}_{N,N}),\ T_{N,N} = 0,$$

где $\alpha'$ отображение $M'$ в $M'$, построенное в лемме 1.1. Из свойств (i), (ii) отображения $\alpha'$ следует, что $(T_{n,k}) \in L$. Следовательно,

$$g((T_{n,k})) \leqslant g((\overline{T}_{n,k})). \tag{1}$$

С другой стороны, имеем по свойству (iv) отображения $\alpha'$

$$\begin{aligned} g_n(\overline{T}_{n,1}, \overline{T}_{n,2}, \ldots, \overline{T}_{n,N}) &= [(B_n\overline{T}_{n,1}\xi_0, \xi_0) - (\overline{T}_{n,1}\xi_0, \xi_0)] + \\ &+ [(B_n\overline{T}_{n,2}\xi_0, \xi_0) + (B_n\alpha'(\overline{T}_{n,2})\xi_0, \xi_0) - 2(\overline{T}_{n,2}\xi_0, \xi_0)] + \\ &+ [(B_n\overline{T}_{n,3}\xi_0, \xi_0) + ((B_n + \alpha(B_n))\alpha'(\overline{T}_{n,3})\xi_0, \xi_0) - 3(\overline{T}_{n,3}\xi_0, \xi_0)] + \ldots + \\ &+ [(B_n\overline{T}_{n,N}\xi_0, \xi_0) + ((B_n + \alpha(B_n) + \ldots + \alpha^{N-2}(B_n))\alpha'(\overline{T}_{n,N})\xi_0, \xi_0) - N(\overline{T}_{n,N}\xi_0, \xi_0)] = \\ &= \sum_{k=1}^{N} (B_n\overline{T}_{n,k}\xi_0, \xi_0) + g_n(T_{n,1}, T_{n,2}, \ldots, T_{n,N}) + \sum_{k=1}^{N} k(T_{n,k}\xi_0, \xi_0) - \sum_{k=1}^{N} k(\overline{T}_{n,k}\xi_0, \xi_0). \end{aligned} \tag{2}$$

По свойству (iii) отображения $\alpha'$ имеем

$$\sum_{k=1}^{N} k(T_{n,k}\xi_0, \xi_0) = \sum_{k=1}^{N-1} k(\alpha'(\overline{T}_{n,k+1})\xi_0, \xi_0) \leqslant \sum_{k=2}^{N} (k-1)(\overline{T}_{n,k}\xi_0, \xi_0). \tag{3}$$

Из неравенств (2) и (3) имеем

$$\begin{aligned} &g_n((\overline{T}_{n,1}, \overline{T}_{n,2}, \ldots, \overline{T}_{n,N}) \leqslant \\ &\leqslant g_n(T_{n,1}, T_{n,2}, \ldots, T_{n,N}) + \sum_{k=1}^{N} (B_n\overline{T}_{n,k}\xi_0, \xi_0) - \sum_{k=1}^{N} (\overline{T}_{n,k}\xi_0, \xi_0). \end{aligned} \tag{4}$$

Теперь из (1) и (4) получим

$$\sum_{n,k=1}^{N} (\overline{T}_{n,k}\xi_0, \xi_0) \leqslant \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} (B_n\overline{T}_{n,k}\xi_0, \xi_0). \tag{5}$$

Поскольку $\sum_{k=1}^{N} \overline{T}_{n,k} \leqslant I$, то из (5) имеем

$$\sum_{n,k=1}^{N} (\overline{T}_{n,k}\xi_0, \xi_0) \leqslant \sum_{n=1}^{N} (B_n\xi_0, \xi_0) = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^{-1}\rho(A_n)$$

Таким образом

$$(T_N \xi_0, \xi_0) \geqslant 1 - \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^{-1} \rho(A_n).$$

Поскольку $0 \leqslant T_N \leqslant T$, то

$$(F_N \xi_0, \xi_0) \geqslant (T_N \xi_0, \xi_0) \geqslant 1 - \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^{-1} \rho(A_n).$$

Следовательно, проектор $E_N$ обладает указанными свойствами.

Существует сеть $N_\alpha$ такая, что проекторы $E_{N_\alpha}$ слабо сходятся к некоторому оператору $K \in M$. По доказанному

$$\|\sigma_k(A_n)^{1/2} E_{N_\alpha}\|_\infty \leqslant \varepsilon_n^{1/2} \quad \text{если только } k, n \leqslant N_\alpha.$$

Переходя здесь к пределу по $\alpha$ при фиксированных $k$, $n$, получим

$$\|\sigma_n(A_n)^{1/2} K\|_\infty \leqslant \varepsilon_n^{1/2}$$

или

$$\|\sigma_k(A_n)^{1/2} K \sigma_k(A_n)^{1/2}\|_\infty \leqslant \varepsilon_n, \quad k, n = 1, 2, \ldots .$$

Кроме того, $0 \leqslant K \leqslant I$,

$$\rho(K) = \lim_\alpha \rho(E_{N_\alpha}) \geqslant 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{-1} \rho(A_n).$$

Пусть $E = \{K \geqslant 1/2\}$. Тогда $E \leqslant 2K$, $\rho(E) \geqslant 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{-1} \rho(A_n)$. Следовательно,

$$\|\sigma_k(A_n)^{1/2} E \sigma_k(A_n)^{1/2}\|_\infty \leqslant 2\varepsilon_n, \quad k, n = 1, 2, \ldots .$$

Таким образом проектор $E$ обладает всеми требуемыми свойствами. Теорема доказана.

*Доказательство теоремы 1.1.* Первая часть теоремы следует из статистической эргодической теоремы для оператора, действующего в рефлексивном банаховом пространстве [7].

Пусть $\xi = \eta + i\zeta$, где $\eta, \zeta \in X$. Пусть далее $\hat{\eta} = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(\eta)$, $\hat{\zeta} = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(\zeta)$, где предел берется по норме пространства $H$. Положим $\eta_n = \sigma_n(\eta) - \hat{\eta}$, $\zeta_n = \sigma_n(\zeta) - \hat{\zeta}$, $n = 1, 2, \ldots$. Существуют $n_t$ такие, что $\|\eta_n\|_2 \leqslant 2^{-t}$, $\|\zeta_n\|_2 \leqslant 2^{-t}$ для $n \geqslant n_t$, где $t = 1, 2, \ldots$. Положим $N_t = n_1^2 \cdot n_2^2 \ldots n_t^2 2^{2t}$. Пусть $N > 0$ целое, $N_t < N \leqslant N_{t+1}$. Запишем $N$ в следующем виде $N = pn_t + r$, где $p, r$ натуральные, $0 \leqslant r < n_t$. Имеем $\eta_{n_t} = \sigma_{n_t}(\eta_1)$;

$$\eta_{n_t} + \alpha(\eta_{n_t}) + \ldots + \alpha^{pn_t - 1}(\eta_{n_t}) = n_t^{-1}(\eta_1 + 2\alpha(\eta_1) + \ldots + (n_t - 1)\alpha^{n_t - 2}(\eta_1)) +$$
$$+ (\alpha^{n_t - 1}(\eta_1) + \alpha^{n_t}(\eta_1) + \ldots + \alpha^{n_t p - 1}(\eta_1)) + n_t^{-1}((n_t - 1)\alpha^{n_t p}(\eta_1) +$$
$$+ (n_t - 2)\alpha^{n_t p + 1}(\eta_1) + \ldots + \alpha^{n_t(p+1) - 2}(\eta_1)).$$

Следовательно,

$$\sigma_N(\eta) - \hat{\eta} = \sigma_N(\eta_1) = N^{-1}(\eta_1 + \alpha(\eta_1) + \ldots + \alpha^{N-1}(\eta_1)) =$$

$$= N^{-1}[\eta_{n_t} + \alpha(\eta_{n_t}) + \ldots + \alpha^{pn_t-1}(\eta_{n_t}) - n_t^{-1}(\eta_1 + 2\alpha(\eta_1) + \ldots$$

$$\ldots + (\eta_t - 1)\alpha^{n_t-2}(\eta_1)) - n_t^{-1}((n_t-1)\alpha^{n_tp}(\eta_1) + (n_t-2)\alpha^{n_tp+1}(\eta_1) + \ldots$$

(1)

$$\ldots + \alpha^{n_t(p+1)-2}(\eta_1)) + (\eta_1 + \alpha(\eta_1) + \ldots + \alpha^{n_t-2}(\eta_1)) + (\alpha^{n_tp}(\eta_1) + \ldots +$$

$$+ \alpha^{N-1}(\eta_1))] = N^{-1}p\cdot n_t\sigma_{pn_t}(\eta_{n_t}) + N_tN^{-1}\beta_t + \gamma_{t,p,r}$$

где

$$\beta_t = N_t^{-1}(\eta_1 + \alpha(\eta_1) + \ldots + \alpha^{n_t-2}(\eta_1)) - N_t^{-1}n_t^{-1}(\eta_1 + 2\alpha(\eta_1) + \ldots$$

$$\ldots + (n_t - 1)\alpha^{n_t-2}(\eta_1)),$$

$$\gamma_{t,p,r} = (n_tp + r)^{-1}(\alpha^{n_tp}(\eta_1) + \alpha^{n_tp+1}(\eta_1) + \ldots + \alpha^{n_tp+r-1}(\eta_1) -$$

$$- (n_tp + r)^{-1}n_t^{-1}((n_t - 1)\alpha^{n_tp}(\eta_1) + (n_t - r)\alpha^{n_tp+1}(\eta_1) + \ldots + \alpha^{n_t(p+1)-2}(\eta_1)).$$

Поскольку $\|\alpha(\theta)\|_2 \leqslant \|\theta\|_2$ для любого $\theta \in X$, то

$$\|\beta_t\|_2 \leqslant 2N_t^{-1}n_t, \quad \|\gamma_{t,p,r}\|_2 \leqslant 2(n_tp + r)^{-1}n_t.$$

Так как $N > N_t$, то здесь $p > 2^{2t}n_t$.

Существуют операторы $T_{t,l}, B_{t,l}, G_{t,p,r,l} \in M$, обладающие следующими свойствами:

$$T_{t,l}^* = T_{t,l},\ B_{t,l}^* = B_{t,l},\ G_{t,p,r,l}^* = G_{t,p,r,l},$$

$$\|T_{t,l}\|_2 \leqslant 2^{-l}\|\eta_{n_t}\|_2,\ \|B_{t,l}\|_2 \leqslant 2^{-l}\|\beta_t\|_2,\ \|G_{t,p,r,l}\|_2 \leqslant 2^{-l}\|\gamma_{t,p,r}\|_2,\ l = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$\eta_t = \sum_{l=0}^{\infty} T_{t,l};\ \beta_t = \sum_{l=0}^{\infty} B_{t,l};\ \gamma_{t,p,r} = \sum_{l=0}^{\infty} G_{t,p,r,l},$$

где сходимость рядов берется по норме пространства $H$.

Аналогично имеем:

(2) $$\sigma_N(\zeta) - \hat{\zeta} = N^{-1}pn_t\sigma_{pn_t}(\zeta_{n_t}) + N_tN^{-1}\delta_t + \lambda_{t,p,r}$$

где

$$\delta_t = N_t^{-1}(\zeta_1 + \alpha(\zeta_1) + \ldots + \alpha^{n_t-2}(\zeta_1)) - N_t^{-1}n_t^{-1}(\zeta_1 + 2\alpha(\zeta_1) + \ldots$$

$$\ldots + (n_t - 1)\alpha^{n_t-2}(\zeta_1)),$$

$$\lambda_{t,p,r} = (n_t p + r)^{-1} (\alpha^{n_t p}(\zeta_1) + \alpha^{n_t p+1}(\zeta_1) + \ldots + \alpha^{n_t p + r - 1}(\zeta_1)) -$$

$$- (n_t p + r)^{-1} n_t^{-1} ((n_t - 1)\alpha^{n_t p}(\zeta_1) + (n_t - 2)\alpha^{n_t p+1}(\zeta_1) + \ldots + \alpha^{n_t(p+1)-r}(\zeta_1));$$

$$\|\delta_t\|_2 \leqslant 2N_t^{-1} n_t, \ \|\lambda_{t,p,r}\|_2 \leqslant 2(n_t p + r)^{-1} n_t$$

$$\zeta_{n_t} = \sum_{l=0}^{\infty} Z_{t,l}, \ \delta_t = \sum_{l=0}^{\infty} D_{t,l}, \ \lambda_{t,p,r} = \sum_{l=0}^{\infty} L_{t,p,r,l},$$

где $Z_{t,l}$, $D_{t,l}$, $L_{t,p,r,l}$ самосопряженные операторы из $M$,

$$\|Z_{t,l}\|_2 \leqslant 2^{-l} \|\zeta_t\|_2, \ \|D_{t,l}\|_2 \leqslant 2^{-l} \|\delta_t\|_2, \ \|L_{t,p,r,l}\|_2 \leqslant 2^{-l} \|\lambda_{t,p,r}\|_2.$$

Положим $\varepsilon_{t,l} = 2^{-(t+l)}$, $\varepsilon_{t,p,r,l} = 2^{-(t+l)}$, применим к операторам $T_{t,l}^2$, $B_{t,l}^2$, $G_{t,p,r,l}^2$, $Z_{t,l}^2$, $D_{t,l}^2$, $L_{t,p,r,l}^2$ теорему 1.2 и построим проектор $E \in M$, обладающий следующими свойствами:

$$\rho(E) \geqslant 1 - 2(\sum_{t,l} \varepsilon_{t,l}^{-1} (\rho(T_{t,l}^2) + \rho(B_{t,l}^2) + \rho(Z_{t,l}^2) + \rho(D_{t,l}^2)) +$$

$$+ \sum_{t,p,r,l} \varepsilon_{t,p,r,l}^{-1} (\rho(G_{t,p,r,l}^2) + \rho(L_{t,p,r,l}^2)),$$

$$\|E\sigma_k(T_{t,l}^2)E\|_\infty \leqslant 2\varepsilon_{t,l}, \ \|EB_{t,l}^2 E\|_\infty \leqslant 2\varepsilon_{t,l},$$

$$\|EG_{t,p,r,l}E\|_\infty \leqslant 2\varepsilon_{t,p,r,l}, \ \|E\sigma_k(Z_{t,l}^2)E\|_\infty \leqslant 2\varepsilon_{t,l}$$

$$\|ED_{t,l}^2 E\|_\infty \leqslant 2\varepsilon_{t,l}, \ \|EL_{t,p,r,l}E\|_\infty \leqslant 2\varepsilon_{t,p,r,l}.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$, и пусть $2^{-t_1} \leqslant \varepsilon/144$. Тогда, считая $t \geqslant t_1$, получим

$$\sum_{t,l} \varepsilon_{t,l}^{-1} \rho(T_{t,l}^2) \leqslant \sum_{t=t_1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} 2^{(t+l)} 2^{-l} \|\eta_t\|_2^2 \leqslant \sum_{t=t_1}^{\infty} 2^{-t+1} = 2^{-t_1+2};$$

$$\sum_{t,l} \varepsilon_{t,l}^{-1} \rho(B_{t,l}^2) \leqslant \sum_{t=t_1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} 2^{(t+l)} 2^{-2l} \|\beta_t\|_2^2 \leqslant \sum_{t=t_1}^{\infty} 2^{t+2} N_t^{-2} n_t^2 \leqslant \sum_{t=t_1}^{\infty} 2^{-t+3} = 2^{-t_1+4};$$

$$\sum_{t,p,r,l} \varepsilon_{t,p,r,l}^{-1} \rho(G_{t,p,r,l}^2) \leqslant \sum_{t=t_1}^{\infty} \sum_{p,r} \sum_{l=0}^{\infty} 2^{(t+l)} 2^{-2l} \|\gamma_{t,p,r}\|_2^2 \leqslant \sum_{t=t_1}^{\infty} 2^{t+3} \sum_{p,r} (n_t p + r)^{-2} n_t^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{t=t_1}^{\infty} 2^{t+3} \sum_{p=2^{2t} n_t}^{\infty} n_t^3 (n_t p)^{-2} \leqslant \sum_{t=t_1}^{\infty} 2^{-t+3} = 2^{-t_1+4}.$$

Аналогично

$$\sum_{t,l} \varepsilon_{t,l}^{-1}\rho(Z_{t,l}^2) \leqslant 2^{-t_1-2}, \ \sum_{t,l} \varepsilon_{t,l}^{-1}\rho(D_{t,l}^2) \leqslant 2^{-t_1+4}$$

$$\sum_{t,p,r,l} \varepsilon_{t,p,r,l}^{-1}\rho(L_{t,p,r,l}^2) \leqslant 2^{-t_1+4}.$$

Следовательно, $\rho(E) \geqslant 1 - 144\cdot 2^{-t_1} \geqslant 1 - \varepsilon$.

Для любого самосопряженного оператора $S \in M$ имеют место неравенства $\sigma_k(S) \leqslant \sigma_k(S)^2$, $k = 1, 2, \ldots$ [8]. Следовательно,

$$\|E\sigma_k(T_{t,l})^2 E\|_\infty \leqslant \|E\sigma_k(T_{t,l}^2)E\|_\infty \leqslant 2\varepsilon_{t,l}$$

или

$$\|E\sigma_k(T_{t,l})\|_\infty \leqslant (2\varepsilon_{t,l})^{1/2}, \quad \text{где } k = 1, 2, \ldots, t \geqslant t_1, l = 0, 1, \ldots .$$

Кроме того,

$$\|EB_{t,l}\|_\infty \leqslant (2\varepsilon_{t,l})^{1/2}, \ \|EG_{t,p,r,l}\|_\infty \leqslant (2\varepsilon_{t,p,r,l})^{1/2}.$$

Поскольку $\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_{t,l}^{1/2} < +\infty$, то существует оператор $R_{t,k} \in M$ такой, что

$$\lim_{l\to\infty} \left\| \sum_{l'=0}^{l} E\sigma_k(T_{t,l}) - R_{t,k} \right\|_\infty = 0.$$

При этом

$$\|R_{t,k}\|_\infty \leqslant \varepsilon_t, \quad \text{где } \varepsilon_t = \sum_{l=0}^{\infty} (2\varepsilon_{t,l})^{1/2}.$$

С другой стороны, $E\sigma_k(\eta_{n_t}) = \sum_{l=0}^{\infty} E\sigma_k(T_{t,l})$, где ряд сходится по норме $\|\cdot\|_2$. Следовательно, $E\sigma_k(\eta_{n_t}) \in M$ и $\|E\sigma_k(\eta_{n_t})\|_\infty \leqslant \varepsilon_t$. Аналогично,

$$E\beta_t \in M, \ \|E\beta_t\|_\infty \leqslant \varepsilon_t, \ E\gamma_{t,p,r} \in M,$$

$$\|E\gamma_{t,p,r}\|_\infty \leqslant \varepsilon_t, \ E\sigma(\zeta_{n_t}) \in M, \|E\sigma(\zeta_{n_t})\|_\infty \leqslant \varepsilon_t, \ E\delta_t \in M,$$

$$\|E\delta_t\|_\infty \leqslant \varepsilon_t, \ E\lambda_{t,p,r} \in M, \ \|E\lambda_{t,p,r}\|_\infty \leqslant \varepsilon_t.$$

Тогда из соотношений (1) и (2) получим

$$E(\sigma_N(\xi) - \hat{\xi}) = E(\sigma_N(\eta) - \hat{\eta}) + \mathrm{i}E(\sigma_N(\zeta) - \hat{\zeta}) = E\sigma_{pn_t}(\eta_{n_t}) + E\beta_t +$$

$$+ E\gamma_{t,p,r} + \mathrm{i}(E\sigma_{pn_t}(\zeta_{n_t}) + E\delta_t + E\lambda_{t,p,r}) \in M,$$

причем $\|E(\sigma_N(\xi) - \hat{\xi})\|_\infty \leqslant 6\varepsilon_t$. Следовательно, $\lim_{N\to\infty} \|E(\sigma_N(\xi) - \hat{\xi})\|_\infty = 0$. Теорема доказана.

## 2. ТЕОРЕМА О СХОДИМОСТИ УСЛОВНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ В АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА

Пусть $M, \rho, H, \xi_0, X, M'$ те же, что в §1. Пусть далее $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывающая или же возрастающая последовательность подалгебр фон Неймана в $M$, $M_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ если последовательность подалгебр убывает, и $M_0 = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n\right)''$ если последовательность подалгебр возрастает (здесь „$''$" обозначает бикоммутант). Будем предполагать, что для каждого $n = 1, 2, \ldots$ определено условное математическое ожидание $\varphi_n\colon M \to M_n$ на подалгебру $M_n$, сохраняющее состояние $\rho$ [19]. В этом случае определено также условное математическое ожидание $\varphi_0\colon M \to M_0$ на подалгебру $M_0$, сохраняющее состояние $\rho$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} \| \varphi_n(A) - \varphi_0(A)\|_2 = 0$ для всех $A \in M$, где $\|\cdot\|_2$ норма в пространстве $H$ [4]. Каждое отображение $\varphi_n$, $n = 0, 1, \ldots$ однозначно продолжается до проекционного отображения, которое мы также обозначим $\varphi_n$, гильбертова пространства $H$ на замкнутое подпространство $H_n = \overline{M_n}$, где замыкание берется по норме $\|\cdot\|_2$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для каждого $\xi \in X + \mathrm{i}X$ последовательность $\{\varphi_n(\xi)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится почти всюду к $\varphi_0(\xi)$.*

Доказательство теоремы 2.1 опирается на результаты §1, а также следующие результаты.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть $M, \rho, H, \{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ те же, что выше, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность положительных операторов из $M$, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность положительных чисел. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{-1}\rho(A_n) < 1/2$, то существует проектор $E \in M$ такой, что $\|E\varphi_m(A_n)E\|_\infty \leqslant 2\varepsilon_n$ для всех $m, n = 1, 2, \ldots$, причем*

$$\rho(E) \geqslant 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{-1}\rho(A_n).$$

ЛЕММА 2.1. *Пусть $M, \rho, H, \xi_0, M'$ те же, что и выше, $\{M_n\}_{n=1}^{N}$ конечная возрастающая последовательность подалгебр фон Неймана в $M$. Предположим, что для каждого $n = 1, 2, \ldots N$ определено условное математическое ожидание $\varphi_n$ на подалгебру $M_n$, сохраняющее состояние $\rho$. Пусть далее $A_i \in M$, $A_i \geqslant 0$, $\varepsilon_i$ положительные числа, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \varepsilon_i^{-1}\rho(A_i) < 1$.*

*Тогда существуют $T_1, T_2, \ldots, T_m \in M'$, обладающие следующими свойствами:*

1) $0 \leqslant T_i, i = 1, 2, \ldots, m$;

2) $\sum_{i=1}^{m} T_i \leqslant I$;

3) $\varphi_N'(T_i) = T_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ *где* $\varphi_n'$ *отображение* $M'$ *в* $M'$, *соответствующее отображению* $\varphi_n$ *по лемме* 1.1, $n = 1, 2, \ldots, N$;

4) *если* $T \in M'$, $0 \leqslant T \leqslant I - \sum_{i=1}^{m} T_i$, $\varphi_N'(T) = T$, *то* $(\varphi_n(A_i) T\xi_0, \xi_0) \leqslant \leqslant \varepsilon_i(T\xi_0, \xi_0)$, *где* $i = 1, 2, \ldots, m, n = 1,2, \ldots, N$;

5) $(T_i\xi_0, \xi_0) \leqslant \varepsilon_i^{-1}(A_iT_i\xi_0, \xi_0)$, $\quad i = 1, 2, \ldots, m$.

*Доказательство*. Можно считать, что $M_1 = \mathbf{C}\cdot I$. Тогда для $N = 1$ можно положить $T_1 = T_2 = \ldots = T_m = 0$, при этом операторы $T_i \in M'$ будут обладать свойствами 1) — 5). Будем доказывать утверждение леммы индукцией по $N$.

Пусть для $N - 1$ подалгебр $M_1, M_2, \ldots, M_{N-1}$ операторов $A_1, A_2, \ldots, \ldots, A_m \in M$ и положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ определены операторы $R_1, R_2, \ldots, R_m \in M'$, обладающие свойствами 1) —5). Рассмотрим алгебру фон Неймана $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^{m} M'$, слабо компактное подмножество

$$L = \left\{(Q_1, Q_2, \ldots, Q_m) \in \mathcal{U};\ 0 \leqslant Q_i, \varphi_N'(Q_i) = Q_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m;\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{m} Q_i \leqslant I - \sum_{i=1}^{m} R_i\right\}$$

в $\mathcal{U}$, и слабо непрерывную на $L$ функцию

$$g(Q_1, Q_2, \ldots, Q_m) = \sum_{i=1}^{m} (A_iQ_i\xi_0, \xi_0) - \varepsilon_i(Q_i\xi_0, \xi_0).$$

Пусть $(\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots, \overline{Q}_m)$ точка, в которой функция $g$ принимает на $L$ наибольшее значение. Положим $T_i = R_i + \overline{Q}_i$, $\quad i = 1, \ldots, m$ и проверим, что операторы $T_i$ обладают свойствами 1) — 5).

Свойства 1) — 3) следуют из построений непосредственно. Пусть $T \in M', 0 \leqslant T \leqslant I - \sum_{i=1}^{m} T_i, \varphi_N'(T) = T$. Положим $\hat{T} = \varphi_{N-1}'(T)$. Тогда $\hat{T} \in M'$, $0 \leqslant \hat{T} \leqslant I - \sum_{i=1}^{m} \varphi_{N-1}'(T_i) \leqslant I - \sum_{i=1}^{m} R_i$, $\varphi_{N-1}'(\hat{T}) = \hat{T}$. По предположению индукции из последних соотношений следует, что

$$(\varphi_n(A_i)\hat{T}\xi_0, \xi_0) \leqslant \varepsilon_i(\hat{T}\xi_0, \xi_0), \quad \text{где } n = 1, 2, \ldots, N - 1,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

По лемме 1.1 имеем

$$(\varphi_n(A_i)\hat{T}\xi_0, \xi_0) = (\varphi_n(A_i)\varphi'_{N-1}(T)\xi_0, \xi_0) = (\varphi_{N-1}\varphi_N(A_i)T\xi_0, \xi_0) =$$
$$= (\varphi_n(A_i)T\xi_0, \xi_0) \quad \text{для } n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Кроме того, по лемме 1.1

$$(\hat{T}\xi_0, \xi_0) = (\varphi'_{N-1}(T)\xi_0, \xi_0) = (T\xi_0, \xi_0).$$

Таким образом $(\varphi_n(A_i)T\xi_0, \xi_0) \leqslant \varepsilon_i(T\xi_0, \xi_0)$, где $n = 1, 2, \ldots, N-1$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Поскольку $(\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots, \overline{Q}_{i-1}, \overline{Q}_i + T, \overline{Q}_{i+1}, \ldots, Q_m) \in L$ для всех $i$ то из неравенства

$$g(\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots, \overline{Q}_{i-1}, \overline{Q}_i + T, \overline{Q}_{i+1}, \ldots, \overline{Q}_m) \leqslant g(\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots, \overline{Q}_{i-1}, \overline{Q}_i, \overline{Q}_{i+1}, \ldots, \overline{Q}_m)$$

следует $(A_i T\xi_0, \xi_0) \leqslant \varepsilon_i(T\xi_0, \xi_0)$. По лемме 1.1 имеем

$$(\varphi_N(A_i)T\xi_0, \xi_0) = (A_i\varphi'_N(T)\xi_0, \xi_0) = (A_i T\xi_0, \xi_0).$$

Таким образом

$$(\varphi_n(A_i)T\xi_0, \xi_0) \leqslant \varepsilon_i(T\xi_0, \xi_0) \quad \text{для } n = 1, 2, \ldots, N, \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Далее, из неравенства

$$g(\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots, \overline{Q}_{i-1}, 0, \overline{Q}_{i+1}, \ldots, \overline{Q}_m) \leqslant$$
$$\leqslant g(\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots, \overline{Q}_{i-1}, \overline{Q}_i, \overline{Q}_{i+1}, \ldots, \overline{Q}_m),$$

следует, что $(Q_i\xi_0, \xi_0) \leqslant \varepsilon_i^{-1}(A_i Q_i \xi_0, \xi_0)$, где $i = 1, 2, \ldots, m$. Поскольку по предположению индукции $(R_i\xi_0, \xi_0) \leqslant \varepsilon_i^{-1}(A_i R_i \xi_0, \xi_0)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то $(T_i\xi_0, \xi_0) \leqslant \varepsilon_i^{-1}(A_i T_i \xi_0, \xi_0)$. Лемма доказана.

*Доказательство теоремы 2.2.* Рассмотрим случай убывающей последовательности подалгебр; случай возрастающей последовательности разбирается аналогично. Применим к операторам $A_1, A_2, \ldots, A_N$ и $(N+1)$ подалгебрам $M_N \subset M_{N-1} \subset \ldots \subset M_1 \subset M$ предыдущую лемму (в случае возрастающей последовательности подалгебр лемму нужно применить к $(N+1)$ подалгебрам $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_N \subset M$) и построим для данного $N$ операторы $T_{i,N} \in M'$ обладающие следующими свойствами:

1)′ $0 \leqslant T_{i,N}$, $i = 1, 2, \ldots, N$;

2)′ $\sum_{i=1}^{N} T_{i,N} \leqslant I$;

3)′ если $0 \leqslant T \leqslant I - \sum_{i=1}^{N} T_{i,N}$, $T \in M'$ то $(\varphi_n(A_i)T\xi_0, \xi_0) \leqslant \varepsilon_i(T\xi_0, \xi_0)$ для $n = 1, 2, \ldots, N$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

4)′ $(T_{i,N}\xi_0, \xi_0) \leqslant \varepsilon_i^{-1}(A_i T_{i,N}\xi_0, \xi_0)$ для $i = 1, 2, \ldots, N$.

Положим $T_N = I - \sum_{i=1}^{N} T_{i,N}$. Тогда $0 \leqslant T_N \leqslant I$ и для любого $T \in M'$ такого, что $0 \leqslant T \leqslant T_N$ выполнены неравенства

$$(\varphi_n(A_i)T\xi_0, \xi_0) \leqslant \varepsilon_i(T\xi_0, \xi_0), \quad i, n = \overline{1, N}.$$

Пусть $F_N$ носитель оператора $T_N$. Тогда по лемме 1.3

$$(\varphi_n(A_i)T\xi_0, \xi_0) \leqslant \varepsilon_i(T\xi_0, \xi_0)$$

для любого $T \in F_N M' F_N$, $i, n = 1, 2, \ldots, N$. По лемме 1.2 существует проектор $E_N \in M$ такой, что $\rho(E_N) \geqslant (F_N\xi_0, \xi_0)$ и $\|E_N\varphi_n(A_i)E_N\|_\infty \leqslant \varepsilon_i$ где $i, n = 1, 2, \ldots, N$. Поскольку $0 \leqslant T_N \leqslant I$, то $T_N \leqslant F_N$. Следовательно,

$$(F_N\xi_0, \xi_0) \geqslant (T_N\xi_0, \xi_0) = 1 - \sum_{i=1}^{N} (T_{i,N}\xi_0, \xi_0).$$

По свойству 4)′ имеем

$$(T_{i,N}\xi_0, \xi_0) \leqslant \varepsilon_i^{-1}(A_i T_{i,N}\xi_0, \xi_0) = \varepsilon_i^{-1}(T_{i,N}A_i^{1/2}\xi_0, A_i^{1/2}\xi_0) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_i^{-1}(A_i^{1/2}\xi_0, A_i^{1/2}\xi_0) = \varepsilon_i^{-1}\rho(A_i).$$

Следовательно, $\rho(E_N) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^{-1}\rho(A_i)$.

Существует сеть $N_\alpha$ такая, что $E_{N_\alpha}$ слабо сходятся к некоторому оператору $L \in M$. По доказанному $\|\varphi_n(A_i)^{1/2}E_{N_\alpha}\varphi_N(A_i)^{1/2}\|_\infty \leqslant \varepsilon_i$, где $i, n \leqslant N_\alpha$. Переходя здесь в пределу по $\alpha$ при фиксированных $i$, $n$, получим $\|\varphi_n(A_i)^{1/2}L\varphi_n(A_i)^{1/2}\|_\infty \leqslant \varepsilon_i$. Кроме того, $0 \leqslant L \leqslant I$, $\rho(L) = \lim_\alpha \rho(E_{N_\alpha}) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i^{-1}\rho(A_i)$. Пусть $E = \{L \geqslant 1/2\}$. Тогда $E \leqslant 2L$, $\rho(E) \geqslant 1 - 2\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i^{-1}\rho(A_i)$. Следовательно,

$$\|\varphi_n(A_i)^{1/2}E\varphi_n(A_i)^{1/2}\|_\infty \leqslant 2\|\varphi_n(A_i)^{1/2}\, L\, \varphi_n(A_i)^{1/2}\|_\infty \leqslant 2\varepsilon_i \quad \text{для } i, n = 1, 2, \ldots$$

Таким образом проектор $E$ обладает всеми требуемыми свойствами. Теорема доказана.

ЛЕММА 2.2. *Пусть* $M, \rho, \{M_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *те же, что и выше*, $A \in M$. *Тогда для каждого* $\delta > 0$ *существует* $\hat{A} \in M$, *обладающее следующими свойствами:*

1) $\lim\limits_{N\to\infty} \|\varphi_N(\hat{A}) - \varphi_0(\hat{A})\|_\infty = 0$;

2) $\|A - \hat{A}\|_2 \leqslant \delta$;

3) $\|\hat{A}\|_\infty \leqslant 3\|A\|_\infty$.

*Доказательство.* Рассмотрим сначала случай убывающей последовательности подалгебр. Существует $N_0$ такое, что $\|\varphi_n(A) - \varphi_0(A)\|_2 \leqslant \delta$ для $n \geqslant N_0$ ([4]). Положим

$$\hat{A} = A + \varphi_0(A) - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varphi_{N_0+n}(A).$$

Тогда

$$\varphi_0(\hat{A}) = 2\varphi_0(A) - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varphi_0(A) = \varphi_0(A),$$

$$\varphi_N(\hat{A}) = \varphi_N(A) + \varphi_0(A) - \sum_{n=0}^{N-N_0} 2^{-n}\varphi_N(A) - \sum_{n=N-N_0+1}^{\infty} 2^{-n}\varphi_{N_0+n}(A).$$

Следовательно,

$$\|\varphi_N(\hat{A}) - \varphi_0(A)\|_\infty \leqslant \left\|\varphi_N(A) - \sum_{n=1}^{N-N_0} 2^{-n}\varphi_N(A)\right\|_\infty +$$

$$+ \sum_{n=N-N_0+1}^{\infty} 2^{-n} \leqslant 2^{-(N-N_0-1)}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{N\to\infty} \|\varphi_N(\hat{A}) - \varphi_0(A)\|_\infty = 0$. Далее,

$$\|A - \hat{A}\|_2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\|\varphi_0(A) - \varphi_{N_0+n}(A)\|_2 \leqslant \delta.$$

Наконец;

$$\|\hat{A}\|_\infty \leqslant \|A\|_\infty + \|\varphi_0(A)\|_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\|\varphi_{N_0+n}(A)\|_\infty \leqslant 3\|A\|_\infty.$$

В случае возрастающей последовательности подалгебр в качестве $\hat{A}$ можно взять $A - \varphi_0(A) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varphi_{N_0+n}(A)$, где $N_0$ подбирается так же как и выше. Так же как и в случае убывающей последовательности подалгебр можно проверить, что оператор $\hat{A}$ обладает всеми требуемыми свойствами. Лемма доказана.

*Доказательство теоремы 2.1.* Пусть $\xi = \eta + i\zeta$, где $\eta, \zeta \in X$. Пусть далее $\mathcal{U}$ множество тех $T \in M$, для которых $\lim\limits_{N\to\infty} \|\varphi_N(T) - \varphi_0(T)\|_\infty = 0$. Из леммы 2.2 следует, что $\eta, \zeta$ можно записать в следующем виде: $\eta = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\zeta = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, где $A_n, B_n \in \mathcal{U}$, $A_n^* = A_n$, $B_n^* = B_n$, $\|A_n\|_2 \leqslant 2^{-n}$, $\|B_n\|_2 \leqslant 2^{-n}$, $n = 2, 3, \ldots$ .

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_n = 2^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$ . Пусть $2^{-N_0} < \varepsilon/4$. Применим к оператором $\{A_n^2, B_n^2\}_{n=N_0+1}^{\infty}$ теорему 2.2 и построим проектор $E \in M$ такой, что

$$\|E\varphi_m(A_n^2)E\|_\infty \leqslant 2\eta_n, \|E\varphi_m(B_n^2)E\|_\infty \leqslant 2\varepsilon_n, \text{ где } m = 1, 2, \ldots; \ n \geqslant N_0 + 1;$$

$$\rho(E) \geqslant 1 - 2 \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \varepsilon_n^{-1}\rho(A_n^2) - 2 \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \varepsilon_n^{-1}\rho(B_n^2) \geqslant$$

$$\geqslant 1 - 4 \sum_{n=N_0+1}^{\infty} 2^{-n} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Для любого самосопряженного оператора $T \in M$ имеют место неравенства $\varphi_m(T)^2 \leqslant \varphi_m(T^2)$ [8], $m = 0, 1, 2, \ldots$ . Следовательно,

$$\|E\varphi_m(A_n)^2 E\|_\infty \leqslant \|E\varphi_m(A_n^2) E\|_\infty \leqslant 2\varepsilon_m, \quad \text{где } m = 1, 2, \ldots n \geqslant N_0 + 1.$$

Таким образом

$$\|E\, \varphi_m(A_n)\|_\infty \leqslant 2^{-\frac{n}{2}+1} \quad \text{для } m = 1, 2, \ldots, \ n \geqslant N_0 + 1.$$

Поскольку последовательность $\{\varphi_m(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сильно сходится при $m \to \infty$ к $\varphi_0(A_n)$, то мы имеем также

$$\|E\varphi_0(A_n)\|_\infty \leqslant 2^{-\frac{n}{2}+1} \quad \text{для } n \geqslant N_0 + 1.$$

Аналогично

$$\|E\, \varphi_m(B_n)\|_\infty \leqslant 2^{-\frac{n}{2}+1} \quad \text{для } m = 0, 1, 2, \ldots; n \geqslant N_0 + 1.$$

Пусть $n \geqslant N_0 + 1$. Поскольку для любого $m$

$$\sum_{p=n+1}^{\infty} \|E\varphi_m(A_p)\|_\infty \leqslant \lambda_n \quad \text{где } \lambda_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} 2^{-\frac{p}{2}+1}$$

то существуют операторы $R_{n,m} \in M$ такие, что

$$\lim_{N\to\infty} \|R_{n,m} - \sum_{p=n+1}^{n+N} E\varphi_m(A_p)\|_\infty = 0, \quad \|R_{n,m}\|_\infty \leqslant \lambda_n \quad \text{где } m = 0, 1, 2, \ldots .$$

С другой стороны, $E\varphi_m(\eta) = \sum_{p=1}^{\infty} E\varphi_m(A_p)$, где ряд сходится в $H$. Следовательно,

$$E\varphi_m(\eta) = \sum_{p=1}^{n} E\varphi_m(A_p) + R_{n,m}, \text{ где } m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Тогда $E\varphi_m(\eta) \in M$ для любого $m = 0, 1, 2, \ldots$ и кроме того,

$$(1)\quad \|E\varphi_m(\eta) - E\varphi_0(\eta)\|_\infty \leqslant n \cdot \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \|\varphi_m(A_p) - \varphi_0(A_p)\|_\infty + \|R_{n,m}\|_\infty + \|R_{n,0}\|_\infty .$$

Для заданного $\delta > 0$ выберем $n_0 \geqslant N_0 + 1$ так, чтобы $\lambda_{n_0} \leqslant \delta/4$. Поскольку $A_p \in \mathscr{U}$, то существует $m_0$ такое, что $\|\varphi_m(A_p) - \varphi_0(A_p)\|_\infty \leqslant \delta/2n_0$ для $m \geqslant m_0, p \leqslant n_0$. Тогда из неравенства (1) получим $\|E\varphi_m(\eta) - E\varphi_0(\eta)\|_\infty \leqslant \delta$ для $m \geqslant m_0$. Таким образом $\lim_{m\to\infty} \|E\varphi_m(\eta) - E\varphi_0(\eta)\|_\infty = 0$. Аналогично $E\varphi_m(\zeta) \in M, m = 0, 1, 2, \ldots$, и $\lim_{m\to\infty} \|E\varphi_m(\zeta) - E\varphi_0(\zeta)\|_\infty = 0$. Следовательно, $E\varphi_m(\xi) \in M$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ и $\lim_{m\to\infty} \|E\varphi_m(\xi) - E\varphi_0(\xi)\|_\infty = 0$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть* $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ *последовательность алгебр фон Неймана,* $\rho_n$ *точное нормальное состояние, заданное на алгебре* $M_n, n = 1, 2, \ldots$; $(M, \rho) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} (M_n, \rho_n)$ [3]; $L_N = \bigotimes_{n=1}^{N} M_n$ *и пусть* $\varphi_N\colon M \to L_N$ *условное математическое ожидание на подалгебру* $L_N$, *сохраняющее* $\rho$ ($\varphi_N$ *всегда определено* [19]). *Тогда для любого* $A \in M$, $\lim_{N\to\infty} \varphi_N(A) = A$ *почти всюду.*

## 3. УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ОПЕРАТОРОВ

Всюду в настоящем параграфе мы будем рассматривать алгебру фон Неймана $M$, на которой определено точное нормальное состояние $\rho$. Так же как в §§1, 2, $L^2(M, \rho)$ будет обозначать пополнение пространства $M$ по норме $\|\cdot\|_2$, где $\|A\|_2 = \rho(A^*A)^{1/2}$; норму оператора $A \in M$ будем обозначать $\|A\|_\infty$. Если $T_1, T_2, \ldots$ операторы из $M$, то порожденную этими операторами подалгебру фон Неймана в $M$ будем обозначать $M(T_1, T_2, \ldots)$. Говорят, что последовательность операторов $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $M$ удовлетворяет условию Розенблата если существует убывающая к нулю функция $\alpha(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что $|\rho(AB) - \rho(A)\rho(B)| \leqslant \alpha(n)\|A\|_\infty \|B\|_\infty$ для любых $A \in M(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $B \in M(X_{k+n}, X_{k+n+1}, \ldots)$; $k, n = 1, 2, \ldots$, [1]. Говорят, что последовательность операторов $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $M$ удовлетворяет $\|\cdot\|_2(\|\cdot\|_\infty)$ — условию асимптотического коммутирования если существует убывающая к нулю функция $\beta(n)$, $n = 1, 2, \ldots$ такая, что $\|[A, B]\|_2 \leqslant \beta(n)\|A\|_\infty \|B\|_\infty$, соответственно $\|[A, B]\|_\infty \leqslant \beta(n)\|A\|_\infty\|B\|_\infty$, для любых $A \in M(X_1, X_2, \ldots, X_k)$, $B \in M(X_{k+n}, X_{k+n+1}, \ldots)$; $k,n = 1, 2, \ldots$ (здесь и всюду в дальнейшем $[A, B]$ обозначает коммутатор операторов $A, B \in M$ [1]).

Пусть $A$ самосопряженный оператор из $M$, $\{E(\lambda) : -\infty<\lambda<+\infty\}$ соответствующее разложение единицы. Если $a$, $b$ вещественные числа, $a < b$, то проектор $E(b) - E(a)$ будет обозначаться $\{a \leqslant A \leqslant b\}$; аналогичный смысл имеют обозначения $\{a \leqslant A \leqslant b\}$, $\{a \leqslant A < b\}$, $\{a < A < b\}$. Модуль самосопряженного оператора $A$ будет обозначаться $|A|$. Сходимость почти всюду последовательности операторов $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ к оператору $X \in M$ будет пониматься в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ существует проектор $E \in M$ такой, что $\rho(E) \geqslant 1 - \varepsilon$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|E(X_n - X)\|_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \|(X_n - X)E\|_\infty = 0$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *последовательность операторов из* $M$, *удовлетворяющая условию Розенблата с функцией* $\alpha(n)$. *Пусть далее* $\beta(n) = \sup\limits_{|i-j|\geqslant n} \|[X_i, X_j]\|_\infty$, *где* $n = 1, 2, \ldots$ . *Предположим, что:*

1) $\alpha(n) \leqslant c_1 n^{-\varepsilon_1}$, $\beta(n) \leqslant c_2 n^{-\varepsilon_2}$, *где* $c_1, c_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ *постоянные*, $n = 1, 2, \ldots$ ;

2) $\sup\limits_n \|X_n\|_\infty = c < +\infty$.

*Тогда* $\lim\limits_{N\to\infty} N^{-1} \sum\limits_{n=1}^{N} (X_n - \rho(X_n)I) = 0$ *почти всюду.*

*Доказательство.* Можно считать, что $\rho(X_n) = 0$, $n = 1, 2 \ldots$ . Пусть $X_n = A_n + iB_n$, где $A_n, B_n$ самосопряженные операторы из $M, n = 1, 2, \ldots$ Положим $t = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\gamma = 2t^{-1}$, $r(n) = [n^\gamma] + 1$ где $[x]$ целая часть числа $x, n = 1, 2, \ldots$ . Введем следующие обозначения

$$N(n) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} r(i);$$

$$Z_n = \sum_{i=N(n-1)+1}^{N(n-1)+r(n)} A_i;$$

$$\hat{Z}_n = \sum_{i=N(n-1)-r(n)+1}^{N(n)} A_i.$$

Отметим, что если $A \in M(Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1})$, $B \in M(Z_n, Z_{n+1}, \ldots)$, то

$$|\rho(AB) - \rho(A)\rho(B)| \leqslant \alpha(r(n))\,\|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty \tag{1}$$

кроме того,

$$\|[Z_n, Z_{n'}]\|_\infty \leqslant \beta(r(n)) \cdot r(n) \cdot r(n') \tag{1'}$$

если только $n \leqslant n'$.

Положим $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, и оценим величину $\rho(S_n^4)$. Для этого представим $\rho(S_n^4)$ в следующем виде

$$(2)\qquad \rho(S_n^4) = \sum_{i=1}^{n} \rho(Z_i^4) + \sum\nolimits_1 \rho(Z_{i_1} Z_{i_2} Z_{i_3} Z_{i_4}) + \sum\nolimits_2 \rho(Z_{i_1} Z_{i_2} Z_{i_3} Z_{i_4})$$

где сумма $\sum_1$ распространяется на те наборы индексов $(i_1, i_2, i_3, i_4)$ в которые входят две пары одинаковых индексов, а сумма $\sum_2$ распространяется на наборы индексов, которые не вошли ни в сумму $\sum$ ни в сумму $\sum_1$. Каждое слагаемое $\rho(Z_{i_1} Z_{i_2} Z_{i_3} Z_{i_4})$ суммы $\sum_1$ оценим следующим образом:

$$|\rho(Z_{i_1} Z_{i_2} Z_{i_3} Z_{i_4})| \leqslant \|Z_{i_1}\|_\infty \|Z_{i_2}\|_\infty \|Z_{i_3}\|_\infty \|Z_{i_4}\|_\infty.$$

Тогда

$$(3)\qquad |\sum\nolimits_1 \rho(Z_{i_1} Z_{i_2} Z_{i_3} Z_{i_4})| \leqslant 6 \sum_{i,j=1}^{n} \|Z_i\|_\infty^2 \|Z_j\|_\infty^2.$$

Поскольку $\|Z_i\|_\infty \leqslant cr(i) \leqslant 2c_i\gamma$, то из (3) следует, что

$$(4)\qquad |\sum\nolimits_1 \rho(Z_{i_1} Z_{i_2} Z_{i_3} Z_{i_4})| \leqslant 96\, c^4 n^{4\gamma+2}.$$

Пусть $\rho(Z_{i_1} Z_{i_2} Z_{i_3} Z_{i_4})$ произвольное слагаемое, входящее в сумму $\sum_2$, $i = \min(i_1, i_2, i_3, i_4)$. Используя неравенства (1), (1′), а также условие $\rho(Z_j) = 0$, получим

$$|\rho(Z_{i_1} Z_{i_2} Z_{i_3} Z_{i_4})| \leqslant (c^4\alpha(r(i)) + \beta(r(i)))\, r(i_1) r(i_2) r(i_3) r(i_4).$$

Следовательно,

$$|\sum\nolimits_2 \rho(Z_{i_1} Z_{i_2} Z_{i_3} Z_{i_4})| \leqslant$$

$$(5)\qquad \leqslant 32(c^4 \cdot c_1 + c_2) \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4 = 1}^{n} (\min(i_1, i_2, i_3, i_4))^{-\gamma t} i_1^\gamma i_2^\gamma i_3^\gamma i_4^\gamma \leqslant$$

$$\leqslant 32(c^4 c_1 + c_2) \sum_{i_1=1}^{n} i_1^{\gamma-\gamma t} 4! \sum_{i_2, i_3, i_4 = i_1}^{n} i_2^\gamma i_3^\gamma i_4^\gamma \leqslant 768(c^4 c_1 + c_2) n^{4\gamma-\gamma t+4}.$$

Наконец,

$$(6)\qquad \sum_{i=1}^{n} \rho(Z_i^4) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|Z_i\|_\infty^4 \leqslant 16 c^4 n^{4\gamma+1}.$$

Из неравенств (4), (5), (6) получаем

$$\rho(S_n^4) \leqslant c_3 n^{4\gamma+2}$$

где $c_3 > 0$ постоянная.

Положим $\varepsilon_n = n^{-\frac{1}{6}}$, $E_n = \{|S_n| \geqslant \varepsilon_n N(n)\}$, где $n = 1, 2, \ldots$ . Тогда

$$N(n)^{-1}|S_n| \leqslant N(n)^{-1}\|S_n\|_\infty E_n + N(n)^{-1}|S|_n(I - E_n) \leqslant cE_n + \varepsilon_n I. \tag{8}$$

Кроме того,

$$\rho(E_n) \leqslant \varepsilon_n^{-4} N(n)^{-4} \rho(S_n^4) \leqslant \varepsilon_n^{-4} N(n)^{-4} c_3 n^{4\gamma+2}. \tag{9}$$

Поскольку $N(n) \sim n^{\gamma+1}$, то из (9) следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{-1}\rho(E_n)$ сходится. Положим

$$\hat{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \hat{Z}_i, \quad E_n = \{|S_n| \geqslant \varepsilon_n N(n)\}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда

$$N(n)^{-1}|\hat{S}_n| \leqslant c\hat{E}_n + \varepsilon_n I, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{-1}\rho(\hat{E}_n) < +\infty$.

Для произвольного натурального $N$ подберем $n$ так, чтобы $N(n) \leqslant N < N(n+1)$. Тогда

$$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} A_i = N^{-1}(S_n + \hat{S}_n + R(N)), \tag{11}$$

где $R(N) = \sum\limits_{i=N(n)+1}^{N} A_i$. Положим $K_n = cE_n + c\hat{E}_n$, $\lambda_N = 2\varepsilon_n + \|R(N)\|_\infty N^{-1}$. Имеем $\|R(N)\|_\infty N^{-1} \leqslant c\cdot(N(n+1) - N(n))\, N(n)^{-1}$.

Следовательно, $\lim\limits_{N\to\infty} \lambda_N = 0$. Кроме того, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{-1}\rho(K_n) < +\infty$. Из соотношений (8), (10), (11) получим

$$-(K_n + \lambda_N I) \leqslant N^{-1} \sum_{i=1}^{N} A_i \leqslant (K_n + \lambda_N I). \tag{12}$$

Точно также, рассмотрев последовательность $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, построим последовательность $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительных операторов из $M$ и последовательность $\{\mu_N\}_{N=1}^{\infty}$ положительных чисел, которые обладают следующими свойствами

$$\sup_n \|L_n\|_\infty \leqslant 2c, \ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{-1}\rho(L_n) < +\infty, \ \lim_{N\to\infty} \mu_N = 0 \tag{13}$$

$$-(L_n + \mu_N I) \leqslant N^{-1} \sum_{i=1}^{N} B_i \leqslant (L_n + \mu_N I),$$

где $N(n) \leqslant N < N(n+1)$, $N = 1, 2, \ldots$ .

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Подберем $n_0$ так, чтобы

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \varepsilon_n^{-1}\rho(K_n) + \sum_{n=n_0}^{\infty} \varepsilon_n^{-1}\rho(L_n) < \varepsilon/2.$$

Применим к операторам $\{K_n\}_{n=n_0}^{\infty}$, $\{L_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ теорему 1.2, считая $\alpha$ тождественным и построим проектор $E \in M$, который обладает следующими свойствами

$$\rho(E) \geqslant 1 - 2\sum_{n=n_0}^{\infty} \varepsilon_n^{-1}\rho(K_n) - 2\sum_{n=n_0}^{\infty} \varepsilon_n^{-1}\rho(L_n);$$

$$\|EK_nE\|_\infty \leqslant 2\varepsilon_n, \|EL_nE\|_\infty \leqslant 2\varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Из неравенства (12) имеем

$$0 \leqslant N^{-1}\sum_{i=1}^{N} A_i + K_n + \lambda_N I,$$

(14)

$$0 \leqslant E\left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N} A_i + K_n + \lambda_N I\right]E \leqslant 2EK_nE + 2\lambda_N I.$$

Следовательно,

$$\left\| E\left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N} A_i + K_n + \lambda_N I\right]^{\frac{1}{2}}\left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N} A_i + K_n + \lambda_N I\right]^{\frac{1}{2}} E\right\|_\infty \leqslant$$

(15)

$$\leqslant 2\|EK_nE\|_\infty + 2\lambda_N.$$

Из неравенства (15) получаем, что

(16) $$\lim_{N\to\infty}\left\|\left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N} A_i + K_n + \lambda_N\right]^{\frac{1}{2}} E\right\|_\infty = 0.$$

Поскольку $\left\|N^{-1}\sum_{i=1}^{N} A_i + K_n + \lambda_N\right\|_\infty \leqslant c + 2c + \lambda_N$, то из (16) следует, что

(17) $$\lim_{N\to\infty}\left\|\left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N} A_i + K_n + \lambda_N\right] E\right\|_\infty = 0.$$

Далее

$$\|K_nE\|_\infty \leqslant \|K_n^{\frac{1}{2}}\|_\infty \|K_n^{\frac{1}{2}}E\|_\infty \leqslant (2c)^{\frac{1}{2}}\|EK_nE\|_\infty^{\frac{1}{2}} \leqslant (4c\varepsilon_n)^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\|K_nE\|_\infty = 0$. Тогда из (17) получим $\lim\left\|N^{-1}\sum\limits_{i=1}^{N} A_iE\right\|_\infty = 0.$

Точно также из соотношений (13) следует, что $\lim\limits_{N\to\infty}\left\| N^{-1}\sum\limits_{i=1}^{N} B_i E\right\|_{\infty} = 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие асимптотического коммутирования было использовано в доказательстве теоремы 3.1 лишь при оценке слагаемых, входящих в сумму $\sum_2$. Нетрудно видеть, что если состояния $\rho$ является следом, то сумма $\sum_2$ может быть оценена так же как в теореме 2.1, уже без использования условия асимптотического коммутирования. Таким образом мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность операторов из $M$, удовлетворяющая условию Розенблата с функцией $\alpha(n) \leqslant c_1 n^{-\varepsilon_1}$, где $c_1, \varepsilon_1 > 0$ постоянные, причем состояние $\rho$ является следом. Если $\sup\limits_n \|X_n\| < +\infty$, то $\lim\limits_{N\to\infty} N^{-1}\sum\limits_{n=1}^{N}(X_n - \rho(X_n)) = 0$ почти всюду.*

Пусть $M$ алгебра фон Неймана, $\rho$ точное нормальное состояние на $M$, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность операторов из $M$, $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастающая последовательность подалгебр фон Неймана в $M$. Предположим, что $X_n \in M_n$, $n = 1, 2, \dots$ и для каждого $n = 1, 2, \dots$ определено условное математическое ожидание $\varphi_n$ алгебры $M$ на подалгебру $M_n$, сохраняющее $\rho$ Будем предполагать, также, что определена положительная, убывающая функция $\alpha(n)$ натурального аргумента, обладающая следующим свойством: если $A \in M_k$, $B \in M(X_{k+n})$ то $|\rho(AB) - \rho(A)\rho(B)| \leqslant \alpha(n)\|A\|_{\infty}\|B\|_{\infty}$.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет перечисленным выше условиям. Если, кроме того,*

1) $\rho(X_n^*, X_n), \rho(X_n, X_n^*) \leqslant c_1 n^{\tau}, \quad n = 1, 2, \dots$ ;

2) $\alpha(n) \leqslant c_2 \exp(-\gamma n), \quad n = 1, 2, \dots$ ;

3) $\|X_n\|_{\infty} \leqslant c_3 n^t, \quad n = 1, 2, \dots$ ,

*где $c_1, c_2, c_3, \tau, \gamma, t$ постоянные, причем $\tau < 1$, $\gamma > 0$, то $\lim\limits_{N\to\infty} N^{-1}\sum\limits_{n=1}^{N}(X_n - \rho(X_n)) = 0$ почти всюду.*

*Доказательство.* Пусть $X_n = A_n + \mathrm{i}B_n$, где $A_n, B_n$ самосопряженные операторы из $M, n = 1, 2, \dots$ . Положим $K_n = A_n - \rho(A_n), L_n = B_n - \rho(B_n)$, $n = 1, 2, \dots$ .

Пусть $\theta$ удовлетворяет неравенствам $0 < \theta; \tau(1+\theta) + 2\theta < 1$. Положим $\tau(n) = [n^{\theta}] + 1$, где $[x]$ целая часть числа $x, n = 1, 2, \dots$ . Введем следующие обозначения:

$$N(n) = 2\sum_{i=1}^{n} r(i); \quad Z_n = \sum_{i=N(n+1)+1}^{N(n-1)+r(n)} K_i; \quad \hat{Z}_n = \sum_{i=N(n-1)+r(n)+1}^{N(n)} K_i;$$

$$G_n = M_{N(n-1)+r(n)}, \ \hat{G}_n = M_{N(n)}, \ \psi_n = \varphi_{N(n-1)+r(n)}, \ \hat{\psi} = \varphi_{N(n)}.$$

Поскольку $|\rho(A_n)| \leqslant \|A_n\|_2 \leqslant (\|X_n\|_2 + \|X_n^*\|)/2$, то $|\rho(A_n)| \leqslant c_1^{\frac{1}{2}} n^{\frac{\tau}{2}}$. Следовательно, $\|K_n\|_\infty \leqslant c_4 n^a$, где $c_4$ постоянная, $a = \max(t, \tau/2)$. Отсюда имеем

(1) $$\|Z_n\|_\infty \leqslant r(n) c_4 N(n)^a \leqslant c_5 n^b$$

где $c_5, b > 0$ постоянные. Далее

$$\|K_n\|_2 \leqslant \|A_n\|_2 + |\rho(A_n)| \leqslant 2c_1^{\frac{1}{2}} n^{\frac{\tau}{2}}.$$

Следовательно, $\|Z_n\|_2 \leqslant 2r(n) c_1^{\frac{1}{2}} N(n)^{\frac{\tau}{2}}$. Поскольку $N(n) \sim n^{1+\theta}$, то из последнего неравенства получим

(2) $$\rho(Z_n^2) \leqslant c_6 n^\lambda$$

где $c_6$ постоянная $\lambda = 2\theta + \tau(1+\theta) < 1$.

Пусть $m < n$, $Z \in G_m$. Тогда из $\rho(K_i) = 0$ следует, что

$$|\rho(ZZ_n)| \leqslant \alpha(r(n-1)) \|Z\|_\infty \sum_{i=N(n-1)+1}^{N(n-1)+r(n)} \|K_i\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \alpha(r(n-1)) \cdot \|Z\|_\infty \cdot r(n) c_4 N(n)^a.$$

Положим $Z = \psi_m(Z_n)$. Тогда $\|Z\|_\infty \leqslant \|Z_n\|_\infty \leqslant r(n) c_4 N(n)^a$. Следовательно,

$$|\rho(\psi_m(Z_n)^2)| = |\rho(Z\psi_m(Z_n))| = |\rho(ZZ_n)| \leqslant$$

$$\leqslant r(n)^2 c_4^2 \alpha(r(n-1)) N(n)^{2a}.$$

Таким образом

(3) $$\rho(\varphi_m(Z_n)^2) \leqslant c_7 \alpha(r(n-1)) n^d$$

где $c_7, d$ постоянные.

Положим

$$S_{m,n} = \sum_{i=m+1}^{n} i^{-1} Z_i, \quad m < n,\ m, n = 1, 2, \ldots;$$

$$v = (1 - \lambda);\ g = 2 + b;$$

$$m_k = [k^{\frac{2}{v}}] + 1,\ \ n_k = [k^{\frac{2g}{v}}] + 1;$$

$$T_k = S_{m_k, n_k},\ k = 1, 2, \ldots;$$

$$U_{k,n} = \psi_n(S_{n,n_k}),$$

где $m_k < n < n_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Имеем

$$\rho(T_k^2) = \sum_{i=m_k+1}^{n_k} i^{-2} \rho(Z_i^2) + \sum_{\substack{i,j=m_k+1 \\ i \neq j}}^{n_k} i^{-1} j^{-1} \rho(Z_i Z_j). \tag{4}$$

Из неравенства (2) получим

$$\sum_{i=m_k+1}^{n_k} i^{-2} \rho(Z_i^2) \leqslant c_8 m_k^{-v}, \tag{7}$$

где $c_8$ постоянная. Кроме того, для $i, j > m_k$, $i \neq j$ имеем

$$|\rho(Z_i Z_j)| \leqslant \alpha(r(m_k)) \|Z_i\|_\infty \|Z_j\|_\infty \leqslant \alpha(r(m_k)) c_5^2 i^b j^b.$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{i,j=m_k+1 \\ i \neq j}}^{n_k} i^{-1} j^{-1} \rho(Z_i Z_j) \leqslant c_9 \alpha(r(m_k)) n_k^{2b}, \tag{6}$$

где $c_9$ постоянная.

Из (5), (6) получим

$$\rho(T_k^2) \leqslant c_8 m_k^{-v} + c_9 \alpha(r(m_k)) n_k^{2b}. \tag{7}$$

Из неравенства (3) для $i > n > m_k$ получим

$$\| \psi_n(Z_i) \|_2^2 \leqslant c_7 \alpha(r(m_k)) i^d.$$

Следовательно,

$$\| U_{k,n} \|_2 = \left\| \sum_{i=n+1}^{n_k} i^{-1} \psi_n(Z_i) \right\|_2 \leqslant c_7^{\frac{1}{2}} \alpha(r(m_k))^{\frac{1}{2}} \cdot n_k^d.$$

Таким образом

$$\rho(U_{k,n}^2) \leqslant c_7 \alpha(r(m_k)) n_k^{2d}. \tag{8}$$

Положим

$$R(n, p) = N(n)^{-1} \sum_{i=N(n)+1}^{p} K_i$$

где $N(n) + 1 \leqslant p \leqslant N(n + 1)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Имеем

$$\|R(n,p)\|_2 \leqslant N(n)^{-1} 4 c_1^{\frac{1}{2}} r(n) N(n+1)^{\frac{\tau}{2}}.$$

Следовательно,

$$\rho(R(n,p)^2) \leqslant c_{10} n^{-\zeta} \tag{9}$$

где $c_{10}$ постоянная, $\zeta = 2 - \tau(\theta + 1)$.

Аналогично, если $\hat{S}_{m,n} = \sum_{i=m+1}^{n} \hat{Z}_i$, где $m<n$, $m,n=1,2,\ldots$, $\hat{T}_k=\hat{S}_{m_k,n_k}$, $k=1,2,\ldots$; $\hat{U}_{k,n} = \hat{\psi}_n(\hat{S}_{n,n_k})$, где $m_k < n < n_k$, то

$$\rho(\hat{T}_k^2) \leqslant c_8 m_k^{-\nu} + c_9 \alpha(r(m_k)) n_k^{2b}; \quad \rho(U_{k,n}^2) \leqslant c_7 \alpha(r(m_k)) n_k^{2d}. \tag{10}$$

Теперь проведем аналогичные построения для последовательности $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$. Введем следующие обозначения

$$W_n = \sum_{i=N(n-1)+1}^{N(n-1)+r(n)} L_i, \qquad \hat{W}_n = \sum_{i=N(n-1)+r(n)+1}^{N(n)} L_i, \qquad n=1,2,\ldots;$$

$$Q_{m,n} = \sum_{i=m+1}^{n} W_i; \quad \hat{Q}_{m,n} = \sum_{i=m+1}^{n} \hat{W}_i, \quad \text{где } m<n,\ m,n=1,2,\ldots;$$

$$H_k = Q_{m_k,n_k}, \quad \hat{H}_k = \hat{Q}_{m_k,n_k}, \quad k=1,2,\ldots;$$

$$V_{k,n} = \psi_n(Q_{n,n_k}) \hat{V}_{k,n} = \hat{\psi}_n(\hat{Q}_{n,n_k}), \quad \text{где } m_k < n < n_k;$$

$$J(n,p) = N(n)^{-1} \sum_{i=N(n)+1}^{p} L_i, \quad \text{где } N(n)+1 \leqslant p \leqslant N(n+1).$$

Тогда имеют место следующие неравенства

$$\begin{gathered} \|L_n\|_\infty \leqslant c_4 n^a;\ \rho(H_k^2),\ \rho(\hat{H}_k^2) \leqslant c_8 m_k^{-\nu} + c_9 \alpha(r(m_k)) n_k^{2b}; \\ \rho(V_{k,n}^2),\ \rho(\hat{V}_{k,n}^2) \leqslant c_7 \alpha(r(m_k)) n_k^{2d};\ \rho(J(n,p)^2) \leqslant c_{10} n^{-\zeta}. \end{gathered} \tag{11}$$

Положим $\varepsilon_k = k^{-\frac{1}{2}}$, $\mu_n = n^{-\theta}$, $k, n = 1,2,\ldots$. По построению $m_k^{-\nu} \leqslant k^{-2}$. Кроме того, по условию теоремы функция $\alpha$ убывает экспоненциально. Следовательно, каждый из следующих рядов сходится:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^{-1} \rho(T_k^2), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^{-1} \rho(\hat{T}_k^2), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^{-1} \rho(H_k^2), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^{-1} \rho(\hat{H}_k^2),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=m_k+1}^{n_k} \varepsilon_k^{-1} \rho(U_{k,n}^2), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=m_k+1}^{n_k} \varepsilon_k^{-1} \rho(\hat{U}_{k,n}^2),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=m_k+1}^{n_k} \varepsilon_k^{-1} \rho(V_{k,n}^2), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=m_k+1}^{n_k} \varepsilon_k^{-1} \rho(\hat{V}_{k,n}^2).$$

Кроме того,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=N(n)+1}^{N(n+1)}\mu_n^{-1}\rho(R(n,p)^2)\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}r(n)\mu_n^{-1}c_{10}n^{-\zeta}\leqslant 2c_{10}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\chi}<+\infty,$$

где $\chi=2-\tau(\theta+1)-2\theta>1$. Аналогично, $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=N(n)+1}^{N(n+1)}\mu_n^{-1}\rho(J(n,p)^2)<+\infty$.

Пусть задано $\varepsilon>0$. Подберем $k_0$ и $n_0$ так, чтобы соответствующие остатки всех перечисленных рядов были в сумме меньше чем $\varepsilon/2$. Применим к элементам $\{T_k^2,\ \hat{T}_k^2,\ H_k^2,\ \hat{H}_k^2\}_{k=k_0+1}^{\infty}$

$$\{U_{k,n}^2,\ \hat{U}_{k,n}^2,\ V_{k,n}^2,\ \hat{V}_{k,n}^2\ :\ k\geqslant k_0+1,\ m_k<n<n_k\};$$

$$\{R^2(n,p),\ U^2(n,p)\ :\ n\geqslant n_0+1,\ N(n)+1\leqslant p\leqslant N(n+1)\}$$

и условным математическим ожиданиям $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ теорему 2.2 и построим проектор $E\in M$, обладающий следующими свойствами:

$$\rho(E)\geqslant 1-\varepsilon;\quad \|E\varphi_i(T_k)^2E\|_\infty\leqslant 2\varepsilon_k,\quad \|E\varphi_i(\hat{T}_k^2)E\|_\infty\leqslant 2\varepsilon_k;$$

$$\|E\varphi_i(H_k^2)E\|_\infty\leqslant 2\varepsilon_k,\quad \|E\varphi_i(\hat{H}_k^2)E\|_\infty\leqslant 2\varepsilon_k,$$

где $k\geqslant k_0+1,\ i=1,2,\ldots;$

$$\|EU_{k,n}^2E\|_\infty\leqslant 2\varepsilon_k,\ \|E\hat{U}_{k,n}^2E\|_\infty\leqslant 2\varepsilon_k,\ \|EV_{k,n}^2E\|_\infty\leqslant 2\varepsilon_k,\ \|E\hat{V}_{k,n}^2E\|_\infty\leqslant 2\varepsilon_k,$$

где $k\geqslant k_0+1,\ m_k<n<n_k;$

$$\|ER(n,p)^2E\|_\infty\leqslant 2\mu_n,\ \|EJ(n,p)^2E\|_\infty\leqslant 2\mu_n,$$

где $N(n)+1\leqslant p\leqslant N(n+1),\ n\geqslant n_0+1.$

Из неравенств $\varphi_i(T_k)^2\leqslant\varphi_i(T_k^2)$ следует, что $\|E\varphi_i(T_k)^2E\|_\infty\leqslant 2\varepsilon_k$ или $\|\varphi_i(T_k)E\|_\infty\leqslant\sqrt{2\varepsilon_k}$. В частности, $\|\psi_n(T_k)E\|_\infty\leqslant\sqrt{2\varepsilon_k}$. Воспользуемся тождествами $\psi_n(T_k)=\psi_n(S_{m_k,n})+U_{k,n}=S_{m_k,n}+U_{k,n}$, где $m_k<n<n_k$. Тогда получим

$$\|S_{m_k,n}E\|_\infty\leqslant\|\psi_n(T_k)E\|_\infty+\|U_{k,n}E\|_\infty\leqslant 2\sqrt{2\varepsilon_k}. \tag{12}$$

Аналогично

$$\|\hat{S}_{m_k,n}E\|_\infty\leqslant 2\sqrt{2\varepsilon_k}. \tag{13}$$

Пусть $n_1 = \max(n_{k_0}, n_0)$, $N > N(n_1)$. Подберем $n$ так, чтобы $N(n) < < N \leqslant N(n+1)$. Воспользуемся следующими тождествами

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(A_i - \rho(A_i)) = N^{-1}\sum_{i=1}^{n} Z_i + N^{-1}\sum_{i=1}^{n}\hat{Z}_i + N^{-1}N(n)R(n, N), \tag{14}$$

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{n} Z_i = N^{-1}\sum_{i=1}^{m_k} Z_i + N^{-1}\sum_{i=m_k+1}^{n} i(S_{m_k,i} - S_{m_k,i-1}), \tag{15}$$

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{n}\hat{Z}_i = N^{-1}\sum_{i=1}^{m_k}\hat{Z}_i + N^{-1}\sum_{i=m_k+1}^{n} i(\hat{S}_{m_k,i} - \hat{S}_{m_k,i-1}), \tag{16}$$

где $n_{k-1} < n \leqslant n_k$, $S_{m_k,m_k} = \hat{S}_{m_k,m_k} = 0$. Имеем:

$$\|N^{-1}\sum_{i=1}^{m_k} Z_i\|_\infty \leqslant N(n_{k-1})^{-1} m_k c_5 m_k^b \leqslant c_5 k^{\frac{b+1}{\nu}} \cdot (k-1)^{-\frac{2g}{\nu}}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{N\to\infty} \|N^{-1}\sum_{i=1}^{m_k} Z_i\|_\infty = 0$. Преобразуем вторую сумму в (15) следующим образом:

$$N^{-1}\sum_{i=m_k+1}^{n} i(S_{m_k,i} - S_{m_k,i-1}) = -N^{-1}\sum_{i=m_k+1}^{n-1} S_{m_k,i} + N^{-1} n S_{m_k,n}.$$

Тогда получим

$$\left\|N^{-1}\sum_{i=m_k+1}^{n} i(S_{m_k,i} - S_{m_k,i-1})\,E\right\|_\infty \leqslant \max_{m_k+1\leqslant i<n} \|S_{m_k,i}E\|_\infty + \|S_{m_k,n}E\|_\infty \leqslant 4\sqrt{2\varepsilon_k}.$$

Таким образом $\lim\limits_{N\to\infty}\left\|N^{-1}\sum_{i=1}^{N} Z_i E\right\|_\infty = 0$. Аналогично $\lim\limits_{N\to\infty}\left\|N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\hat{Z}_i E\right\|_\infty = 0$. Наконец, $\|N^{-1}N(n)R(n, N)E\| \leqslant \mu_n$. Следовательно,

$$\lim_{N\to\infty}\left\|N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(A_i - \rho(A_i))E\right\|_\infty = 0;$$

точно также

$$\lim_{N\to\infty}\left\|N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(B_i - \rho(B_i))\,E\right\|_\infty = 0.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $M$ алгебра фон Неймана, $\rho$ точный нормальный конечный след на $M$, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность интегрируемых* *с квадратом операторов, измеримых относительно $M$ [17], удовлетворяющая условию Розенблата с функцией $\alpha(n)$. Если*

а) $\rho(X_n^* X_n) \leqslant c_1 n^{\tau}$, $n = 1, 2, \dots$,

б) $\alpha(n) \leqslant c_2 \exp(-\gamma n)$, $n = 1, 2, \dots$,

*где $c_1, c_2, \gamma, n$ постоянные, причем $\gamma > 0, \tau < 1$, то $\lim\limits_{N\to\infty} N^{-1} \sum\limits_{n=1}^{N} (X_n - \rho(X_n)) = 0$ почти всюду.*

*Доказательство.* Пусть $X_n = A_n + \mathrm{i}B_n$, где $A_n, B_n$ самосопряженные операторы, $n = 1, 2, \dots$. Положим $F_n = \{|A_n| \geqslant n^2\}$, $K_n = A_n F_n$, $L_n = A_n(I - F_n)$.

Проверим, что последовательность $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. Для этого положим $M_n = M(L_1, L_2, \dots, L_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Поскольку $\rho$ является следом, то для каждого $n = 1, 2, \dots$ существует условное математическое ожидание алгебры $M$ на подалгебру $M_n$, сохраняющее $\rho$. По построению последовательность $M_n$ возрастает и $L_n \in M_n$, $n = 1, 2, \dots$. Условие (2) теоремы совпадает с условием (б), которое мы предположили. Далее $\|L_n\|_\infty \leqslant n^2$, $n = 1, 2, \dots$. Кроме того, $\|X_n^*\|_2 = \|X_n\|_2 \leqslant c_1^{\frac{1}{2}} n^{\frac{\tau}{2}}$. Следовательно, $\|A_n\|_2 \leqslant c_1^{\frac{1}{2}} n^{\frac{\tau}{2}}$, $\rho(L_n^2) \leqslant \rho(A_n^2) \leqslant c_1 n^{\tau}$. Таким образом все условия теоремы выполнены. Следовательно, $\lim\limits_{N\to\infty} N^{-1} \sum\limits_{n=1}^{N} (L_n - \rho(L_n)) = 0$ почти всюду.

Рассмотрим последовательность $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$. Имеем

$$\rho(F_n) \leqslant n^{-4}\rho(A_n^2), \quad \rho(|K_n|) \leqslant \rho(F_n)^{\frac{1}{2}} \rho(A_n^2) \leqslant n^{-2}\rho(A_n^2) \leqslant c_1 n^{-2+\tau}.$$

Положим $\theta = (1 - \tau)/2$, $E_n = \{|K_n| \leqslant n^{-\theta}\}$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\rho(I - E_n) \leqslant n^{\theta} \rho(|K_n|) \leqslant c_1 n^{-\zeta},$$

где $\zeta = (2 - \tau - \theta) > 1$. Следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho(I - E_n) < \infty$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Подберем $n_0$ так, чтобы $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \rho(I - E_n) \leqslant \varepsilon/4$ и положим $E = \inf\limits_{n \geqslant n_0} E_n$. Тогда $\rho(I - E) \leqslant \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \rho(I - E_n) < \varepsilon/4$. Кроме того

$$\left\| N^{-1} \sum_{n=n_0}^{N} K_n E \right\|_\infty \leqslant N^{-1} \sum_{n=n_0}^{N} \varepsilon_n \leqslant (1 - \theta)^{-1} N^{-\theta}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{N\to\infty} \left\| N^{-1} \sum\limits_{n=n_0}^{N} K_n E \right\|_\infty = 0.$

Пусть $a > 0$, $F = \left\{\left|\sum_{n=1}^{n_0-1} K_n\right| \leqslant a\right\}$. Тогда $\rho(T - F) \leqslant a^{-1}\rho\left(\left|\sum_{n=1}^{n_0-1} K_n\right|\right)$.
Если $a$ достаточно велико, то $\rho(I-F)\leqslant\varepsilon/4$. Кроме того, $\left\|N^{-1}\sum_{n=1}^{n_0-1} K_n F\right\|_\infty \leqslant N^{-1}a$.
Положим $G = E_p \wedge F$. Тогда

$$\rho(G) \geqslant 1 - \varepsilon/2, \lim_{N\to\infty}\left\|N^{-1}\sum_{n=1}^{N} K_n G\right\|_\infty = 0.$$

Кроме того, $\lim\limits_{N\to\infty} N^{-1}\sum_{n=1}^{N}\rho(K_n) = 0$. Таким образом $\lim\limits_{N\to\infty} N^{-1}\sum_{n=1}^{N}(K_n-\rho(K_n))=0$ почти всюду.

Поскольку

$$N^{-1}\sum_{n=1}^{N}(A_n - \rho(A_n)) = N^{-1}\sum_{n=1}^{N}(L_n - \rho(L_n)) + N^{-1}\sum_{n=1}^{N}(K_n - \rho(K_n)),$$

то $\lim\limits_{N\to\infty} N^{-1}\sum_{n=1}^{N}(A_n - \rho(A_n)) = 0$ почти всюду. Аналогично, $\lim N^{-1}\sum_{n=1}^{N}(B_n - \rho(B_n)) = 0$ почти всюду. Следовательно, $\lim N^{-1}\sum_{n=1}^{N}(X_n - \rho(X_n)) = 0$ почти всюду.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть последовательность* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет всем условиям теоремы* 3.3, *за исключением быть может условия* 3). *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует проектор* $E \in M$ *такой, что* $\rho(E)\geqslant 1-\varepsilon$, $\lim\limits_{N\to\infty}\left\|N^{-1}E\sum_{n=1}^{N}(X_n - \rho(X_n))E\right\|_\infty = 0$.

Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность самосопряженных операторов из $M$. Будем предполагать, что если $A \in M(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1})$, $B \in M(A_n, A_{n+1}, \ldots)$, то $|\rho(AB) - \rho(A)\rho(B)| \leqslant \alpha(n)\,\|A\|_\infty\,\|B\|_\infty\,(I)$, где $\alpha(n)$ не зависит от $A$, $B$. Пусть далее $\beta(n) = \sup\limits_{m\geqslant n}\|[A_n, A_m]\|_\infty$.

ТЕОРЕМА 3.4. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^d\alpha(n) = \lim\limits_{n\to\infty} n^d\beta(n)$ *при любом* $d = 1, 2, \ldots$ ;

2) $\rho(A_n^2) \leqslant an^\tau$, *где* $a, \tau$ *постоянные, причем* $\tau < 1, n = 1, 2, \ldots$ ;

3) $\|A_n\|_\infty \leqslant bn^t$, *где* $b, t$ *постоянные.*

*Тогда* $\lim\limits_{N\to\infty} N^{-1}\sum_{n=1}^{N}(A_n - \rho(A_n)I) = 0$ *почти всюду.*

Доказательство теоремы 3.4 опирается на следующие результаты.

Пусть $W_1, W_2, \ldots, W_N$ самосопряженные операторы из $M$, причем $\rho(W_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Положим $c = \max_n \|W_n\|_\infty$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Пусть далее заданы $\varepsilon > 0$ и для каждого $n = 1, 2, \ldots, N$ самосопряженный оператор $E_n \in M(S_n)$, который обладает следующими свойствами:

а) $0 \leqslant E_n \leqslant I$,

в) если $G_n$ носитель оператора $I - E_n$, $H_n = \{|S_n| \leqslant \varepsilon\}$, то $G_n \leqslant H_n$.

Введем следующие обозначения:

$$F_n = I - E_n, D_n = F_1 F_2 F_3 \ldots F_{n-1} F_n^2 F_{n-1} \ldots F_2 F_1,$$

$$L_n = S_n^2 E_n - \varepsilon^2 E_n,$$

$$K_n = (|L_n| + L_n)/2,$$

$$P_n = (|L_n| - L_n)/2; \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

$$\delta = \max_{m, n} \|[E_m, E_n]\|_\infty,$$

$$\gamma = \max_{m, n} \|[E_m, W_n]\|_\infty,$$

$$\lambda = \max_n \|E_n - E_n^2\|_2,$$

$$\chi = \max \|[E_n, P_m]\|_\infty,$$

$$\nu = \max \|E_n \cdot H_n\|_2.$$

Будем предполагать, что если $A \in M(W_1, W_2, \ldots, W_n)$, $B \in M(W_{n+1}, \ldots, W_N)$ то $|\rho(AB) - \rho(A)\rho(B)| \leqslant \alpha \|A\|_\infty \|B\|_\infty$, где $\alpha > 0$ не зависит от $A, B, n$.

Лемма 3.1. *Пусть $D = D_N$. Тогда*

1) $0 \leqslant D \leqslant I$,

2) *для любой вещественной измеримой функции $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$ ограниченной на каждом конечном промежутке и любого $n = 1, 2, \ldots, N$ выполнено неравенство*

$$\|f(S_n) D f(S_n)\|_\infty \leqslant [\operatorname{vrai}\max_{|x| \leqslant \varepsilon} f^2(x) + 2(N-1)\,\delta \operatorname{vrai}\max_{|x| \leqslant cN} f^2(x)],$$

*в частности* $\|S_n D S_n\|_\infty \leqslant (\varepsilon^2 + 2cN^2\delta)$,

3) $\rho(I-D) \leqslant \varepsilon^{-2}\left[\sum_{n=1}^{N} \rho(W_n^2) + 3\alpha c^2N^2 + N\lambda + 3N^2\delta + 2N^2cv + N^2\chi + 2cN^3\gamma\right]$,

4) $\|D-D^2\|_2 \leqslant 2N\lambda + 28N^2\delta$.

*Доказательство.* 1) По предположению $D_1 = F_1^2 \leqslant I$. Пусть $0 \leqslant D_{n-1} \leqslant I$. Поскольку $0 \leqslant F_n^2 \leqslant I$, то $0 \leqslant D_n \leqslant F_1F_2 \ldots F_{n-1}F_{n-1} \ldots F_1 - D_{n-1} \leqslant I$.

2) Из тождества

$$D = F_nF_1F_2 \ldots F_{n-1}F_{n+1} \ldots F_{N-1}F_N^2F_{N-1} \ldots F_{n+1}F_{n-1} \ldots F_1F_n +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} F_1F_2 \ldots F_{i-1}[F_i, F_n]F_{i+1} \ldots F_{n-1}F_{n+1} \ldots F_{N-1}F_N^2F_{N-1} \ldots F_{n+1}F_nF_{n-1} \ldots F_1 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} F_nF_1F_2 \ldots F_{n-1}F_{n+1} \ldots F_{N-1}F_N^2F_{N-1} \ldots F_{n-1}F_{n+1} \ldots F_{i+1}[F_n, F_i]\, F_{i-1} \ldots F_1$$

следует, что

$$D \leqslant F_nF_1 \cdots F_{n-1}F_{n+1} \cdots F_{N-1}F_N^2\, F_{N-1} \cdots F_{n+1}F_{n-1} \cdots F_1F_n +$$
$$+ \left(\sum_{i=1}^{n-1} \|F_1 \cdots F_{i-1}\|_\infty \|[F_i, F_n]\|_\infty \|F_{i+1} \cdots F_{N-1}F_N^2F_{N-1} \cdots F_1\|_\infty + \right.$$
$$(5) \qquad + \sum_{i=1}^{n-1} \|F_nF_1 \cdots F_{n-1}F_{n+1} \cdots F_{N-1}F_N^2F_{N-1} \cdots F_{n+1}F_{n-1} \cdots F_{i+1}\|_\infty \cdot$$
$$\left. \cdot \|[F_n, F_i]\|_\infty \|F_{i-1} \cdots F_1\|_\infty \right) \cdot I.$$

Поскольку

$$F_1F_2 \cdots F_{n-1}F_{n+1} \cdots F_{N-1}F_N^2\, F_{N-1} \cdots F_{n+1}F_{n-1} \cdots F_1 \leqslant I,$$
$$\|F_j\|_\infty \leqslant I,$$

то из (5) получим

$$(6) \qquad D \leqslant F_n^2 + 2(n-1) \max_{i \leqslant n} \|[F_n, F_i]\|_\infty \cdot I \leqslant F_n + 2(N-1)\delta \cdot I.$$

Пусть $f(x)$ измеримая вещественная функция, ограниченная на каждом конечном промежутке. Поскольку

$$G_nF_n = F_n,\ F_n \leqslant I,\ G_n \leqslant H_n,$$

то

$$f^2(S_n)F_n \leqslant f^2(S_n)H_n \leqslant \operatorname{vrai}\max_{|x| \leqslant \varepsilon} f^2(x)I\ .$$

Кроме того, $\|S_n\|_\infty \leqslant cN$ и следовательно, $\|f^2(S_n)\| \leqslant \operatorname{vrai}\max_{|x| \leqslant cN} f^2(x)$. Тогда из (6) получим (2).

3) Оценим снизу величину $\rho(S_N(I-D_N)S_N)$. Из тождества

$$I-D_N = I-D_{N-1}+F_1\dots F_{N-1}E_NF_{N-1}\cdots F_1+ \tag{7}$$
$$+F_1\dots F_{N-1}(E_N-E_N^2)F_{N-1}\dots F_1$$

получим

$$\rho(S_N(I-D_N)S_N)\geqslant\rho(S_{N-1}(I-D_{N-1})S_{N-1})-|\rho(W_N(I-D_{N-1})S_{N-1})|-$$
$$-|\rho(S_{N-1}(I-D_{N-1})W_N)|+\rho(W_N(I-D_{N-1})W_N)+ \tag{8}$$
$$+\rho(S_NF_1\cdots F_{N-1}E_NF_1\cdots F_{N-1}S_N)+\rho(S_NF_1\cdots F_{N-1}(E_N-E_N^2)F_{N-1}\cdots F_1S_N).$$

Поскольку

$$(I-D_{N-1})S_{N-1}\in M(W_1,\dots,W_{N-1}),\quad \rho(W_N)=0,$$

то из предположений леммы получим

$$|\rho(W_N(I-D_{N-1})S_N)|\leqslant\alpha\|W_N\|_\infty\|(I-D_{N-1})\|_\infty\|S_N\|_\infty\leqslant\alpha c^2N$$
$$|\rho(S_N(I-D_{N-1})W_N|\leqslant\alpha\|W_N\|_\infty\|I-D_{N-1}\|_\infty\|S_N\|_\infty\leqslant\alpha c^2N. \tag{9}$$

Далее,

$$\rho(W_N(I-D_{N-1})W_N)\geqslant 0. \tag{10}$$

Величину $\rho(S_NF_1\cdots F_{N-1}E_NF_{N-1}\cdots F_1S_N)$ представим в следующем виде

$$\rho(S_NF_1F_2\cdots F_{N-1}E_NF_{N-1}\cdots F_1S_N)=\rho(F_1\cdots F_{N-1}S_NE_NS_NF_{N-1}\cdots F_1)+$$
$$+\sum_{i=1}^{N-1}\rho(F_1F_2\cdots F_{i-1}[S_N,F_i]F_{i+1}\cdots F_{N-1}E_NF_{N-1}\dots F_{i+1}F_iF_{i-1}\cdots S_N)+ \tag{11}$$
$$+\sum_{i=1}^{N-1}\rho(F_1\dots F_{N-1}S_NE_NF_{N-1}\cdots F_{i+1}[F_i,S_N]F_{i-1}\cdots F_1).$$

Имеем:

$$\rho(F_1\dots F_{N-1}S_NE_NS_NF_{N-1}\cdots F_1)=\varepsilon^2\rho(F_1\cdots F_{N-1}E_NF_{N-1}\cdots F_1)+ \tag{12}$$
$$+\rho(F_1\cdots F_{N-1}L_NF_1\cdots F_{N-1});$$

$$\rho(F_1\cdots F_{N-1}L_NF_1\cdots F_{N-1})=\rho(F_1\cdots F_{N-1}K_NF_{N-1}F_1)- \tag{13}$$
$$-\rho(F_1\cdots F_{N-1}P_NF_{N-1}\cdots F_1);$$

$$\rho(F_1\cdots F_{N-1}K_NF_{N-1}\cdots F_1)\geqslant 0, \tag{14}$$

поскольку $K_N \geqslant 0$;

$$|\rho(F_1 \dots F_{N-1}P_N F_{N-1} \cdots F_1)| \leqslant |\rho(F_1 F_2 \cdots F_{N-1}^2 \cdots F_1 P_N)| +$$

$$(15) \qquad + \sum_{i=1}^{N-1} |\rho(F_1 \cdots F_{N-1}^2 F_{N-2} \dots F_{i+1}[F_i, P_N]\, F_{i-1} \cdots F_1)| \leqslant$$

$$\leqslant \|F_1 \cdots F_{N-1}^2 \cdots F_1\|_\infty \|P_N\|_2 + \sum_{i=1}^{N-1} \|[F_i, P_N]\|_\infty \leqslant \|P_N\|_2 + N\chi.$$

Поскольку

$$L_N(I - H_N) = S_N^2(I - H_N)E_N - \varepsilon^2 E_N(I - H_N) \geqslant \varepsilon^2(I - H_N)E_N - \varepsilon^2 E_N(I - H_N) = 0,$$

то $P_N(I - H_N) = 0$. Следовательно,

$$(16) \quad \|P_N\|_2 = \|P_N H_N\|_2 \leqslant \|S_N\|_\infty^2 \|E_N H_N\|_2 + \varepsilon^2 \|E_N H_N\|_2 \leqslant N^2 c^2 \nu + \varepsilon^2 \nu \leqslant 2Nc\nu.$$

Из (12) — (16) получим

$$(17) \qquad \begin{gathered} \rho(F_1 \cdots F_{N-1} S_N E_N S_N F_{N-1} \cdots F_1) \geqslant \\ \geqslant \varepsilon^2 \rho(F_1 \cdots F_{N-1} E_N F_{N-1} \cdots F_1) - 2Nc\nu - N\chi. \end{gathered}$$

Далее

$$(18) \qquad \begin{gathered} |\rho(F_1 \cdots F_{i-1}[S_N, F_i] F_{i+1} \cdots F_{N-1} E_N F_{N-1} \cdots F_1 S_N)| \leqslant \\ \leqslant \|F_1 F_2 \cdots F_{i-1}\|_\infty \|[S_N, F_i]\|_\infty \|F_{i+1} \cdots F_{N-1} E_N F_{N-1} \cdots F_1 S_N\|_\infty \leqslant c N^2 \gamma \end{gathered}$$

и аналогично

$$(19) \qquad |\rho(F_1 F_2 \cdots F_{N-1} S_N E_N E_{N-1} \cdots F_{i+1}[F_i, S_N] F_{i-1} \cdots F_1)| \leqslant c N^2 \gamma.$$

Из (11), (17), (18), (19) получим

$$(20) \qquad \begin{gathered} \rho(S_N F_1 \cdots F_{N-1} E_N F_{N-1} \cdots F_1 S_N) \geqslant \\ \geqslant \varepsilon^2 \rho(F_1 \cdots F_{N-1} E_N F_{N-1} \cdots F_1) - 2N^2 c^2 \nu - N\chi - 2cN^2\gamma. \end{gathered}$$

Поскольку $E_N - E_N^2 \geqslant 0$, то

$$(21) \qquad \rho(S_N F_1 \cdots F_{N-1}(E_N - E_N^2) F_{N-1} \cdots F_1 S_N) \geqslant 0.$$

Представим величину $\rho(F_1 \cdots F_{N-1}(E_N - E_N^2) F_{N-1} \cdots F_1)$ в виде

$$(22) \qquad \begin{gathered} \rho(F_1 \cdots F_{N-1}(E_N - E_N^2) F_{N-1} \cdots F_1) = \rho(F_1 \cdots F_{N-1}^2 \dots F_1(E_N - E_N^2)) + \\ + \sum_{i=1}^{N-1} \rho(F_1 F_2 \cdots F_{N-1}^2 F_{N-2} \cdots F_{i+1}[(E_N - E_N^2), F_i] F_{i-1} \cdots F_1). \end{gathered}$$

Имеем

$$(23)\quad |\rho(F_1\cdots F_{N-1}^2\cdots F_1(E_N-E_N^2))|\leqslant \|F_1\cdots F_{N-1}^2\cdots F_1\|_\infty\|E_N-E_N^2\|_2\leqslant\lambda,$$

$$(24)\quad \begin{gathered}|\rho(F_1\cdots F_{N-1}^2F_{N-2}\cdots F_{i+1}[(E_N-E_N^2),F_i]F_{i+1}\cdots F_1)|\leqslant\\ \leqslant\|F_1F_2\cdots F_{N-1}^2\cdots F_{i+1}\|_\infty\|[(E_N-E_N^2),F_i]\|_\infty\|F_{i-1}\cdots F_1\|_\infty\leqslant 3\|[E_N,F_i]\|\leqslant 3\delta.\end{gathered}$$

Следовательно,

$$(25)\quad \rho(F_1\cdots F_{N-1}(E_N-E_N^2)F_{N-1}\cdots F_1)\leqslant\lambda+3N\delta.$$

Из (8), (9), (10), (20), (21), (25) получим

$$(26)\quad \begin{gathered}\rho(S_N(I-D_N)S_N)\geqslant\rho(S_{N-1}(I-D_{N-1})S_{N-1})+\varepsilon^2\rho(F_1F_2\cdots\\ \cdots F_{N-1}(2E_N-E_N^2)F_{N-1}\cdots F_1)-\varepsilon^2(\lambda+3N\delta)-2Nc\nu-N\chi-2\alpha c^2N-2c^2N^3\gamma.\end{gathered}$$

Неравенство (26) справедливо для любого $N=2,\dots$ . Теперь оценим $\rho(S_1(I-D_1)S_1)$. Имеем

$$\rho(S_1(I-D_1)S_1)=\rho(S_1^2(2E_1-E_1^2))=\rho(S_1^2E_1)+\rho(S_1^2(E_1-E_1^2))\geqslant\rho(S_1^2E_1).$$

Далее

$$\begin{gathered}\rho(S_1^2E_1)\geqslant\rho(S_1^2(I-H_1)E_1)\geqslant\varepsilon^2\rho((I-H_1)E_1)\geqslant\varepsilon^2\rho(E_1)-\varepsilon^2\|H_1E_1\|_2\geqslant\\ \geqslant\varepsilon^2\rho(E_1)-\varepsilon^2\nu=\varepsilon^2\rho(2E_1-E_1^2)-\varepsilon^2\rho(E_1-E_1^2)-\varepsilon^2\nu\geqslant\\ \geqslant\varepsilon^2\rho(2E_1-E_1^2)-\varepsilon^2\|E_1-E_1^2\|_2-\varepsilon^2\nu\geqslant\varepsilon^2\rho(I-D_1)-\varepsilon^2(\lambda+\nu).\end{gathered}$$

Следовательно,

$$(27)\quad \rho(S_1(I-D_1)S_1)\geqslant\varepsilon^2\rho(I-D_1)-\varepsilon^2(\lambda+\nu).$$

Из (27) и (26) при $N=2$ получим

$$(28)\quad \begin{gathered}\rho(S_2(I-D_2)S_2)\geqslant\varepsilon^2\rho(I-D_1+F_1(2E_2-E_2^2)F_1)-\\ -\varepsilon^2(2\lambda+6\delta+\nu)-4c^2\nu-2\chi-4\alpha c^2-\gamma=\\ =\varepsilon^2\rho(I-D_2)-\varepsilon^2(2\lambda+6\delta+\nu)-8c\gamma-4c^2\nu-2\chi-4\alpha c^2.\end{gathered}$$

Теперь из (28) и (26) при $N=3$ можно получить оценку для $\rho(S_3(I-D_3)S_3)$ и т. д.. Окончательно получим

$$\rho(S_N(I-D_N)S_N)\geqslant\varepsilon^2\rho(I-D_N)-N\lambda-3N^2\delta-2N^2c\nu-N^2\chi-2\alpha c^2N^2-2\gamma cN^3.$$

С другой стороны

$$\rho(S_N(I-D_N)S_N) \leqslant \rho(S_N^2);\ \rho(S_N^2) = \sum_{n=1}^{N} \rho(W_n^2) + \sum_{m\neq n} \rho(W_m, W_n).$$

Поскольку $\rho(W_m) = 0$, то $|\rho(W_m W_n)| \leqslant c^2\alpha$. Следовательно,

$$\rho(S_N^2) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \rho(W_n^2) + N^2 c^2 \alpha. \tag{30}$$

Теперь из (29) получим

$$\rho(I-D_N) \leqslant \varepsilon^{-2}\left[\sum_{n=1}^{N} \rho(W_n^2) + 3\alpha c^2 N^2 + N\lambda + 3N^2\delta + 2N^2 c\nu + N^2\chi + 2cN^3\gamma\right].$$

4) Имеем:

$$\|[F_N, F_1\cdot F_2 \cdots F_{N-1}]\|_\infty \leqslant N \max_{i\leqslant N-1} \|[F_N, F_i]\|_\infty \leqslant N\delta, \tag{31}$$

$$D = F_N^2 D_{N-1} + [F_1 \cdots F_{N-1}, F_N^2] F_{N-1} \cdots F_1, \tag{32}$$

$$\begin{gathered} D^2 = F_N^4 D_{N-1}^2 + [F_1F_2 \cdots F_{N-1}, F_N^4] F_{N-1} \dots F_2 F_1^2 F_2 \cdots F_{N-2} F_{N-1}^2 F_{N-2} \cdots F_1 + \\ + F_1 F_2 \dots F_{N-1} F_N^2 [F_{N-1} \cdots F_2 F_1^2 F_2 \cdots F_{N-1}, F_N^2] F_{N-1} \cdots F_1. \end{gathered} \tag{33}$$

Из (31), (32), (33) получим

$$\begin{gathered} \|D_N - D_N^2\|_2 \leqslant \|F_N^2 D_{N-1} - F_N^4 D_{N-1}^2\|_2 + \|[F_1F_2 \cdots F_{N-1}, F_N^2]\|_\infty + \\ + \|[F_1F_2 \cdots F_{N-1}, F_N^4]\|_\infty + \|[F_{N-1} \cdots F_1^2 \cdots F_{N-1}, F_N^2]\|_\infty \leqslant \\ \leqslant \|F_N^2(D_{N-1} - D_{N-1}^2)\|_2 + \|F_N^2 D_{N-1}^2 - F_N^4 D_{N-1}^2\|_2 + 4\|[F_1F_2 \cdots F_{N-1}, F_N]\|_\infty + \\ + 4\|[F_1 \cdots F_{N-1}, F_N]\|_\infty \leqslant \|F_N^2\|_\infty \|D_{N-1} - D_N^2\|_2 + \|F_N^2 D_{N-1}^2 - F_N^4 D_{N-1}^2\|_2 + 8N\delta. \end{gathered} \tag{34}$$

Далее, $\|[F_N, D_N]\|_\infty \leqslant 2\|[F_N, F_1 \cdots F_{N-1}]\| \leqslant 2N\delta$. Тогда из (34) получим

$$\begin{gathered} \|D_N - D_N^2\|_2 \leqslant \|D_{N-1} - D_{N-1}^2\|_2 + \|D_{N-1}^2(F_N^2 - F_N^4)\|_2 + \|[F_N^2, D_{N-1}^2]\|_\infty + \\ + \|[F_N^4, D_{N-1}^2]\|_\infty + 8N\delta \leqslant \|D_{N-1} - D_{N-1}^2\|_2 + \\ + \|D_{N-1}^2\|_\infty (\|F_N(F_N - F_N^2)\|_2 + \|F_N^2(F_N - F_N^2)\|_2 + \\ + 4\|[F_N, D_{N-1}]\|_\infty + 6\|[F_N, D_{N-1}]\|_\infty + 8N\delta \leqslant \|D_{N-1} - D_{N-1}^2\|_2 + \\ + 2\|F_N - F_N^2\| + 28N\delta \leqslant \|D_{N-1} - D_{N-1}^2\|_2 + 2\lambda + 28N\delta. \end{gathered} \tag{35}$$

Поскольку неравенство (35) справедливо для любого $N = 2, 3, \ldots$ и кроме того, $\|D_1 - D_1^2\|_2 = \|F_1^2 - F_1^4\|_2 \leqslant 2\lambda$, то из (35) получим $\|D_N - D_N^2\|_2 \leqslant \leqslant 2N\lambda + 28N^2\delta$. Лемма доказана.

Пусть $A, B$ самосопряженные операторы из $M$, $\|A\|_\infty, \|B\|_\infty \leqslant 1$, $A_+ = (|A| + A)/2$, $A_- = (|A| - A)/2$.

ЛЕММА 3.2. (1) *Для каждого вещественного* $p \geqslant 0$ *имеют место следующие неравенства:*

а) $\|[\cos(pA), B]\|_\infty \leqslant p^2 \exp(1)\|[A, B]\|_\infty$;

б) *если* $A \geqslant 0$, *то* $\|[\exp(-pA), B]\|_\infty \leqslant p\exp(1)\|[A, B]\|_\infty$;

(2) *если* $p > 0$ *целое, то*

$$\|[|A|, B]\|_\infty \leqslant 4/\pi p + 4p\exp(1)\|[A, B]\|_\infty/\pi,$$

$$\|[A_+, B]\|_\infty \leqslant 2/\pi p + 2p\exp(1)\|[A, B]\|_\infty + \|[A, B]\|_\infty/2,$$

$$\|[A_-, B]\|_\infty \leqslant 2/\pi p + 2p\exp(1)\|[A, B]\|_\infty + \|[A, B]\|_\infty/2.$$

*Доказательство.* (1) Пусть $0 \leqslant p \leqslant 1$. Тогда

$$\|[\cos pA, B]\|_\infty \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} p^{2m}\|[A^{2m}, B]\|_\infty/2m! \leqslant p^2 \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{2m-1}\|A^{2m-i-1}[A, B]A^i\|_\infty\right)/2m! \leqslant$$

$$\leqslant p^2\|[A, B]\|_\infty \sum_{m=1}^{\infty} 2m\|A\|_\infty^{2m-1}/2m! \leqslant p^2\exp(1)\|[A, B]\|_\infty.$$

Пусть неравенство а) установлено для всех $p$ из интервала $[0,2^s]$, $s$ натуральное, $p \in [0, 2^{s+1}]$, $p_1 = p/2$. Тогда

$$\|[\cos pA, B]\|_\infty \leqslant 2\|[\cos^2(p, A), B]\|_\infty \leqslant 4\|\cos(p, A)\|_\infty\|[\cos(p, A), B]\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant 4p_1^2\exp(1)\|[A, B]\|_\infty = p^2\exp(1)\|[A, B]\|_\infty.$$

Аналогично, если $0 \leqslant p \leqslant 1$, то разложение функции $\exp x$ в ряд дает оценку $\|[\exp(-pA), B]\|_\infty \leqslant p\exp(1)\|[A, B]\|_\infty$. Предположим, что неравенство б) установлено для всех $p_1$ из интервала $[0,2^s]$, где $s$ натуральное и пусть $p \in [0,2^{s+1}]$, $p_1 = p/2$. Тогда

$$\|[\exp(-pA), B]\|_\infty \leqslant 2\|\exp(-pA)\|_\infty\|[\exp(-p_1A), B]\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant 2p_1\|[A, B]\|_\infty\exp(1) = p\exp(1)\|[A, B]\|_\infty.$$

(2) Воспользуемся следующим неравенством

$$\left| |x| - a_0/2 - \sum_{q=1}^{p} a_q \cos qx \right| \leqslant \sum_{q=p+1}^{\infty} |a_q|$$

где $a_0 = \pi$, $a_q = 0$ для четных $q \neq 0$, $a_q = -4/\pi q^2$ для нечетных $q$, $x \in [-\pi, \pi]$. Тогда получим

$$\left\| |A| - a_0 I/2 - \sum_{q=1}^{p} a_q \cos qA \right\|_\infty \leqslant \sum_{q=p+1}^{\infty} |a_q| \leqslant 4/\pi p.$$

Следовательно,

$$\|[|A|, B]\|_\infty \leqslant 2\| |A| - a_0 I/2 - \sum_{q=1}^{p} a_q \cos qA \|_\infty \|B\|_\infty + \sum_{q=1}^{p} |a_q| \|[\cos qA, B]\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant 4/\pi p + \sum_{q=1}^{p} |a_q| q^2 \exp(1) \|[A, B]\|_\infty = 4/\pi p + 4p\exp(1)\|[A, B]\|_\infty/\pi;$$

$$\|[A_+, B]\|_\infty \leqslant \|[|A|, B]\|_\infty/2 + \|[A, B]\|_\infty/2 \leqslant 2/\pi p + 2p\exp(1)\|[A, B]\|_\infty/\pi + \|[A, B]\|_2;$$

$$\|[A_-, B]\|_\infty \leqslant \|[|A|, B]\|_\infty/2 + \|[A, B]\|_\infty/2 \leqslant 2/\pi p + 2p\exp(1)\|[A, B]\|_\infty + \|[A, B]\|_\infty/2.$$

Лемма доказана.

Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ вероятностное пространство, $A(\omega)$ — случайная величина, заданная на $\Omega$. Пусть далее $F(\lambda)$ функция распределения величины $A(\omega)$, $\varepsilon > 0$. Положим

$$U = (|\varepsilon^2 - A^2| + (\varepsilon^2 - A^2))/2, \qquad E = \exp(-pU),$$

где $p > 0$. Пусть $H = \{|A| \leqslant \varepsilon\}$, $Q$ носитель функции $I - E$.

Лемма 3.3. (1) *$\mu\{Q \setminus H\} = 0$; $0 \leqslant E(\omega) \leqslant 1$ для почти всех $\omega \in \Omega$,*

*(2) если функция распределения $F(\lambda)$ имеет плотность $f(\lambda)$, причем $\sup_\lambda f(\lambda) = c < +\infty$, то для любого $0 < \eta < \varepsilon$ имеют место неравенства:*

$$\|E - E^2\|_2 \leqslant \exp(-p\eta^2) + 2(c\eta)^{1/2}, \quad \|E\chi_H\|_2 \leqslant \exp(-p\eta^2) + 2(c\eta)^{1/2},$$

*где $\|\cdot\|_2$ норма в пространстве $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, $\chi_H$ характеристическая функция множества $H$.*

*Доказательство.* В доказательстве нуждается лишь 2). Пусть $\Phi = \{\varepsilon^2 - A^2 \geqslant \eta^2\}$. Тогда $E(\omega) \leqslant \exp(-p\eta^2)$ для $\omega \in \Phi$. Кроме того, $H - \Phi \subset \Phi_+ + \Phi_-$, где $\Phi_+ = \{\varepsilon - \eta \leqslant A \leqslant \varepsilon\}$, $\Phi_- = \{-\varepsilon \leqslant A \leqslant -\varepsilon + \eta\}$. Таким образом

$$\|E\chi_H\|_2 \leqslant \exp(-p\eta^2) + \mu(\varphi_+)^{1/2} + \mu(\Phi_-)^{1/2} \leqslant \exp(-p\eta^2) + 2(c\eta)^{1/2}.$$

Поскольку $I - \chi_H = E(I - \chi_H)$, то $(E - E^2)(I - \chi_H) = 0$. Следовательно,

$$\|E - E^2\|_2 \leqslant \|(E - E^2)\chi_H\|_2 \leqslant \|E\chi_H\|_2 \leqslant \exp(-p\eta^2) + 2(c\eta)^{1/2}.$$

Лемма доказана.

Пусть $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ самосопряженные операторы из $M$. Предположим, что существует $\nu > 0$ такое, что для любого $n = 1, 2, \ldots, N$ и любых $A \in M(Z_1, \ldots, Z_{n-1})$, $B \in M(Z_n, \ldots, Z_N)$ имеет место неравенство $\rho(AB) - \rho(A)\rho(B)| \leqslant \nu\|A\|_\infty\|B\|_\infty$. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ вероятностное пространство, $L = L^\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ алгебра всех измеримых, существенно ограниченных комплексных функций на $\Omega$, $R = M \otimes L$. Алгебру фон Неймана $R$ можно отождествить с алгеброй всех слабо измеримых $M$-значных функций на $\Omega$, для которых $\operatorname{vrai\,max}_{\omega \in \Omega} \|A(\omega)\|_\infty < +\infty$. Если $A \in R$, $A(\omega)$ соответствующая $M$-значная функция, то соотношение $\zeta(A) = \int_\Omega \rho(A(\omega))d\mu(\omega)$ определяется точное нормальное состояние на $R$ [6].

Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ независимые, ограниченные случайные величины на $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$; $R(Z_1 \otimes I, Z_2 \otimes I, \ldots, Z_{n-1} \otimes I, I \otimes Y_1, I \otimes Y_2, \ldots, I \otimes Y_{n-1})$ и $R(Z_n \otimes I, Z_{n+1} \otimes I, \ldots, Z_N \otimes I, Y_n \otimes I, Y_{n+1} \otimes I, \ldots, Y_N \otimes I)$ наименьшие подалгебры фон Неймана в $R$, содержащие $Z_1 \otimes I, Z_2 \otimes I, \ldots, Z_{n-1} \otimes I$, $I \otimes Y_1, I \otimes Y_2, \ldots, I \otimes Y_{n-1}$ и $Z_n \otimes I, Z_{n+1} \otimes I, \ldots, Z_N \otimes I, I \otimes Y_n, I \otimes Y_{n+1}, \ldots, I \otimes Y_N$ соответственно.

Лемма 3.4. *Если*

$$A \in R(Z_1 \otimes I, Z_2 \otimes I, \ldots, Z_{n-1} \otimes I, I \otimes Y_1, I \otimes Y_2, \ldots, I \otimes Y_{n-1}),$$

$$B \in R(Z_n \otimes I, Z_{n+1} \otimes I, \ldots, Z_N \otimes I, I \otimes Y_n, I \otimes Y_{n+1}, \ldots, I \otimes Y_N),$$

*то*

$$|\rho(AB) - \rho(A)\rho(B)| \leqslant \nu\|A\|_\infty\|B\|_\infty.$$

*Доказательство.* Пусть $A(\omega)$, $R$-значная функция, соответствующая элементу $A \in R$. Рассмотрим наименьшую $\sigma$-подалгебру $\mathscr{U} \subset \mathscr{A}$, относительно которой измеримы величины $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ и алгебру $K = L^\infty(\Omega, \mathscr{U}, \mu)$ всех функций из $L$, измеримых относительно $\mathscr{U}$. Тогда $R(Z_1 \otimes I, Z_2 \otimes I, \ldots, Z_{n-1} \otimes I, I \otimes Y_1, I \otimes Y_2, \ldots I \otimes Y_{n-1}) = M(Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1}) \otimes K$.

Поэтому $A(\omega) \in M(Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1})$ для почти всех $\omega \in \Omega$ и отображение $\omega \to A(\omega)$ слабо измеримо относительно $\mathscr{U}$. Аналогично, если $B(\omega)$, $R$-значная функция, соответствующая элементу $B \in R$, то $B(\omega) \in M(Z_n, Z_{n+1}, \ldots, Z_N)$ для почти всех $\omega \in \Omega_1$ и отображение $\omega \to B(\omega)$ слабо измеримо относительно $\sigma$-подалгебры $\mathscr{V} \subset \mathscr{A}$, порожденной величинами $Y_n, Y_{n+1}, \ldots, Y_N$. Поскольку алгебры $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ независимы, то

$$\zeta(A)\zeta(B) = \int_\Omega \rho(A(\omega))\mathrm{d}\mu(\omega) \int_\Omega \rho(B(\omega))\mathrm{d}\mu(\omega) = \int_\Omega \rho(A(\omega))\rho(B(\omega))\mathrm{d}\mu(\omega).$$

Следовательно,

$$|\zeta(AB) - \zeta(A)\zeta(B)| \leqslant \int_\Omega |\rho(A(\omega)B(\omega)) - \rho(A(\omega))\rho(B(\omega))|\,\mathrm{d}\mu(\omega) \leqslant$$

$$\leqslant \nu \int_\Omega \|A(\omega)\|_\infty \cdot \|B(\omega)\|_\infty \mathrm{d}\mu(\omega) \leqslant \nu \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty.$$

ЛЕММА 3.5. *Пусть $K$ алгебра фон Неймана, $\zeta$ точное нормальное состояние на $K$, $L$ подалгебра фон Неймана в $K$, $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ последовательность операторов из $L$, сходящаяся к нулю почти всюду в $K$. Если существует условное математическое ожидание $\varphi: K \to L$ на подалгебру $L$, сохраняющее $\zeta$, то $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к нулю почти всюду в $L$.*

*Доказательство.* Пусть задано $\varepsilon > 0$. Существует проектор $G \in K$ такой, что $\zeta(G) \geqslant 1 - \varepsilon$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|GT_n\|_\infty = 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi(GT_n)\|_\infty = 0$. Поскольку $\varphi(GT_n) = \varphi(G)T_n$ [19], то $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n^*\varphi(G)^2T_n\|_\infty = 0$. Положим $E = \{\varphi(G)^2 \geqslant 1/2\}$. Тогда $E \leqslant 2\varphi(G)^2$. Следовательно,

$$\|T_n^*ET_n\|_\infty \leqslant 2\|T_n^*\varphi(G)^2T_n\|, \quad \lim_{n\to\infty} \|T_n^*ET_n\|_\infty = 0.$$

Далее $\zeta(\varphi(G)) = \zeta(G)$, $1 - \zeta(\varphi(G)^2) \leqslant 2(1 - \zeta(\varphi(G)))$. Следовательно, $\zeta(\varphi(G)^2) \geqslant 1 - 2\varepsilon$. С другой стороны,

$$\zeta(\varphi(G)^2) \leqslant \zeta(E) \cdot \|\varphi(G)^2\|_\infty + (1/2)(1 - \zeta(E)) \leqslant \zeta(E)/2 + 1/2.$$

Следовательно, $\zeta(E) \geqslant 1-4\varepsilon$. Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Пусть $L$, $S$ алгебра фон Неймана, $\lambda$, $\sigma$ точные нормальные состояния на $L$ и $S$ соответственно, $K = L \otimes S$, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность операторов из $L$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} T_n \otimes T = 0$ почти всюду в $K$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = 0$ почти всюду в $L$.*

*Доказательство.* Пусть $\zeta = \lambda \otimes \sigma$. Тогда $\zeta$ представляет собой точное нормальное состояние на $K$ и существует условное математическое ожидание $\varphi: K \to L \otimes T$, сохраняющее $\zeta$ [19]. Следовательно, по предыдущей лемме $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = 0$ почти всюду в $L$.

*Доказательство теоремы* 3.4. Существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ на котором определена последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ независимых случайных величин, причем распределение $G_n(x)$ величины $X_n$ имеет плотность $g_n(x)$, которая равна нулю для $|x| \geqslant n^{-1}$, и равна $2n$ для $|x| < n^{-1}$. Определим алгебру фон Неймана $R$ и состояние $\zeta$ на $R$ так же как в лемме 3.4, именно пусть $L = L^{\infty}(G, \mathscr{A}, \mu)$, $R = M \otimes L$, $\zeta(A) = \int_{\Omega} \rho(A(\omega))\, d\mu(\omega)$ (см. обозначения леммы 3.4).

Положим $B_n = A_n - \rho(A_n) I$, $Z_n = n^{-1} B_n$, $W_n = Z_n \otimes I + I \otimes X_n$, где $n = 1, 2, \ldots$. Отметим некоторые свойства последовательности $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$. Поскольку

$$|\rho(A_n)| \leqslant \rho(A_n^2)^{1/2}, \quad \operatorname*{vrai\,max}_{\omega \in \Omega} |X_n(\omega)| \leqslant n^{-1}, \quad \text{то } \|W_n\|_{\infty} \leqslant c_1 n^{d_1} \tag{1}$$

где $c_1, d_1 > 0$ постоянные. Далее

$$\zeta(W_n) = \rho(Z_n) + \int_{\Omega} X_n\, d\mu = 0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \zeta(W_n^2) = \rho(Z_n^2) + 2\rho(Z_n)\int_{\Omega} X_n\, d\mu + \int_{\Omega} X_n^2\, d\mu \leqslant n^{-2}\rho(A_n^2) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g_n(x)\, dx \leqslant a_1 n^{-\lambda} \end{aligned} \tag{3}$$

где $a_1 > 0$ постоянная, $\lambda = r - \tau > 1$. Кроме того, из условий теоремы и леммы 3.4 имеем

$$|\zeta(AB) - \zeta(A)\zeta(B)| \leqslant \alpha(n) \|A\|_{\infty} \|B\|_{\infty} \tag{4}$$

для любых $A \in R(W_1, W_2, \ldots, W_{n-1})$, $B \in R(W_n, W_{n+1}, \ldots)$;

$$\sup_{m \geqslant n} \|[W_n, W_m]\|_\infty \leqslant n^{-2} \beta(n) \tag{5}$$

где $n = 1, 2, \ldots$ .

Пусть $m_k = [k^{\frac{3}{\lambda-1}}]$, $n_k = m_k^{2+[t]}$, $N_k = n_k - m_k$, где $[\cdot]$ целая часть числа, $k = 1, 2, \ldots$ . Положим $S_{k,n} = \sum_{i=1}^{n} W_{m_k+i}$, где $n = 1, 2, \ldots, N_k$; $k = 1, 2, \ldots$ . Из (1) для $n = 1, 2, \ldots, N_k$ имеем

$$\|W_{m_k+n}\|_\infty \leqslant c_2 k^{d_2}, \quad \|S_{k,n}\|_\infty \leqslant c_3 k^{d_3} \tag{6}$$

где $c_2, c_3, d_2, d_3 > 0$ постоянные. Положим

$$\varepsilon_k = k^{-\frac{1}{2}}, \quad \hat{\varepsilon}_k = \varepsilon_k / 2c_3 k^{d_3},$$

$$T_{k,n} = S_{k,n}/2c_3 k^{d_3}, \quad H_{k,n} = \{|S_{k,n}| \leqslant \varepsilon_k\} = \{|T_{k,n}| \leqslant \hat{\varepsilon}_k\},$$

$$U_{k,n} = (|\hat{\varepsilon}_k^2 - T_{k,n}^2| + (\hat{\varepsilon}_k^2 - T_{k,n}))/2, \quad E_{k,n} = \exp(-p_k U_{k,n})$$

где $p_k = k^d$, $d > 0$ целое, не зависящее от $k$, которое будет выбрано позже, $k = 1, 2, \ldots$ .

Из леммы 3.3 следует, что $0 \leqslant E_{k,n} \leqslant I$ и носитель оператора $I - E_{k,n}$ не превосходит $H_{k,n}$. Кроме того, по построению $E_{k,n}$ принадлежит наименьшей подалгебре фон Неймана в $R$, содержащей $S_{k,n}$ и $I$.

Введем следующие обозначения:

$$F_{k,n} = I - E_{k,n}, \quad D_{k,n} = F_{k,1} F_{k,2} \ldots F_{k,n-1} F_{k,n}^2 F_{k,n-1} \ldots F_{k,1},$$

$$L_{k,n} = S_{k,n}^2 E_{k,n} - \varepsilon_k^2 E_{k,n}, \quad P_{k,n} = (|L_{k,n}| - L_{k,n})/2,$$

где $n = 1, 2, \ldots, N_k$;

$$\delta_k = \max_{n,m} \|[E_{k,n}, E_{k,m}]\|_\infty, \quad \gamma_k = \max_{m,n} \|[E_{k,n}, W_{k,m}]\|_\infty,$$

$$\chi_k = \max_{n,m} \|[E_{k,n}, P_{k,m}]\|_\infty, \quad \lambda_k = \max_n \|E_{k,n} - E_{k,n}^2\|_2, \quad \nu_k = \max_n \|E_{k,n} H_{k,n}\|_2.$$

Оценим каждую из величин $\delta_k, \gamma_k, \lambda_k, \chi_k, \nu_k$. Пусть $k, l > 0$ целые, $k \leqslant l, m_k \leqslant n \leqslant n_k, m_l \leqslant m \leqslant n_l$. Тогда

$$\|[W_n, W_m]\|_\infty \leqslant \beta(m_l). \tag{7}$$

Далее

(8) $$\|[S_{k,n}, S_{l,m}]\|_\infty \leqslant N_k N_l \max_{i,j}\|[W_{m_k+i}, W_{m_l+j}]\|_\infty \leqslant c_4\beta(m_l)l^{d_4};$$

(9) $$\|[T_{k,n}, T_{l,m}]\|_\infty \leqslant c_4\beta(m_l)l^{d_4}/4c_3^2 k^{d_3} l^{d_3}$$

где $c_4, d_4 > 0$ постоянные, $n = 1, 2, \ldots, N_k$; $m = 1, 2, \ldots N_l$.

По лемме 3.2 имеем $\|[U_{k,n}, T_{l,m}]\|_\infty \leqslant c_5(q_1^{-1} + q_1\|[T_{k,n}^2, T_{l,m}]\|_\infty)$ где $c_5 > 0$ постоянное, $q_1 > 0$ произвольное целое. Поскольку

$$\|T_{k,n}\|_\infty \leqslant 1, \text{ то } \|[T_{k,n}^2, T_{l,m}]\|_\infty \leqslant 2\|[T_{k,n}, T_{l,m}]\|_\infty.$$

Опять по лемме 3.2

$$\|[E_{k,l}, T_{l,m}]\|_\infty \leqslant p_k c_6\|[U_{k,n}, T_{l,m}]\|_\infty \leqslant p_k c_6 c_5(q_1^{-1} + 2q_1\|[T_{k,n}, T_{l,m}]\|_\infty),$$

где $c_6 > 0$ постоянное. Точно так же получим

$$\|[E_{k,n}, E_{l,m}]\|_\infty \leqslant p_l c_6 c_5(q_2^{-1} + 2q_2\|[E_{k,n}, T_{l,m}]\|_\infty),$$

где $q_2 > 0$ произвольное целое. Таким образом

(10) $$\|[E_{k,n}, E_{l,m}]\|_\infty \leqslant c_7(q_2^{-1}p_l + 2q_1^{-1}q_2 p_l p_k + 4q_1 q_2 p_1 p_2\|[T_{k,n}, T_{l,m}]\|_\infty)$$

где $c_7 > 0$ постоянное. Положим $q_2 = p_l^2$, $q_1 = p_k p_l^4$. Поскольку $\lim_{r\to\infty}\beta(r)r^s = 0$ при любом $s$, то, подставляя $q_1, q_2$ в (10) и учитывая (9), получим

(11) $$\|[E_{k,n}, E_{l,m}]\|_\infty \leqslant c_8 p_l^{-1}$$

где $c_8 > 0$ постоянная, не зависящая от $k, l, m, n$ (здесь и в дальнейшем при доказательстве теоремы считается, что $k, l$ «достаточно» велики).

Из (11), в частности следует, что

(12) $$\delta_k \leqslant c_8 k^{-d}.$$

Аналогично можно получить оценку

(13) $$\gamma_k \leqslant c_9 k^{-d},$$

где $c_9 > 0$ постоянная. Из (12), (13) получим

(14) $$\begin{aligned}\|[L_{k,n}, E_{k,m}]\|_\infty &\leqslant \|S_{k,n}\|_\infty^2\|[E_{k,n}, E_{k,m}]\|_\infty + \|[S_{k,n}^2, E_{k,n}]\|_\infty + \\ &+ \|[E_{k,n}, E_{k,m}]\|_\infty \leqslant c_8\|S_{k,n}\|_\infty^2 k^{-d} + \|S_{k,n}\|_\infty N_k \max_{1\leqslant i\leqslant N_k}\|[W_{m_k+i}, E_{k,m}]\|_\infty + c_8 k^{-d}.\end{aligned}$$

Используя (6), (13), из (14) получим

$$\|[L_{k,n}, E_{k,m}]\|_\infty \leqslant c_8 c_3^2 k^{2d_3} k^{-d} + c_3 k^{d_3} k^{\frac{2+[t]}{1-\lambda}} c_9 k^{-d} + c_8 k^{-d}. \tag{15}$$

Будем в дальнейшем считать, что $d/4 > 2d_3 + (4 + 12[t])/(1 - \lambda)$. Тогда (15) нам дает

$$\|[L_{k,n}, E_{k,m}]\|_\infty \leqslant c_{10} k^{-d/2}, \tag{16}$$

где $c_{10} > 0$ постоянная.

По лемме 3.2

$$\|[P_{k,n}, E_{k,m}]\|_\infty \leqslant c_{11}(q^{-1} + q\|[L_{k,n}, E_{k,m}]\|_\infty), \tag{17}$$

где $c_{11} > 0$ постоянная, $q > 0$ произвольное целое. Будем считать, что $d$ кратно четырем. Положим $q = d/4$. Тогда из (16), (17) получим

$$\|[P_{k,n}, E_{k,m}]\|_\infty \leqslant c_{12} k^{-d/4},$$

где $c_{12}$ постоянная, не зависящая от $k, m, n$. Таким образом

$$\chi_k \leqslant c_{12} k^{-d/4}. \tag{18}$$

Представим оператор $S_{k,n}$ в следующем виде $S_{k,n} = Q \otimes I + I \otimes V$, где $Q = \sum_{i=1}^{m} Z_{m_k+i}$, $V = \sum_{i=1}^{n} X_{m_k+i}$. Пусть $M$, наименьшая подалгебра фон Неймана в $M$, содержащая оператор $Q$, $R_1$ наименьшая подалгебра фон Неймана в $R$, содержащая алгебры $M \otimes I$ и $I \otimes L$ (см. обозначения леммы 3.4). Представим алгебру фон Неймана $M_1$ в виде алгебры всех существенно ограниченных комплексных измеримых функций на порстранстве $\Omega_1$, с вероятностной мерой $\mu_1$ такой, что если $A \in M_1$, $A(\omega_1)$ соответствующая измеримая функция на $\Omega_1$, то $\rho(A_1) = \int_\Omega A(\omega_1)\, d\mu_1$. Тогда алгебра фон Неймана $R_1$ будет представлена в виде алгебры существенно ограниченных комплексных измеримых функций на пространстве $\Omega_1 \times \Omega$ с мерой $\mu_1 \otimes \mu$ и если $S_{k,n}(\omega_1, \omega)$ измеримая функция, соответствующая оператору $S_{k,n}$, $Q(\omega_1)$ измеримая функция, соответствующая оператору $Q$, то

$$S_{k,n}(\omega_1, \omega) = Q(\omega_1) + V(\omega). \tag{19}$$

Поскольку распределение величины $V(\omega)$ имеет плотность $h = g_{m_k+1} * g_{m_k+2} * \cdots * g_{m_k+n}$, то соотношение (19) показывает, что распределение оператора $S_{k,n}$ в состоянии $\zeta$ также имеет плотность, которая во всех точках не превосходит $2(m_k+1) = \max_x g_{m_k+1}(x)$.

Таким образом для оценки величин $\lambda_k$, $\nu_k$ можно применить лемму 3.3. Имеем

$$\|E_{k,n} - E_{k,n}^2\|_2 \leqslant \exp(-p_k\eta^2) + 2(4c_3k^{d_3}(m_k+1)\eta)^{1/2},$$

$$\|E_{k,n}H_{k,n}\|_2 \leqslant \exp(-p_k\eta^2) + 2(4c_3k^{d_3}(m_k+1)\eta)^{1/2},$$

для любого $\eta$, удовлетворяющего неравенству $0<\eta<\hat{\varepsilon}_k$. Полагая здесь $\eta = 1/4c_3k^{d_3}(m_k+1)k^{d/4}$ и учитывая, что

$$m_k \leqslant k^{\frac{2+[t]}{1-\lambda}}, \quad d/4 > 2d_3 + (4+2[t])/(1-\lambda)$$

получим

$$\|E_{k,n} - E_{k,n}^2\|_2 \leqslant c_{13}k^{-d/8}, \quad \|E_{k,n}H_{k,n}\|_2 \leqslant c_{13}k^{-d/8},$$

где $c_{13}>0$ постоянная. Таким образом мы получили оценку

$$\lambda_k,\ \nu_k \leqslant c_{13}k^{-d/8}. \tag{20}$$

Наконец, из неравенства (4) следует, что

$$|\zeta(AB) - \zeta(A)\zeta(B)| \leqslant \alpha_k\|A\|_\infty\|B\|_\infty,$$

для $A \in R(W_{m_k+1}, \ldots, W_{m_k+n-1})$, $B \in R(W_{m_k+n}, \ldots, W_{n_k})$, где $\alpha_k = \alpha(m_k)$, $n = 1, 2, \ldots, N_k$.

Положим $c^{(k)} = \max_{1\leqslant i\leqslant N_k} \|W_{m_k+i}\|_\infty$, $D_k = D_{k,N_k}$. Тогда по лемме 3.1

1) $$0 \leqslant D_k \leqslant I;$$

2) $$\|S_{k,n}D_kS_{k,n}\|_\infty \leqslant \varepsilon_k^2 + 2c^{(k)}N_k^2\delta_k, \quad \text{где } n = 1, 2, \ldots, N_k;$$

3) $$\zeta(I-D_k) \leqslant \varepsilon_k^{-2}\Bigl[\sum_{i=1}^{N_k}\zeta(W_{m_k+1}^2) + 3\alpha_kc^{(k)2}N_k^2 + N_k\lambda_k + 3N_k^2\delta_k^2 + 2N_k^2c^{(k)}\chi_k + 2c^{(k)}N_k\gamma_k\Bigr];$$

4) $$\|B_k - B_k^2\|_2 \leqslant 2N_k\lambda_k + 28N_k^2\delta.$$

Имеем $c^{(k)} \leqslant c_2k^{d_2}$, $N_k \leqslant k^{\frac{6+3t}{1-\lambda}}$, $\sum_{i=1}^{N_k}\zeta(W_{m_k+1}^2) \leqslant a_1\sum_{i=1}^{\infty}(m_k+i)^{-\lambda} \leqslant a_2m_k^{(1-\lambda)} \leqslant a_2k^{-3}$, где $a_2>0$ постоянная. Возьмем $d > 8(2d_2 + (6+6t)/\lambda - 1)$.

Тогда, учитывая, что $\lim\limits_{r\to\infty}\alpha(r)r^s = 0$ при любом $s$ получим:

2') $\|S_{k,n}D_kS_{k,n}\|_\infty \leqslant c_{14}k^{-1}$, где $n = 1, 2, \ldots, N_k$, $c_{14} > 0$ — постоянная

3') $\zeta(I - D_k) \leqslant c_{15}k^{-2}$, где $c_{15} > 0$ постоянная

4') $\|D_k - D_k^2\|_2 \leqslant c_{16}k^{-d/16}$, где $c_{16} > 0$ постоянная.

Пусть $k \leqslant l$; оценим величину $\|[D_k, D_l]\|_\infty$. Из неравенства (11), $\|[F_{k,n}, F_{l,m}]\|_\infty \leqslant c_8 l^{-d}$, где $n = 1, 2, \ldots, N_k$; $m = 1, 2, \ldots, N_l$. Следовательно,

$$\|[D_k, D_l]\|_\infty = \|[F_{k,1} \ldots F_{k,N_k-1} F^2_{k,N_k} F_{k,N_k-1} \ldots F_{k,1}, F_{l,1}, F_{l,2} \ldots$$

$$\ldots F_{l,N_l-1}, F^2_{l,N_l} F_{l,N_l-1} \ldots F_{l,1}]\|_\infty \leqslant 2N_kN_l \max_{n,m}\|[F_{k,n}, F_{l,m}]\|_\infty \leqslant \tag{21}$$

$$\leqslant 2N_l^2 c_8 l^{-d} \leqslant c_{17} l^{-d/2}$$

где $c_{17} > 0$ постоянная.

Положим $V(k, p) = D_kD_{k+1} \ldots D_{k+p-1} D^2_{k+p} D_{k+p-1} \ldots D_k$. Так же как в доказательстве леммы получим

$$0 \leqslant V(k, p) \leqslant I,$$

$$V(k, p) \leqslant D^2_{k+q} + 2(p - 1) \max_{i<q} \|[D_{k+i}, D_{k+q}]\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant D_{k+q} + 2(q - 1)\, c_{17}(k + q)^{-d/2},$$

(см. неравенство (6) леммы 3.1, а также неравенство (21) настоящего доказательства), где $1 \leqslant q \leqslant p$. Тогда из 2') получим

$$\|S_{k+q,n}V(k, p)\, S_{k+q,n}\|_\infty \leqslant c_{14}(k + q)^{-1} + 2\|S_{k+q,n}\|^2_\infty c_{17}(k + q)^{-d/2+1} \tag{22}$$

где $1 \leqslant n \leqslant N_{k+q}$, $1 \leqslant q \leqslant p$. Из (6) и (22) получим

$$\|S_{k+q,n}\, V(k, p)\, S_{k+q,n}\|_\infty \leqslant c_{18}(k + q)^{-1} \tag{23}$$

где $c_{18} > 0$ постоянная, $q, n$ те же, что и выше.

Оценим величину $\zeta(V(k, p))$. Имеем

$$V(k, p) = V(k, p - 1) + (D^2_{k+p} - I)V(k, p - 1) +$$

$$[D_kD_{k+1} \ \ldots D_{k+p-1},\ D^2_{k+p}]\, D_{k+p-1} \ldots D_1.$$

Следовательно,

$$\zeta(V(k, p)) \geqslant \zeta(V(k, p - 1)) - |\zeta((I - D^2_{k+p})V(k, p - 1))| -$$

$$- \|[D_kD_{k+1} \ldots D_{k+p-1}, D^2_{k+p}]\|_\infty \|D_{k+p-1} \ldots D_k\|_\infty. \tag{24}$$

Далее

$$(I - D_{k+p}^2)V(k,p) = (I - D_{k+p})V(k,p)(I + D_{k+p}) + (I - D_{k+p})[I + D_{k+p}V(k,p)];$$

$$\zeta((I - D_{k+p})V(k,p)(I + D_{k+p})) \leqslant \zeta((I - D_{k+p})(I + D_{k+p})) \leqslant$$
$$\leqslant 2\zeta(I - D_{k+p}) \leqslant 2c_{15}(k+p)^{-2},$$

поскольку $0 \leqslant V(k,p) \leqslant I$;

$$\|(I - D_{k+p})[I + D_{k+p}, V(k,p)]\|_\infty \leqslant \|[D_{k+p}, D_k D_{k+1} \ldots D_{k+p-1}^2 \ldots D_k]\|_\infty \leqslant$$
$$\leqslant 2p\max_{i<p}\|[D_{k+i}, D_{k+p}]\|_\infty \leqslant 2(k+p)c_{17}(k+p)^{-d/2}$$
$$\|[D_k D_{k+1} \ldots D_{k+p-1}, D_{k+p}^2]\|_\infty \leqslant 2(k+p)c_{17}(k+p)^{-d/2}.$$

Таким образом из (24) получим

$$\zeta(V(k,p)) \geqslant \zeta(V(k,p-1)) - c_{19}(k+p)^{-2} \tag{25}$$

где $c_{19} > 0$ постоянная. Аналогично $\zeta(V(k,p-1)) \geqslant \zeta(V(k,p-2)) - c_{19}(k+p-1)^{-2}$ и т. д. . Откуда

$$\zeta(V(K,\ p)) \geqslant \zeta(D_k^2) - c_{19}\sum_{i=1}^{p}(k+i)^{-2} \geqslant \zeta(D_k^2) - c_{19}k^{-1}.$$

Кроме того $\zeta(D_k^2) \geqslant 1 - 2\zeta(I - D_k) \geqslant 1 - 2c_{15}\cdot k^{-2}$. Окончательно

$$\zeta(V(k,p)) \geqslant 1 - c_{20}k^{-1}, \tag{26}$$

где $c_{20} > 0$ постоянная.

Поскольку единичный шар в $R$ слабо компактен, то существует сеть индексов $\{p_\alpha\}$ и оператор $V(k) \in R$ такие, что $\lim p_\alpha = \infty$, $V(k,p_\alpha) \to V(k)$ слабо. Поскольку $0 \leqslant V(k,p) \leqslant I, \zeta(V(k,p)) \geqslant 1 - c_{20}k^{-1}$, то $0 \leqslant V(k) \leqslant I$, $\zeta(V(k)) \geqslant 1 - c_{20}k^{-1}$. Пусть $l \geqslant k, 1 \leqslant n \leqslant N_l, p_\alpha \geqslant l$ для $\alpha \geqslant \alpha_0$. Из (23) получим

$$\|S_{l,n}V(k,p_\alpha)S_{l,n}\|_\infty \leqslant c_{18}l^{-1}.$$

Следовательно,

$$\|S_{l,n}V(k)S_{l,n}\|_\infty \leqslant c_{18}l^{-1}. \tag{27}$$

Пусть $E(k) = \{V(k) \geqslant 1/2\}$. Тогда $E(k) \leqslant 2V(k)$, $\zeta(I - E(k)) \leqslant 2\zeta(I - V(k))$. Следовательно,

$$\|S_{l,n}E(k)S_{l,n}\|_\infty \leqslant 2c_{18}l^{-1},\quad \zeta(E(k)) \geqslant 1 - 2c_{20}k^{-1}.$$

Поскольку $\|S_{l,n}E(k)\|_\infty = \|S_{l,n}E(k)S_{l,n}\|_\infty^{1/2}$, то $\lim\limits_{l\to\infty}\|S_{l,n}E(k)\|_\infty = 0$ равномерно по $n = 1, 2, \ldots N_l$.

Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega} X_n^2(\omega)\,d\mu \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < +\infty$ и $\int_{\Omega} X_n d\mu = 0, n = 1, 2, \ldots,$ то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ сходится по теореме Колмогорова почти всюду. Пусть задано $\varepsilon > 0$. По теореме Егорова существует измеримое подмножество $\Lambda \subset \Omega$ такое, что $\mu(\Lambda) \geqslant 1 - \varepsilon, \lim\limits_{l\to\infty} \sup\limits_{\omega\in\Lambda} |V_{l,n}(\omega)| = 0$ равномерно по $n$, где $V_{l,n}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} X_{m_l+i}(\omega)$.

Пусть $H$ характеристическая функция множества $\Lambda, G = I \otimes H \in R$. Тогда $\lim\limits_{l\to\infty} \|(I \otimes V_{l,n})G\|_\infty$ равномерно по $n$. Проекторы $E(k)$ и $G$ коммутируют. Следовательно, $J = E(k)\cdot G$ также является проектором и $\zeta(I - J) \leqslant \leqslant \zeta(I - E(k)) + \zeta(I - G) \leqslant 2\cdot c_{20} k^{-1} + \varepsilon$. Кроме того, $\lim\limits_{l\to\infty} \|S_{l,m} J\|_\infty = 0$, $\lim\limits_{l\to\infty} \|(I \otimes V_{l,n}) J\|_\infty = 0$ равномерно по $n = 1, 2, \ldots, N_l$.

Поскольку $S_{l,n} = \sum_{i=1}^{n} Z_{m_l+i} \otimes I + I \otimes V_{l,n}$, то из последних соотношений следует, что $\lim\limits_{l\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} (Z_{m_l+i} \otimes I)\, J \right\|_\infty = 0$ равномерно по $n = 1, 2, \ldots, N_l$. Положим $S'_{l,n} = \sum_{i=1}^{n} Z_{m_l+i} \otimes I$ где $1 \leqslant n \leqslant N_l$. Пусть $N$ натуральное, $n_{l-1} < N \leqslant n_l$. Имеем

$$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} B_i \otimes I = N^{-1} \sum_{i=1}^{m_l} B_i \otimes I + N^{-1}(m_l + 1) S'_{l,1} + \tag{28}$$
$$+ N^{-1} \sum_{n=2}^{N-m_l} (m_l + n)(S'_{l,n} - S'_{l,n-1}) = N^{-1} \sum_{i=1}^{m_l} B_i \otimes I + S'_{l,N-m_l} - N^{-1} \sum_{n=1}^{N-m_l-1} S'_{l,n},$$

(здесь мы считаем, что $l$ достаточно велико, в частности $m_l < n_{l-1}$). Следовательно,

$$\left\| N^{-1} \sum_{i=1}^{N} (B_i \otimes I) J \right\|_\infty \leqslant N^{-1}\cdot m_l \max_{i\leqslant m_l} \|B_i\|_\infty + N^{-1} \sum_{n=1}^{N-m_l} \|S'_{l,n} J\|_\infty. \tag{29}$$

Поскольку $\max\limits_{i\leqslant m_l} \|B_i\|_\infty \leqslant 2b\, m_l^l$, $\lim\limits_{l\to\infty} n_{l-1}^{-1} m_l^{l+1} = 0$ и $\lim\limits_{l\to\infty} \|S'_{l,n} J\|_\infty = 0$ равномерно по $n = 1, 2, \ldots, N_l$, то из (29) следует, что $\lim\limits_{N\to\infty} \left\| N^{-1} \sum_{i=1}^{N} (B_i \otimes I) J \right\|_\infty = 0$.

Таким образом $\lim\limits_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{i=1}^{N} B_i \otimes I = 0$ почти всюду в $R$. По лемме 3.6 $\lim\limits_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{i=1}^{N} B_i = 0$ почти всюду в $M$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *последовательность самосопряженных операторов из* $M$, *удовлетворяющая условию Розенблата с функцией* $\alpha(n)$, $\beta(n)=\sup\limits_{|i-j|>n}\|[X_i, X_j]\|_\infty$. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^d\alpha(n)=\lim\limits_{n\to\infty} n^d\beta(n)=0$ *при любом* $d=1, 2, \ldots$ ;

2) $\rho(X_n^2)\leqslant an^{\tau}$, *где* $a, \tau$ *постоянные*, $\tau<1$;

3) $\|X_n\|_\infty\leqslant bn^t$, *где* $b, t$ *постоянные.*

*Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{N} X_n=S'_N+S''_N$, *где* $\lim\limits_{N\to\infty} N^{-1}S'_N=\lim\limits_{N\to\infty} N^{-1}S''_N=0$ *почти всюду.*

Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность самосопряженных операторов, из $M$, удовлетворяющая условию (1) теоремы 3.4. Пусть далее $\rho(A_n)=0$, $n=1, 2, \ldots, c_n=\|A_n\|_\infty$, $B_N=\sum\limits_{n=1}^{N}\rho(A_n^2)$.

Теорема 3.5. *Если выполнены следующие условия*

1) $\alpha(n), \beta(n)\leqslant \exp(-n^{\varepsilon_1})$; (*см. обозначения теоремы* 3.4)

2) $c_N\leqslant c_1N^{\theta_1}$;

3) $B_N\geqslant N^{\varepsilon_2}$;

4) $c_N=0(B_N^{1/2}(\ln B_N)^{-1-\varepsilon_3})$;

*где* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_1, c_1>0$ *постоянные, то для каждого* $\varepsilon>0$ *сущест вует проектор* $E\in M$ *такой, что* $\rho(E)\geqslant 1-\varepsilon$, $\overline{\lim\limits_{N\to\infty}}(2B_N\ln\ln B_N)^{-1/2}\cdot\left\|\sum\limits_{n=1}^{N}A_nE\right\|_\infty\leqslant 1$.

Доказательство теоремы 3.5 опирается на теорему 3.4, леммы 3.1 —3.6, а также следующие результаты.

Пусть $W_1, W_2, \ldots, W_N$ самосопряженные операторы из $M, \rho(W_n)=0$, $n=1, 2, \ldots, N$. Положим $S_n=\sum\limits_{i=0}^{n} W_i, S_{t,n}=\sum\limits_{i=1}^{n} W_{t+i}$ где $1\leqslant t<N, n\leqslant N-t$. Пусть далее заданы числа $a>b>1$ и самосопряженные операторы $E_n\in M(S_n)$, где $n=1, 2, \ldots, N$, $E_{t,n}\in M(S_{t,n})$ $t=1, 2, \ldots, N-1, n\leqslant N-t$, $E_0\in M(S_N)$ такие, что

а) если $G_n$ носитель оператора $I-E_n, H_n=\{|S_n|\leqslant a\}$, то $G_n\leqslant H_n$,

в) если $G_{t,n}$ носитель оператора $I-E_{t,n}$, $H_{t,n}=\{|S_{t,n}|\leqslant b-1\}$, то $G_{t,n}\leqslant H_{t,n}$,

с) если $G_0$ носитель оператора $I-E_0, H_0=\{|S_N|\leqslant a-b\}$, то $G_0\leqslant H_0$.

Введем следующие обозначения:

$$F_n = I - E_n,\, D_n = F_1F_2 \dots F_{n-1}F_n^2F_{n-1} \dots F_1,\, L_n = S_n^2E_n^2 - a^2E_n^2,$$

$$P_n = (|L_n| - L_n)/2,\; n = 1,\; 2, \dots, N;\; L_{t,n} = S_{t,n}^2E_{t,n}^2 - d^2E_{t,n}^2,$$

$$P_{t,n} = (|L_{t,n}| - L_{t,n})/2, \quad \text{где } d = b - 1, t = 1, 2, \dots, N-1,\; n \leqslant N - t$$

$$L_0 = S_N^2E_0^2 - (a-b)^2 E_0^2;$$

$$\delta = \max_{t,s,m,n}(\|[E_{t,n}, E_{s,m}]\|_\infty, \|[E_{t,n}, E_m]\|_\infty, \|[E_{t,n}, E_0]\|_\infty, \|[E_m, E_n]\|_\infty, \|[E_m, E_0]\|_\infty),$$

$$\gamma = \max_{t,m,n}(\|[E_{t,n}, W_m]\|_\infty, \|[E_n, W_m]\|_\infty, \|[E_0, W_m]\|_\infty),$$

$$\chi = \max_{t,s,m,n}(\|[P_n, E_m]\|_\infty, \|[P_n, E_{t,m}]\|_\infty, \|[P_{t,n}, E_m]\|_\infty, \|[P_{t,n}, E_{s,m}]\|_\infty, \|[P_n, E_0]\|_\infty,$$

$$\|[P_{t,n}, E_0]\|_\infty),$$

$$\lambda = \max_{t,n}(\|E_n - E_n^2\|_2, \|E_{t,n} - E_{t,n}^2\|_2, \|E_0 - E_0^2\|_2),$$

$$\nu = \max_{t,n}(\|H_nE_n\|_2, \|H_{t,n}E_n\|_2, \|H_0E_0\|_2).$$

Будем предполагать также, что если $A \in M(W_1, W_2, \dots, W_{n-1})$, $B \in M(W_n, W_{n+1}, \dots, W_N)$, то $|\rho(AB) - \rho(A)\rho(B)| \leqslant \alpha\|A\|_\infty\|B\|_\infty$ где $\alpha > 0$ не зависит от $A, B, n$.

Пусть

$$b^2 \geqslant 2\sum_{i=1}^N \rho(W_i^2) \geqslant 16,$$

$$N^2c^2\alpha + (c^2N^2 + a^2)\nu \leqslant 1/18,$$

$$\sigma = (a-b)(4\delta d^2 + 4c^2N\delta + 4cN^2\gamma)^{1/2} + d(2(a-b)^2\delta + 2c^2N\delta + 4cN^2\gamma)^{1/2} +$$

$$+ (a-b)d(4\delta d^2 + 4c^2N^2\delta + 4cN^2\gamma)^{1/2}\cdot(2(a-b)^2\delta + 2c^2N^2\delta + 4cN^2\gamma)^{1/2},$$

$$\sigma_0 = (12cN^2\gamma + 6c^2N^2\delta + 2(a-b)^2\delta + 4d^2\delta + 2\chi + (c^2N^2 + a^2)\nu + \sigma)^{1/2}.$$

Лемма 3.7. *Пусть $D = D_N$. Тогда*

$$\rho(I - D) \leqslant 18\rho(E_0) + \hat{c}N^3(\alpha + \gamma + \delta + \lambda) + N\sigma_0$$

*где $\hat{c}$ постоянная, не зависящая от $W_1, W_2, \dots, W_N$.*

*Доказательство.* Имеем

$$\rho(I-D)=\rho((I-D)E_0)+\rho((I-D)F_0); \tag{1}$$

$$\begin{aligned}|\rho((I-D)E_0)| &\leqslant |\rho((I-D)E_0^2)|+\|E_0-E_0^2\|_2\leqslant \rho(E_0(I-D)E_0)+\\ &+\|[D,E_0]\|_\infty+\lambda\leqslant \rho(E_0^2)+2N\delta+\lambda\leqslant\rho(E_0)+2N\delta+\lambda.\end{aligned} \tag{2}$$

Положим $D_0=I$. Тогда

$$\rho((I-D)F_0)=\sum_{n=0}^{N}\rho((D_{n-1}-D_n)F_0). \tag{3}$$

Далее,

$$\begin{aligned}D_{n-1}-D_n&=F_1F_2\ldots F_{n-1}(2E_n-E_n^2)F_{n-1}\ldots F_2F_1=D_{n-1}(2E_n-E_n^2)+\\ &+F_1F_2\ldots F_{n-1}[(2E_n-E_n^2),\ F_{n-1}\ldots F_2F_1]=E_nD_{n-1}E_n+\\ &+[D_{n-1},E_n]E_n+2D_{n-1}(E_n-E_n^2).\end{aligned} \tag{4}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}|\rho((D_{n-1}-D_n)F_0)|&\leqslant|\rho(E_nD_{n-1}E_nF_0)|+\|[D_{n-1},E_n]\|_\infty+\\ &+2\|D_{n-1}(E_n-E_n^2)F_0\|_2\leqslant|\rho(E_nD_{n-1}E_nF_0)|+2N\delta+2\|[E_n-E_n^2,F_0]\|_\infty+\\ &+2\|D_{n-1}F_0(E_n-E_n^2)\|_2\leqslant\rho(E_nD_{n-1}E_nF_0)+2N\delta+c\delta+2\|E_n-E_n^2\|_2.\end{aligned} \tag{5}$$

Представим величину $\rho(E_nD_{n-1}E_nF_0)$ в следующем виде

$$\rho(E_nD_{n-1}E_nF_0)=\rho(E_nD_{n-1}E_nF_0E_{n,\,N-n})+\rho(E_nD_{n-1}E_nF_0F_{n,\,N-n}) \tag{6}$$

где $n=1,2,\ldots,N-1$. Имеем:

$$\begin{aligned}|\rho(E_nD_{n-1}E_nF_0E_{n,\,N-n})|&\leqslant|\rho(E_nD_{n-1}E_nF_0E_{n,\,N-n}^2)|+\\ &+\|E_{n,\,N-n}-E_{n,\,N-n}^2\|_2\leqslant|\rho(E_nE_{n,N-n}F_0E_{n,N-n}E_nD_{n-1})|+\|[D_{n+1},E_n]\|_\infty+\\ &+\|[D_{n-1},F_0]\|_\infty+2\|[D_{n-1},E_{n,N-n}]\|_\infty+2\|[E_n,E_{n,N-n}]\|_\infty+\|[E_n,F_0]\|_\infty+\lambda\leqslant\\ &\leqslant|\rho(E_nE_{n,\,N-n}F_0E_{n,\,N-n}E_nD_{n-1}^2)|+\|D_{n-1}-D_{n-1}^2\|_2+8N\delta+3\delta+\lambda;\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}|\rho(E_nE_{n,\,N-n}F_0E_{n,N-n}E_nD_{n-1}^2)|&\leqslant\rho(D_{n-1}E_nE_{n,N-n}F_0E_{n,N-n}E_nD_{n-1})+\\ &+\|[E_nE_{n,N-n}F_0E_{n,N-n}E_n,D_{n-1}]\|_\infty\leqslant\rho(D_{n-1}E_nE_{n,\,N-n}^2E_nD_{n-1})+12N\delta;\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\rho(D_{n-1}E_nE_{n,\,N-n}^2E_nD_{n-1})&\leqslant|\rho(E_{n,\,N-n}^2D_{n-1}E_n^2D_{n-1})|+2\|[E_n,E_{n,\,N-n}]\|_\infty+\\ &+2\|[D_{n-1},E_{n,\,N-n}]\|_\infty\leqslant|\rho(E_{n,\,N-n}^2D_{n-1}E_n^2D_{n-1})|+2\delta+4N\delta.\end{aligned} \tag{9}$$

Поскольку

$$D_{n-1}E_n^2D_{n-1} \in M(W_1, W_2, \ldots, W_n), \quad E_{n,N-n}^2 \in M(W_{n+1}, \ldots, W_N)$$

то

(10) $$|\rho(E_{n,N-n}^2 D_{n-1}E_n^2D_{n-1})| \leqslant \rho(E_{n,N-n}^2)\rho(D_{n-1}E_n^2D_{n-1}) + \alpha.$$

Далее

(11) $$\rho(S_{n,N-n}^2 E_{n,N-n}^2) = d^2\rho(E_{n,N-n}^2) + \rho(L_{n,N-n}) \geqslant d^2\rho(E_{n,N-n}^2) - \|P_{n,N-n}\|_2.$$

Следовательно,

$$\rho(E_{n,N-n}^2) \leqslant d^{-2}(\rho(S_{n,N-n}^2 E_{n,N-n}^2) + \|P_{n,N-n}\|_2) \leqslant d^{-2}(\rho(S_{n,N-n}^2) + \|P_{n,N-n}\|_2).$$

Так же как в доказательстве леммы 3.1, получим

$$\rho(S_{n,N-n}^2) \leqslant \sum_{i=n+1}^{N} \rho(W_i)^2 + N^2c^2\alpha, \ \|P_{n,N-n}\|_2 \leqslant (c^2N^2 + a^2)v$$

(см. доказательство неравенства (16), (30) леммы 3.1). Таким образом

(11′) $$\rho(E_{n,N-n}^2) \leqslant d^{-2}\left(\sum_{i=1}^{N} \rho(W_i^2) + N^2c^2\alpha + (c^2N^2 + a^2)v\right).$$

По условиям леммы $d = b - 1$, где $b^2 \geqslant 2\sum_{i=1}^{N} \rho(W_i^2) > 16$, $N^2c^2\alpha + (c^2N^2 + a^2)v \leqslant$ $\leqslant 1/18$. Тогда из (11)′ получим

(12) $$\rho(E_{n,N-n}^2) \leqslant (17/18).$$

Теперь оценим $\rho(D_{n-1}E_n^2D_{n-1})$. Имеем

(13) $$\rho(D_{n-1}E_n^2D_{n-1}) \leqslant \rho(E_nD_{n-1}^2E_n) + 4\|[E_n, D_{n-1}]\|_\infty \leqslant \rho(E_nD_{n-1}E_n) + 8N\delta.$$

Из (13) и (14) получим

(14) $$\begin{aligned}\rho(D_{n-1}E_n^2D_{n-1}) &\leqslant \rho(D_{n-1} - D_n) + \|[D_{n-1}, E_n]\|_\infty + 2\|E_n - E_n^2\|_2 + 8N\delta \leqslant \\ &\leqslant \rho(D_{n-1} - D_n) + 10N\delta + 2\lambda.\end{aligned}$$

Из (10), (12), (14) получим

(15) $$|\rho(E_{n,N-n}^2 D_{n-1}E_n^2D_{n-1})| \leqslant (17/18)\cdot\rho(D_{n-1} - D_n) + 10N\delta + 2\lambda + \alpha.$$

Наконец, из (7), (8), (9), (15) получим

(16) $$\begin{aligned}|\rho(E_nD_{n-1}E_nF_0E_{n,N-n})| &\leqslant (17/18)\rho(D_{n-1} - D_n) + \|D_{n-1} - D_{n-1}^2\|_2 + \\ &+ 34N\delta + 5\delta + \alpha + 2\lambda\end{aligned}$$

где $n = 1, 2, \ldots, N-1$.

Величину $|\rho(E_N D_{N-1} E_N F_0)|$ оценим следующим образом

(17) $|\rho(E_N D_{N-1} E_N F_0)| \leqslant \|E_N F_0\|_2 = \|E_N H_0 F_0\|_2 \leqslant \|E_N H_0\|_2 \leqslant \|E_N H_N\|_2 \leqslant \nu.$

Из (3), (5), (6), (16), (17) получим

$$|\rho((I-D)F_0)| \leqslant (17/18) \sum_{n=1}^{N} \rho(D_{n-1} - D_n) + \sum_{n=1}^{N-1} \|D_{n-1} - D_{n-1}^2\|_2 + \tag{18}$$
$$+ 36N^2\delta + 11N\delta + 3N\lambda + \alpha + \nu + \sum_{n=1}^{N} |\rho(E_n D_{n-1} E_n F_0 F_{n,N-n})|.$$

По лемме 3.1 $\|D_{n-1} - D_{n-1}^2\|_2 \leqslant 2N\lambda + 28N^2\delta$. Кроме того,

$$\rho(D_{N-1} - D_N) \geqslant \rho(E_N D_{N-1} E_N) - \|[D_{N-1}, E_N]\|_\infty - 2\|E_N - E_N^2\|_2 \geqslant -2N\delta - 2\lambda.$$

Таким образом (18) можно записать в следующем виде

$$|\rho((I-D)F_0)| \leqslant (17/18)\rho(I-D) + 2N^2\lambda + 28N^3\delta + 36N^2\delta + \tag{19}$$
$$+ 13N\delta + 3N\delta + 2\lambda + \alpha + \nu + \sum_{n=1}^{N} \|E_n F_0 F_{n,N-n}\|_2.$$

Если неравенства (19) и (2) поставить в (1), то получим

$$(1/18)\rho(I-D) \leqslant \rho(E_0) + 2N^2\lambda + 28N^3\delta + 36N^2\delta + 15N\delta + 3N\lambda + \tag{20}$$
$$+ 3\lambda + \nu + \alpha + \sum_{n=1}^{N} \|E_n F_0 F_{n,N-n}\|_2.$$

Для того, чтобы получить окончательную оценку для $\rho(I-D)$ нам нужно оценить величину $\|E_n F_0 F_{n,N-n}\|_2$, где $n = 1, 2, \ldots, N$. Имеем

$$\rho(S_n F_{n,N-n} F_0 E_n^2 F_0 F_{n,N-n} S_n) \geqslant$$
$$\geqslant \rho(F_{n,N-n} F_0 S_n^2 E_n^2 F_0 F_{n,N-n}) - 2\|S_n\|_\infty \|[S_n, F_{n,N-n}]\|_\infty - 2\|S_n\|_\infty \|[S_n F_0]\|_\infty \geqslant \tag{21}$$
$$\geqslant a^2 \rho(F_{n,N-n} F_0 E_n^2 F_0 F_{n,N-n}) + \rho(F_{n,N-n} F_0 L_n F_0 F_{n,N-n}) - 4cN^2\gamma \geqslant$$
$$\geqslant a^2 \rho(F_{n,N-n} F_0 E_n^2 F_0 F_{n,N-n}) - \rho(F_{n,N-n} F_0 P_n F_0 F_{n,N-n}) - 4cN^2\gamma;$$

$$\rho(F_{n,N+n} F_0 P_n F_0 F_{n,N-n}) \leqslant \|[P_n, F_0]\|_\infty + \|[P_n, F_{n,N-n}]\|_\infty + \tag{22}$$
$$+ |\rho(F_{n,N-n} F_0^2 F_{n,N-n} P_n)| \leqslant 2\chi + \|P_n\|_2.$$

Так же как в доказательстве леммы 3.1 получим

$$\|P_n\|_2 \leqslant (c^2N^2 + a^2 v). \tag{23}$$

Из (21), (22), (23) получим

$$\begin{aligned}\rho(S_n, F_{n,N-n}F_0E_n^2F_0F_{n,N-n}S_n) \geqslant a^2\rho(F_{n,N-n}F_0E_n^2F_0F_{n,N-n}) - 4cN^2\gamma - \\ - 2\chi - (c^2N^2 + a^2)v.\end{aligned} \tag{24}$$

Далее

$$\begin{aligned}\rho(S_NF_{n,N-n}F_0E_n^2F_0F_{n,N-n}S_N) \leqslant \rho(F_{n,N-n}E_nS_N^2F_0^2E_nF_{n,N-n}) + \\ + 2\|S_N\|_\infty^2\cdot\|[F_0, E_n]\|_\infty + 2\|S_N\|_\infty\|[S_N, F_{n,N-n}]\|_\infty + 2\|S_N\|_\infty\|[S_N, E_n]\|_\infty;\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\rho(F_{n,N-n}E_nS_N^2F_0^2E_nF_{n,N-n}) \leqslant (a-b)^2\rho(F_{n,N-n}E_nF_0^2E_nF_{n,N-n}) \leqslant \\ \leqslant (a-b)^2\rho(F_{n,N-n}F_0E_n^2F_0F_{n,N-n}) + 2(a-b)^2\|[F_n, F_0]\|_\infty.\end{aligned} \tag{26}$$

Из (25), (26), получим

$$\begin{aligned}\rho(S_NF_{n,N-n}F_0E_n^2F_0F_{n,N-n}S_N) \leqslant (a-b)^2\rho(F_{n,N-n}F_0E_n^2F_0F_{n,N-n}) + \\ + 2c^2N^2\delta + 4cN^2\gamma + 2(a-b)\delta.\end{aligned} \tag{27}$$

Точно также получим

$$\begin{aligned}\rho(S_{n,N-n}F_{n,N-n}F_0E_n^2F_0F_{n,N-n}S_{n,N-n}) \leqslant \\ \leqslant d^2\rho(F_{n,N-n}F_0E_n^2F_0F_{n,N-n}) + 4c^2N^2\delta + 4cN^2\gamma + 4d^2\delta.\end{aligned} \tag{28}$$

Кроме того

$$\begin{aligned}|\rho(S_NF_{n,N-n}F_0E_n^2F_0F_{n,N-n}S_{n,N-n})| \leqslant \\ \leqslant \rho(S_NF_{n,N-n}F_0E_n^2F_0F_{n,N-n}S_N)^{1/2}\cdot\rho(S_{n,N-n}F_{n,N-n}F_0E_n^2F_0F_{n,N-n}S_{n,N-n})^{1/2}.\end{aligned} \tag{29}$$

Положим $\zeta = \rho(F_{n,N-n}F_0E_n^2F_0F_{n,N-n})$. Тогда из (27), (28), (29) получим

$$\begin{aligned}|\rho(S_NF_{n,N-n}F_0E_n^2F_0F_{n,N-n}S_{n,N-n})| \leqslant \\ \leqslant ((a-b)^2\zeta + 2c^2N^2\delta + 4cN^2\gamma + 2(a-b)^2\delta)^{1/2}\cdot \\ \cdot(d^2\zeta + 4c^2N^2\delta + 4cN^2\gamma + 4d^2\delta)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant (a-b)d\zeta + \sigma,\end{aligned} \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned}\sigma = (a-b)(4\delta d^2 + 4c^2N^2\delta + 4cN^2\gamma)^{1/2} + d(2(a-b)^2\delta + 2c^2N^2\delta + 4cN^2\gamma)^{1/2} + \\ + (4\delta d^2 + 4c^2N^2\delta + 4cN^2\gamma)^{1/2}(2(a-b)^2 + 2c^2N^2\delta + 4cN^2\gamma)^{1/2}.\end{aligned} \tag{31}$$

Поскольку $S_n = S_N - S_{n,N-n}$, то из (24), (27), (28), (30) получим

$$a^2\zeta - (a-b)^2\zeta - d^2\zeta - 2(a-b)\zeta \leqslant 12cN^2\gamma + 6c^2N^2\delta + 2(a-b)^2\delta + \tag{32}$$
$$+ 4d^2\delta + 2\chi + (c^2N^2 + a^2)\nu + \sigma.$$

Поскольку $d = b - 1$, $a > b > 2$, то из (32) получим

$$\rho(F_{n,N-n}F_0E_n^2F_0F_{n,N-n}) \leqslant 12cN^2\gamma + 6c^2N^2\delta + 2(a-b)^2\delta + 4d^2\delta + \tag{33}$$
$$+ 2\chi + (c^2N^2 + a^2)\nu + \sigma.$$

Откуда $\|E_nF_0F_{n,N-n}\|_2 \leqslant \sigma_0$. Из (20) и (34) получим

$$\rho(I-D) \leqslant 18\rho(E_0) + \hat{c}N^3(\alpha + \gamma + \delta + \lambda) + N\sigma_0,$$

где $\hat{c}$ постоянная, не зависящая от $W_1, \ldots, W_N$. Лемма доказана.

Лемма 3.8. *Пусть $A$, $B$ самосопряженные операторы*, $\gamma = \|[A, B]\|_\infty$. *Тогда* $\|\exp(\mathrm{i}(A+B)) - \exp(\mathrm{i}A)\exp(\mathrm{i}B)\|_\infty \leqslant \gamma/2$.

*Доказательство.* Положим $a = \|A\|_\infty$, $b = \|B\|_\infty$. Имеем

$$\|[A^n, B]\|_\infty \leqslant \sum_{s=0}^{n-1} \|A^{n-s-1}[A, B]A^s\|_\infty \leqslant na^{n-1}\gamma.$$

Следовательно, для любого вещества $\lambda$ имеет место неравенство

$$\|[\exp(\mathrm{i}\lambda A), B]\|_\infty \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^n\|[A^n, B]\|_\infty/n! \leqslant |\lambda|\gamma \sum_{n-1}^{\infty} |\lambda|^{n-1}a^{n-1}/(n-1)! = \tag{1}$$
$$= |\lambda|\gamma \exp(|\lambda|a).$$

Точно также получим, что

$$\|[\exp(\mathrm{i}\lambda A), \exp(\mathrm{i}\mu B)]\|_\infty \leqslant |\lambda|\,|\mu|\gamma\exp(|\lambda|a + |\mu|b), \tag{2}$$

для любых вещественных $\lambda, \mu$.

По формуле Троттера-Ли [16] оператор $\exp(\mathrm{i}(A+B))$ есть сильный предел последовательности операторов

$$T_n = (\exp(\mathrm{i}n^{-1}A)\exp(\mathrm{i}n^{-1}B))^n \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Имеем

$$\| T_n - \exp(\mathrm{i}A)\exp(\mathrm{i}B)\|_\infty = \|(\exp(\mathrm{i}n^{-1}A)\exp(\mathrm{i}n^{-1}B))^n - (\exp(\mathrm{i}n^{-1}A))^n\cdot(\exp(\mathrm{i}n^{-1}B))^n\|_\infty \leqslant$$

$$(3) \qquad \leqslant \sum_{s=1}^{n-1} \|\exp(\mathrm{i}sn^{-1}A)\,[\exp(\mathrm{i}sn^{-1}B), \exp(\mathrm{i}n^{-1}A)]\cdot$$

$$\cdot(\exp(\mathrm{i}n^{-1}B)\cdot\exp(\mathrm{i}n^{-1}A))^{n-s-1}\cdot\exp(\mathrm{i}n^{-1}B)\|_\infty \leqslant \sum_{s=1}^{n-1} \|[\exp(\mathrm{i}n^{-1}A),\ \exp(\mathrm{i}n^{-1}sB)]\|_\infty;$$

$$\|[\exp(\mathrm{i}n^{-1}A), \exp(\mathrm{i}n^{-1}sB)]\|_\infty = \|[\exp(\mathrm{i}n^{-1}A),\ (\exp \mathrm{i}n^{-1}B)^s]\|_\infty \leqslant$$

$$(4) \qquad \leqslant s\|[\exp(\mathrm{i}n^{-1}A), \exp(\mathrm{i}n^{-1}B)]\|_\infty.$$

Из неравенства (2) для $\lambda = \mu = n^{-1}$, а также неравенства (3), (4) получим

$$\| T_n - \exp(\mathrm{i}A)\exp(\mathrm{i}B)\|_\infty \leqslant \sum_{s=1}^{n-1} n^{-2}s\gamma\exp(n^{-1}a + n^{-1}b) =$$

$$= n^{-2}(n(n-1)/2)\,\gamma\exp(n^{-1}a + n^{-1}b).$$

Поскольку

$$T_n - \exp(\mathrm{i}A)\exp(\mathrm{i}B) \to \exp(\mathrm{i}(A+B)) - \exp(\mathrm{i}A)\exp(\mathrm{i}B)$$

сильно, то

$$\|\exp(\mathrm{i}(A+B)) - \exp(\mathrm{i}A)\exp(\mathrm{i}B)\|_\infty \leqslant \overline{\lim}\|T_n - \exp(\mathrm{i}A)\exp(\mathrm{i}B)\|_\infty \leqslant \gamma/2.$$

ЛЕММА 3.9. *Пусть $A$, $B$ самосопряженные операторы из $M$, такие, что если $X \in (A)$, $Y \in M(B)$, то*

$$|\rho(XY) - \rho(X)\rho(Y)| \leqslant \alpha\|X\|_\infty\|Y\|_\infty,$$

*где $\alpha > 0$ постоянная, не зависящая от $X$, $Y$. Тогда*

$$|\rho(\exp(\mathrm{i}A)\exp(\mathrm{i}B)) - \rho(\exp(\mathrm{i}A))\,\rho(\exp(\mathrm{i}B))| \leqslant \alpha\min(1, \|A\|_\infty, \|B\|_\infty).$$

*Доказательство*. Пусть $h_1(s) = \rho(\exp(\mathrm{i}sA)\exp(\mathrm{i}B))$, где $-\infty < s < +\infty$. Тогда $h_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{i}s)^n\rho(A^n\exp(\mathrm{i}B))/n!$. Следовательно,

$$\mathrm{d}h_1/\mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{i}^n s^{n-1}\rho(A^n\exp(\mathrm{i}B))/(n-1)! = \mathrm{i}\rho(A\exp(\mathrm{i}sA)\exp(\mathrm{i}B)).$$

Аналогично, если $h_2(s) = \rho(\exp(\mathrm{i}sA))\,\rho(\exp(\mathrm{i}B))$, то $\mathrm{d}h_2/\mathrm{d}s = \mathrm{i}\rho(A\exp(\mathrm{i}sA))\cdot$ $\cdot\rho(\exp(\mathrm{i}B))$. Положим $h(s) = h_1(s) - h_2(s)$. Тогда

$$|\mathrm{d}h/\mathrm{d}s| = |\rho(A\exp(\mathrm{i}sA)\exp(\mathrm{i}B)) - \rho(A\exp(\mathrm{i}sA))\,\rho(\exp(\mathrm{i}B))| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha\,\|A\exp(\mathrm{i}sA)\|_\infty\,\|\exp(\mathrm{i}B)\|_\infty \leqslant \alpha\,\|A\|_\infty.$$

Следовательно,

$$|\rho(\exp(\mathrm{i}A)\exp(\mathrm{i}B)) - \rho(\exp(\mathrm{i}A))\,\rho(\exp(\mathrm{i}B))| = |h(1)| = |h(1) - h(0)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_s |\mathrm{d}h/\mathrm{d}s| \leqslant \alpha\cdot\|A\|_\infty.$$

Аналогично можно доказать, что

$$|\rho(\exp(\mathrm{i}A)\exp(\mathrm{i}B)) - \rho(\exp(\mathrm{i}A)\rho(\exp(\mathrm{i}B))| \leqslant \alpha\cdot\|B\|_\infty.$$

Кроме того, по условию леммы

$$|\rho(\exp(\mathrm{i}A)\exp(\mathrm{i}B)) - \rho(\exp(\mathrm{i}A))\,\rho(\exp(\mathrm{i}B))| \leqslant \alpha\,\|\exp(\mathrm{i}A)\|_\infty\|\exp(\mathrm{i}B)\|_\infty \leqslant \alpha.$$

Лемма доказана.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_N$ самосопряженные операторы из $M$ такие, что если $A \in M(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$, $B \in M(X_n, X_{n+1}, \ldots, X_N)$, то $|\rho(AB) - \rho(A)\rho(B)| \leqslant$ $\leqslant \alpha(n)\|A\|_\infty\|B\|_\infty$, где $\alpha(n)$ не зависит от $A, B$; $n = 1, 2, \ldots, N$. Пусть далее $\gamma(n) = \max\limits_{m\leqslant n}\|[X_m, X_n]\|_\infty$. Положим $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $f_n(t) = \rho(\exp(\mathrm{i}tS_n))$, $g_n(t) =$ $= \rho(\exp(\mathrm{i}tX_n))$, где $-\infty < t + \infty$, $n = 1, 2, \ldots, N$.

Лемма 3.10. *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_N$ удовлетворяют перечисленным выше требованиям. Тогда для любого $t$ имеет место неравенство*

$$\left|f_N(t) - \prod_{n=1}^{N} g_n(t)\right| \leqslant t\sum_{n=2}^{N}\alpha(n)\|X_n\|_\infty + t^2\sum_{n=2}^{N}\gamma(n)/2.$$

*Доказательство.* По лемме 3.8 имеем

$$\|\exp(\mathrm{i}tS_N) - \exp(\mathrm{i}tS_{N-1})\cdot\exp(\mathrm{i}tX_N)\|_\infty \leqslant t^2\|[S_{N-1}, X_N]\|_\infty/2.$$

Далее по лемме 3.9

$$|\rho(\exp(\mathrm{i}tS_{N-1}))\,\rho(\exp(\mathrm{i}tX_N)) - \rho(\exp(\mathrm{i}tS_{N-1})\exp(\mathrm{i}tX_N))| \leqslant t\alpha(N)\|X_N\|_\infty.$$

Следовательно,

$$|f_N(t) - f_{N-1}(t)\, g_N(t)| \leqslant \|\exp(\mathrm{i}tS_N) - \exp(\mathrm{i}tS_{N-1})\exp(\mathrm{i}tX_N)\|_\infty +$$

$$+ |g(\exp \mathrm{i}tS_{N-1})\, \rho(\exp(\mathrm{i}tX_N)) - \underset{\circ}{\rho}(\exp(\mathrm{i}tS_{N-1})\exp(\mathrm{i}tX_N))| \leqslant$$

$$\leqslant t^2\|[S_{N-1}, X_N]\|_\infty/2 + t\alpha(N)\|X_N\|_\infty \leqslant t^2(N-1)\,\gamma(N)/2 + t\alpha(N)\|X_N\|_\infty.$$

Точно также получим, что

$$|f_{N-1}(t) - f_{N-2}(t) g_{N-1}(t)| \leqslant t^2(N-2)\,\gamma(N-1)/2 + t\alpha(N-1)\|X_{N-1}\|_\infty, \ldots,$$

$$|f_2(t) - g_1(t)\, g_2(t)| \leqslant t^2\gamma(2)/2 + t\alpha(2)\|X_2\|_\infty.$$

Поскольку $|g_n(t)| \leqslant 1$ для всех $n$, то

$$\left|f_N(t) - \prod_{n=1}^{N} g_n(t)\right| \leqslant t\sum_{n=2}^{N}\alpha(n)\|X_n\|_\infty + t^2\cdot\sum_{n=2}^{N}\gamma(n)/2.$$

Лемма доказана.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_N$ те же, что в предыдущей лемме. Предположим, что $\rho(X_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots, N$ и не все $X_n$ равны нулю. Положим $B_N = \sum_{n=1}^{N}\rho(X_n^2)$, $L_N = B_N^{-3/2}\sum_{n=1}^{N}\rho(|X_n|^3)$, $c_n = \|X_n\|_\infty$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Пусть далее $\{P(\lambda) : -\infty < \lambda < +\infty\}$ разложение единицы, соответствующее оператору $B_N^{-1/2} S_N$ (см. обозначения предыдущей леммы), $F_N(\lambda) = \rho(P(\lambda))$ соответствующая функция распределения, $\Phi(\lambda)$ нормальное распределение с параметрами 0;1.

Лемма 3.11.

$$\sup_x |F_N(x) - \Phi(x)| \leqslant AL_N + B_N^{-1/2}\sum_{n=2}^{N} c_n\alpha(n)/2\pi L_N + B_N^{-1}\sum_{n=2}^{N}\gamma(n)/32\pi L_N^2,$$

*где $A > 0$ постоянная, не зависящая от $X_1, X_2, \ldots, X_N$.*

*Доказательство.* Пусть $k_N(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{i}t\lambda)\,\mathrm{d}F_N(\lambda)$ характеристическая функция распределения $F_N(\lambda)$. Тогда $k_N(t) = \rho(\exp(\mathrm{i}tB_N^{-1/2}S_N)$. Следовательно, по предыдущей лемме

$$\left|k_N(t) - \prod_{n=1}^{N} g_N(tB_N^{-1/2})\right| \leqslant B_N^{-1/2}t\sum_{n=2}^{N} c_n\alpha(n) + B_N^{-1}t^2\sum_{n=2}^{N}\gamma(n)/2, \tag{1}$$

где $g_n(x) = \rho(\exp(\mathrm{i}xX_n))$.

Пусть $\{Q_n(\lambda) : -\infty < \lambda < +\infty\}$ разложение единицы, соответствующее оператору $X_n$, $G_n(\lambda) = \rho(Q_n(\lambda))$ соответствующая функция распределения. Существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, на котором определены независимые случайные величины $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ такие, что распределение величины $Z_n$ совпадает с $G_n(\lambda)$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Тогда

$$\int_\Omega Z_n \mathrm{d}\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \mathrm{d}G_n(\lambda) = \rho(X_n) = 0,$$

$$\int_\Omega Z_n^2 \,\mathrm{d}\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \mathrm{d}G_n(\lambda) = \rho(X_n^2),$$

$$\int_\Omega |Z_n|^3 \,\mathrm{d}\mu = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^3 \mathrm{d}G_n(\lambda) = \rho(|X_n|^3).$$

По лемме 1, § 2 гл. V [13] для $|t| \leqslant 1/4L_N$ имеет место неравенство

$$\left| \prod_{n=1}^{N} k_n(B_N^{-1/2} t) - \exp(-t^2/2) \right| \leqslant 16 L_N t^3 \exp(-t^2/3) \tag{2}$$

где

$$h_n(x) = \int_\Omega \exp(\mathrm{i}xZ_n)\mathrm{d}\mu \equiv \rho(\exp(\mathrm{i}xX_n)) = g_n(x).$$

По теореме Эссена

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(X)| \leqslant (1/\pi) \int_{-T}^{T} |t^{-1}(k_N(t) - \exp(-t^2/2))| \mathrm{d}t + rc_0 T^{-1} \tag{3}$$

где $T > 0$ произвольное число, $r$ абсолютная постоянная, $c_0 = \max_x |\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}x| = 1/\sqrt{2\pi}$. Положим здесь $T = 1/4L_N$. Тогда из (1), (2), (3) получим

$$\sup_x |F_N(x) - \Phi(x)| \leqslant (16L_N/\pi) \int_{|t| \leqslant 1/4L_N} t^2 \exp(-t^2/3) \mathrm{d}t +$$
$$+ B_N^{-1/2} \sum_{n=2}^{N} c_n \alpha(n)/2\pi L_N + B_N^{-1} \sum_{n=1}^{N} \gamma(n)/32\pi L_N^2 + A_1 L_N,$$

где $A_1 > 0$ постоянная, не зависящая от $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Тем самым лемма доказана.

Лемма 3.12. *Пусть $\xi, \eta$ независимые случайные величины, $F(x)$ и $G(x)$ функции распределения величин $\xi$ и $\eta$ соответственно. Предположим, что $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ и функция распределения $F(x)$ имеет* *ограниченную плотность* $f(x)$, $c = \sup_x f(x)$. *Пусть* $\zeta = \xi \cdot \eta$ *и* $H(x)$ *функция распределения величины* $\zeta$. *Тогда* $H(x)$ *также имеет плотность* $h(x)$, *причем* $\sup_{x \geqslant a} h(x) \leqslant a^{-1} \cdot c$.

*Доказательство*. Пусть $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ произвольные положительные числа $\hat{\xi} = \xi + \varepsilon_1$, $\hat{\eta} = \eta + \hat{\varepsilon}_2$, $\hat{\zeta} = \hat{\xi} \cdot \hat{\eta}$, $\theta = \ln \hat{\xi}$, $\lambda = \ln \hat{\eta}$, $\mu = \ln \hat{\zeta}$, $T(x)$, $L(x)$, $M(x)$ функции распределения величин $\theta, \lambda, \mu$ соответственно. Тогда $T(x) = \hat{F}(\exp x)$, $L(x) = \hat{G}(\exp x)$, $M(x) = \hat{H}(\exp x)$, где $\hat{F}, \hat{G}, \hat{H}$ функции распределения величин $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ соответственно. Поскольку $\theta$, $\lambda$ независимы и $\mu = \theta + \lambda$, то $M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} T(x-y)\,\mathrm{d}L(y)$. Следовательно,

$$\hat{H}(x) = M(\ln x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x \exp(-y))\,\mathrm{d}L(y) =$$

$$= \int_0^{\infty} \hat{F}(xz^{-1})\,\mathrm{d}\hat{G}(z) = \int_0^{1+\varepsilon_2} \hat{F}(xz^{-1})\,\mathrm{d}\hat{G}(z).$$

Поскольку $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ были взяты произвольно, то переходя в последнем равенстве к пределу сначала при $\varepsilon_1 \to 0$, а затем $\varepsilon_2 \to 0$ получим

$$H(x) = \int_0^1 F(xz^{-1})\,\mathrm{d}G(z) \tag{1}$$

для всех $x$ получим за исключением быть может некоторого счетного множества. Поскольку в левой и правой части равенства (1) стоят функции распределения, то равенство (1) справедливо для всех $x$. Пусть $0 < a \leqslant x < 1$. Тогда

$$H(x) = \int_0^1 F(xz^{-1})\,\mathrm{d}G(z) = \int_a^1 \left[ \int_0^{xz^{-1}} f(y)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}G(z) =$$

$$= \int_0^1 \left[ \int_0^x f(yz^{-1})\,z^{-1}\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}G(z) = \int_0^x \left[ \int_a^1 f(yz^{-1})\,z^{-1}\,\mathrm{d}G(z) \right] \mathrm{d}y.$$

Отсюда следует, что распределение $H(x)$ имеет плотность $h(y) = \int_y^1 f(yz^{-1})z^{-1}\,\mathrm{d}G(z)$, где $0 < y < 1$, $h(y) = 0$ для $|y| \geqslant 1$. Кроме того, $\sup_{y \geqslant a} h(y) \leqslant a^{-1}c$. Лемма доказана.

Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ вероятностное пространство, $A(\omega)$ случайная величина, заданная на $\Omega$, $0 \leqslant A(\omega) \leqslant 1$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Пусть далее

$F(\lambda)$ функция распределения величины $A(\omega)$, $0 < \varepsilon < 1$. Положим $V = (|A - \varepsilon| + (A - \varepsilon))/2$, $H = I - \exp(-qV)$, $E = \{A \geqslant \varepsilon\}$.

Лемма 3.13. (1) $0 \leqslant H(\omega) \leqslant 1$ *для всех* $\omega \in \Omega$; $H(\omega) = 0$ *для* $\omega \in \Omega \setminus E$,

(2) *если функция распределения* $F(\lambda)$ *имеет плотность* $f(\lambda)$, *причем* $\sup\limits_{\lambda \geqslant \varepsilon} f(\lambda) = c < +\infty$, *то*

$$\|\chi_E - H\|_2 \leqslant \exp(-q\eta) + (c\eta)^{1/2}$$

*для любого* $\eta > 0$, *где* $\chi_E$ *характеристическая функция множества* $E$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3.3.

*Доказательство теоремы* 3.5. Пусть вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, распределения $G_n(x)$, последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ независимых случайных величин на $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, алгебра фон Неймана $R$ и состояние $\zeta$ на $R$ определены так же как в доказательстве теоремы 3.4. Можно считать также, что на $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ определены последовательность $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ случайных величин такая, что

а) величины $\{X_n, Y_m : n, m = 1, 2, \ldots\}$ независимы;

б) величина $Y_n$ имеет распределение с плотностью $h_n(x) = 2n\cdot(nx - x + 1)$ для $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1$, $h_n(x) = 0$ для $x < 1 - \dfrac{1}{n}$, $h_n(x) = 0$ для $x > 1$.

Положим $W_n = A_n \otimes I + I \otimes X_n$, $n = 1, 2, \ldots$; $V_N = \sum\limits_{n=1}^{n} W_n$; $Z_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \zeta(W_n^2)$, $z_n = \|W_n\|_\infty$. Отметим некоторые свойства последовательности $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$. По лемме 3.4 имеем

$$|\zeta(AB) - \zeta(A)\zeta(B)| \leqslant \alpha(n)\|A\|_\infty \|B\|_\infty, \tag{1}$$

для любых $A \in R(W_1, W_2, \ldots, W_{n-1})$, $B \in R(W_n, W_{n+1}, \ldots, \ldots)$. Далее

$$z_n \leqslant c_1 n^{\theta_1}, \tag{2}$$

где $c_1, \theta_1 > 0$ постоянные, $n = 1, 2, \ldots$.

Кроме того

$$\zeta(W_n) = 0; \tag{3}$$

$$\zeta(W_n^2) = \rho(A_n^2) + \int_\Omega X_n^2 d\mu = \rho(A_n^2) + 1/3n^2. \tag{4}$$

Следовательно,

(5) $$Z_N \sim B_N,$$

(6) $$Z_n \leqslant c_n + n^{-1} = 0(Z_n^{1/2}(\ln Z_n)^{-1-\varepsilon_3}).$$

Поскольку $\lim\limits_{N\to\infty} Z_n = +\infty$, $1 \leqslant Z_{N+1}/Z_N \leqslant 1 + Z_N^{-1}Z_n^2$ то из (6) следует, что $\lim\limits_{N\to\infty} Z_{N+1}/Z_N = 1$. Положим $\tau_m = (\ln m)^{-1}$, $m = 1, 2, \ldots$. Существует возрастающая последовательность $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ натуральных чисел такая, что $p_m \geqslant m$, $Z_{N+1}/Z_N \leqslant 1 + \tau_m$ если только $N \geqslant 2^{p_m}$, $m = 1, 2, \ldots$. Пусть $N_1 = 2^{p_1}$ и $k_0$ наименьшее целое такое, что $Z_{N_1} \leqslant (1 + \tau_1)^{k_0+1}$. Построим последовательность$\{n_k\}_{k=k_0}^{\infty}$ следующим образом. Положим $n_{k_0} = N_1$. Тогда $(1 + \tau_1)^{k_0} < Z_{n_{k_0}} \leqslant (1 + \tau_1)^{k_0+1}$. Можно считать, что $k_0 < 2^{p_2}$. Определим $n_{k_0+1}$ как наименьшее целое такое, что $(1 + \tau_1)^{k_0+1} < Z_{n_{k_0+1}}$. Поскольку $Z_{n_{k_0+1}-1} \geqslant (1 + \tau_1)^{-1}Z_{n_{k_0+1}}$, то $Z_{n_{k_0+1}} \leqslant (1+\tau_1)^{k_0+2}$, т.е. $(1+\tau_1)^{k_0+1} < Z_{n_{k_0+1}} \leqslant (1 + \tau_1)^{k_0+2}$. Пусть $k_0 \leqslant k < 2^{p_2}$ и $n_k$ уже определено, так, что $(1 + \tau_1)^k < Z_{n_k} \leqslant (1 + \tau_1)^{k+1}$. Определим $n_{k+1}$ как наименьшее целое такое, что $(1+\tau_1)^{k+1} < Z_{n_{k+1}}$. Тогда опять $(1 + \tau_1)^{k+1} < Z_{n_{k+1}} \leqslant (1 + \tau_1)^{k+2}$. Таким образом мы построили $n_k$ для $k_0 \leqslant k \leqslant 2^{p_2}$. Положим $k_1 = 2^{p_1}$. Определим $n_{k_1+1}$ как наименьшее целое такое, что $(1 + \tau_1)^{k_1}(1 + \tau_2) < Z_{n_{k_1+1}}$. Поскольку

$$Z_{n_{k_1+1}-1} \geqslant (1 + \tau_2)^{-1}Z_{n_{k_1+1}},$$

то

$$Z_{n_{k_1+1}} \leqslant (1 + \tau_1)^{k_1}(1 + \tau_2)^2$$

т. е.

$$(1 + \tau_1)^{k_1}(1 + \tau_2) < Z_{n_{k_1+1}} \leqslant (1 + \tau_1)^{k_1}(1 + \tau_2)^2.$$

Пусть $k_1 < k < 2^{p_3}$ и число $n_k$ уже определено так, что

$$(1 + \tau_1)^{k_1}(1 + \tau_2)^{k-k_1} < Z_{n_k} < (1 + \tau_1)^{k_1}(1 + \tau_2)^{k-k_1+1}.$$

Оределим $n_{k+1}$ как наименьшее целое такое, что $(1+\tau_1)^k(1+\tau_2)^{k-k_1+1} < Z_{n_{k+1}}$. Тогда $(1+ \tau_1)^k(1 + \tau_2)^{k-k_1+1} < Z_{n_{k+1}} \leqslant (1 + \tau_1)^{k_1}(1 + \tau_2)^{k-k_1+2}$. Таким образом мы построили $n_k$ для $k_0 \leqslant k \leqslant 2^{p_3}$, и т.д.. В результате мы получим последовательность $\{n_k\}_{n=k_0}^{\infty}$, которая обладает следующим свойством: если

$$k_m = 2^{p_{m+1}}, k_m \leqslant k \leqslant k_{m+1},$$

то

(7) $$(1 + \tau_1)^{\hat{k}_1} (1 + \tau_2)^{\hat{k}_2} \ldots (1 + \tau_m)^{\hat{k}_m}(1 + \tau_{m+1})^{k-k_m} < Z_{n_k} \leqslant$$
$$\leqslant (1 + \tau_1)^{\hat{k}_1} (1 + \tau_2)^{\hat{k}_2} \ldots (1+ \tau_m)^{\hat{k}_m} (1 + \tau_{m+1})^{k-k_m+1},$$

где $\hat{k}_1 = k_1; \hat{k}_2 = k_2 - k_1, \ldots, \hat{k}_m = k_m - k_{m-1}$.

Поскольку $Z_N \sim B_N$, то из условий теоремы следует, что число $n_k$ при любом $k$ не превосходит наименьшее целое $q$, которое удовлетворяет неравенству

$$(8) \qquad (1+\tau_1)^{\hat{k}_1}(1+\tau_2)^{\hat{k}_2}\dots(1+\tau_m)^{\hat{k}_m}(1+\tau_{m+1})^{k-k_m} < q^{\varepsilon_2},$$

где $k_m \leqslant k \leqslant k_{m+1}$. Перепишем неравенство (8) в следующем виде

$$(9) \qquad \varepsilon_2^{-1}\sum_{i=1}^{m}\hat{k}_i \ln(1+\tau_i) + \varepsilon_2^{-1}(k-k_m)\ln(1+\tau_m) \leqslant \ln q.$$

Поскольку $\ln(1+\tau_i) \leqslant \tau_i \leqslant 1$, то число $n_k$ не превосходит наименьшее целое $q$, которое удовлетворяет неравенству

$$(10) \qquad \varepsilon_2^{-1}\sum_{i=1}^{m}\hat{k}_i + \varepsilon_2^{-1}(k-k_m) \leqslant \ln q.$$

Имеем $\sum_{i=1}^{m}\hat{k}_i = k_m$. Следовательно (10) можно переписать в виде $\varepsilon_2^{-1}k \leqslant \ln q$. Таким образом $n_k \leqslant \exp(k\varepsilon_2^{-1}) + 1$.

Положим $r_k = [n_k^{\frac{\varepsilon_2}{4(1+\theta_1)}}]$, $N_k = n_k - r_k$, где $[\cdot]$ целая часть числа, $k = k_0, \ k_0+1, \dots$ . Для $r_k \leqslant t \leqslant n_k$ и $n \leqslant n_k - t$ положим $S_{k,t,n} = \sum_{i=1}^{n} W_{t+i}$. Из неравенства (2) имеем

$$(11) \qquad \|W_j\|_\infty \leqslant c_1 n_k^{\theta_1},$$

где $r_k \leqslant j \leqslant n_k$;

$$(12) \qquad \|S_{k,t,n}\|_\infty \leqslant c_2 n_k^{\theta_2},$$

где $c_2, \theta_2 > 0$ постоянные.

Пусть $k_m \leqslant k \leqslant k_{m+1}$; положим $\varepsilon_k = (\ln m)^{-1}$. Положим

$$b_k^2 = \sum_{i=1}^{N_k}\zeta(W_{r_k+i}^2),\ a_k = (1+\varepsilon_k)(2b_k^2 \ln\ln b_k^2)^{1/2},\ d_k = b_k - 1,$$

$$\hat{a}_k = a_k/2c_2 n_k^{\theta_2},\ b_k = \hat{b}_k/2c_2 n_k^{\theta_2},\ \hat{d}_k = d_k/2c_2 n_k^{\theta_2}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\hat{S}_{k,t,n} = S_{k,t,n}/2c_2 n_k^{\theta_2},\ H_{k,t,n} = \{|S_{k,t,n}| \leqslant d_k\} = \{|\hat{S}_{k,t,n}| \leqslant \hat{d}_k\}$$

$$U_{k,t,n} = (|d_k^2 - \hat{S}_{k,t,n}^2| + (d_k^2 - \hat{S}_{k,t,n}^2))/2,\ E_{k,t,n} = \exp(-p_k U_{k,t,n})$$

где $p_k = n_k^d$, $d > 0$ целое, независящее от $k$, которое будет выбрано позже;

$$S_{k,n} = S_{k,0,n},\ S_k = S_{k,Nk},\ \hat{S}_{k,n} = S_{k,n}/2c_2n_k^{\theta_2},\ \hat{S}_k = S_k/2c_2n_k^{\theta_2},$$

$$H_{k,n} = \{|S_{k,n}| \leqslant a_k\} = \{|\hat{S}_{k,n}| \leqslant \hat{a}_k\},\ U_{k,n} = (|\hat{a}_k^2 - \hat{S}_{k,n}^2| + (a_k^2 - \hat{S}_{k,n}^2))/2,$$

$$E_{k,n} = \exp(-p_kU_{k,n}),\ H_k = \{|S_k| \leqslant (a_k - b_k)\} = \{|\hat{S}_k| \leqslant (\hat{a}_k - \hat{b}_k)\},$$

$$U_k = (|(\hat{a}_k - \hat{b}_k)^2 - \hat{S}_k^2| + ((\hat{a}_k + \hat{b}_k)^2 - \hat{S}_k^2))/2,\ E_k = \exp(-p_kU_k),$$

$$F_{k,t,n} = I - E_{k,t,n},\ F_{k,n} = I - E_{k,n},\ F_k = I - E_k,$$

$$D_{k,n} = F_{k,1}F_{k,2}\ \dots\ F_{k,n-1}F_{k,n}^2F_{k,n-1}\ \dots\ F_{k,2}F_{k,1},\ D_k = D_{k,N_k},$$

$$L_{k,t,n} = S_{k,t,n}^2E_{k,t,n}^2 - d_k^2E_k^2,\ P_{k,t,n} = (|L_{k,t,n}| - L_{k,t,n})/2,$$

$$L_{k,n} = S_{k,n}^2E_{k,n}^2 - a_k^2E_{k,n}^2,\ P_{k,n} = (|L_{k,n}| - L_{k,n})/2,$$

$$L_k = S_k^2E_k^2 - (a_k - b_k)^2E_k^2,\ P_k = (|L_k| - L_k)/2,$$

$$\delta_k = \max_{t,s,m,n} (\|[E_{k,t,n}, E_{k,s,m}]\|_\infty, \|[E_{k,t,n}, E_{k,m}]\|_\infty, \|[E_{k,t,n}, E_k]\|_\infty,$$

$$\|[E_{k,n}, E_{k,m}]\|_\infty,\ \|[E_{k,n}, E_k]\|_\infty);$$

$$\gamma_k = \max_{t,\ n,\ i} (\|[E_{k,t,n}, W_{r_{k+i}}]\|_\infty, \|[E_{k,n}, W_{r_{k+1}}]\|_\infty, \|[E_k, W_{r_{k+i}}]\|_\infty);$$

$$\chi_k = \max_{t,s,m,n} (\|[E_{k,t,n}, P_{k,s,m}]\|_\infty, \|[E_{k,n}, P_{k,s,m}]\|_\infty, \|[E_k, P_{k,s,m}]\|_\infty, \|[E_{k,t,n}, P_{k,m}]\|_\infty,$$

$$\|[E_{k,n}, P_{k,m}]\|_\infty, \|[E_k, P_{k,m}]\|_\infty, \|[E_{k,t,n}, P_k]\|_\infty, \|[E_{k,n}, P_k]\|_\infty, \|[E_k, P_k]\|_\infty),$$

$$\lambda_k = \max_{t,n} (\|E_{k,t,n} - E_{k,t,n}^2\|_2, \|E_{k,n} - E_{k,n}^2\|_2, \|E_k - E_k^2\|_2),$$

$$\nu_k = \max_{t,n} (\|E_{k,t,n}\cdot H_{k,t,n}\|_2,\ \|E_{k,n}\cdot H_{k,n}\|_2,\ \|E_k\cdot H_k\|_2),\ c^{(k)} = \max_{1\leqslant i\leqslant N_k} \|W_{r_{k+i}}\|_\infty.$$

Так же как при доказательстве теоремы 3.4, выбирая $d$ достаточно большим, получим

(13) $$\|[E_{k,n}, E_{l,m}]\|_\infty \leqslant c_3p_l^{-1},$$

где $c_3 > 0$ постоянная, $l \geqslant k$,

(14) $$\delta_k \leqslant c_4p_k^{-1},\ \gamma_k \leqslant c_5p_k^{-1},\ \chi_k \leqslant c_6p_k^{-1/4},\ \lambda_k \leqslant c_7p_k^{-1/2},\ \nu_k \leqslant c_8p_k^{-1/2}$$

где $c_4, c_5, c_6, c_7, c_8 > 0$ постоянные. Кроме того из (1) имеем

$$|\zeta(AB) - \zeta(A)\zeta(B)| \leqslant \alpha_k \|A\|_\infty \|B\|_\infty, \tag{15}$$

где $A \in R(W_{r_k+1}, \ldots, W_{r_k+n-1})$, $B \in R(W_{r_k+n}, \ldots, W_{n_k})$, $\alpha_k = \alpha(r_k)$.

По построению $E_{k,n} \in R(S_{k,n})$, $E_{k,t,n} \in R(S_{k,t,n})$, $E_k \in R(S_k)$. Кроме того, выполнены условия а), в), с) леммы 3.7 (см. лемму 3.7). Далее имеем

$$b_k^2 = Z_{n_k} - Z_{r_k} \geqslant Z_{n_k} - \sum_{j=1}^{r_k} \|W_j\|_\infty^2 \geqslant Z_{n_k} - c_1 r_k^{2\theta_1+1} \geqslant n_k^{\varepsilon_2} - c_1 n_k^{\frac{\varepsilon_2}{4}}.$$

Следовательно,

$$b_k \sim Z_{n_k}. \tag{16}$$

В частности, $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = +\infty$. Далее

$$c^{(k)} \leqslant c_2 n_k^{\theta_2}, \; a_k \leqslant 2b_k^2 \leqslant 2\sum_{j=1}^{n_k} \|W_j\|_\infty^2 \leqslant 2c_1 n_k^{2\theta_1+1}.$$

Следовательно, из (14) и условий теоремы получим

$$\lim_{k\to\infty} (N_k^2 c^{(k)^2} \alpha_k + (c^{(k)^2} N_k^2 + a_k^2)\nu_k) = 0$$

если только $d$ достаточно велико.

Таким образом выполнены все условия леммы 3.7. Следовательно,

$$\zeta(I - D_k) \leqslant 18\zeta(E_k) + c_9 N_k^3(\alpha_k + \gamma_k + \delta_k + \lambda_k) + N_k\delta_k \tag{17}$$

где

$$\sigma_k = (12c^{(k)^2} N_k^2 \gamma_k + 6c^{(k)^2} N_k^2 \delta_k + 2(a_k - b_k)^2 \delta_k + 4d_k^2 \delta_k + 2\chi_k + \\ + (c^{(k)^2} N_k^2 + a_k^2)\nu_k + \hat{\sigma}_k)^{1/2}; \tag{18}$$

$$\hat{\sigma}_k = \sigma_k' + \sigma_k'' + \sigma_k'\sigma_k'',$$

$$\sigma_k' = (a_k - b_k)(4\delta_k d_k^2 + 4c^{(k)^2} N_k \delta_k + 4c^{(k)^2} N_k^2 \gamma_k)^{1/2}, \tag{19}$$

$$\sigma_k'' = d_k(2(a_k - b_k)^2 + 2c^{(k)^2} N_k \delta_k + 4c^{(k)^2} N_k^2 \gamma_k),$$

$c_9 > 0$ постоянная.

Проверим, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \zeta(E_k) < +\infty$. Имеем

$$\zeta(E_k) \leqslant 1 - \zeta(H_k) + \|E_k H_k\|_2 \leqslant 1 - \zeta(H_k) + \lambda_k. \tag{20}$$

Пусть $\Phi_k(x)$ функция распределения оператора $b_k^{-1}S_k$. Тогда

$$(21) \qquad 1-\zeta(H_k)=\Phi_k(-b_k^{-1}(a_k-b_k))+1-\Phi_k(b_k^{-1}(a_k-b_k)).$$

Положим $l_k=b_k^{-3}\sum_{i=1}^{N_k}\zeta(|W_{r_{k+i}}|^3)$. Тогда по лемме 3.11

$$(22) \qquad \sup_x|\Phi_k(x)-\Phi(x)|\leqslant c_{10}(l_k+b_k^{-1}l_k^{-1}\alpha_kN_kc^{(k)}+b_k^{-1}l_k^{-1}\beta_kN_kc^{(k)})$$

где $\beta_k=\beta(r_k)$, $c_{10}>0$ постоянная, $\Phi(x)$ нормальное распределение с параметрами 0;1. Имеем $\zeta(W_j^2)\leqslant\zeta(|W_j|^3)^{2/3}$, $\zeta(|W_j|^3)\leqslant c^{(k)}\zeta(W_j^2)$, где $r_k\leqslant j\leqslant n_k$. Следовательно, $b_k^{-1}\leqslant l_k\leqslant c^{(k)}b_k^{-1}$. Поскольку $l_k^{-1}\leqslant b_k\leqslant n_k^{2\theta_1+1}$, то

$$\lim_{k\to\infty}l_k^{-1}\alpha_kN_kc^{(k)}=\lim_{k\to\infty}l_k^{-1}\beta_kN_kc^{(k)}=0.$$

Тогда из (22) получим

$$(23) \qquad \sup_x|\Phi_k(x)-\Phi(x)|\leqslant c_{11}l_k\leqslant c_{11}c^{(k)}b_k^{-1}$$

где $c_{11}>0$ постоянная.

Поскольку $c^{(k)}=\max_{1\leqslant i\leqslant N_k}Z_{r_{k+i}}$, то из неравенства (6) имеем

$$(24) \qquad c^{(k)}=0(Z_{n_k}^{1/2}(\ln Z_{n_k})^{-1-\varepsilon_3}).$$

Используя соотношения (16), (23), (24) получим

$$(25) \qquad \sup_x|\Phi_k(x)-\Phi(x)|\leqslant c_{12}(\ln b_k)^{-1-\varepsilon_3},$$

где $c_{12}>0$ постоянная. В силу асимптотической эквивалентности $1-\Phi(x)\sim(x\sqrt{2\pi})^{-1}\exp(-x^2/2)$ при $x\to\infty$, имеем

$$(26) \qquad \begin{aligned}1-\Phi(b_k^{-1}(a_k-b_k))&\sim 2(1+\varepsilon_k)(\pi\ln\ln b_k)^{-\frac{1}{2}}(\ln b_k)^{-(1+\varepsilon_k)^2}\leqslant\\&\leqslant(\ln b_k)^{-(1+\varepsilon_k)}\end{aligned}$$

если $k$ достаточно велико. Поскольку $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$ то из (25), (26) имеем

$$(27) \qquad 1-\Phi_k(b_k^{-1}(a_k-b_k))\leqslant c_{13}(\ln b_k)^{-(1+\varepsilon_k)}$$

где $c_{13}>0$ постоянная.

Пусть $k_m \leqslant k \leqslant k_{m+1}$. Поскольку $b_k \sim Z_{n_k}$, то для достаточно больших $k$ имеем

$$(\ln b_k)^{-(1+\varepsilon_k)} \leqslant 2(\ln Z_{n_k})^{-(1+\varepsilon_k)} \leqslant$$

$$\leqslant 2(\ln(1+\tau_1)^{\hat{k}_1}(1+\tau_2)^{\hat{k}_2}\dots(1+\tau_m)^{\hat{k}_m}(1+\tau_{m+1})^{k-k_m})^{-(1+(\ln m)^{-1})} \leqslant \tag{28}$$

$$\leqslant 2(\ln(1+\tau_{m+1})^k)^{-(1+(\ln m)^{-1})}.$$

Поскольку $\ln(1+x) \geqslant x/2$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$, то из (28) имеем

$$\sum_k (\ln b_k)^{-(1+\varepsilon_k)} = 2\sum_m \sum_{k=k_m+1}^{k_{m+1}} (k\ln(1+\tau_{m+1}))^{-(1+(\ln m)^{-1})} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_m \tau_{m+1}^{-2} \sum_{k=k_m+1}^{\infty} k^{-(1+(\ln m)^{-1})} \leqslant 2\sum_m (\ln m)^3 k_m^{-(\ln m)^{-1}}. \tag{29}$$

Поскольку $k_m = 2^{p_m} > 2^m$, то из (29) имеем

$$\sum (\ln b_k)^{-(1+\varepsilon_k)} \leqslant 2\sum_m (\ln m)^3 2^{-m(\ln m)^{-1}} < +\infty. \tag{30}$$

Таким образом

$$\sum_k 1 - \Phi_k(b_k^{-1}(a_k - b_k)) < +\infty. \tag{31}$$

Аналогично можно проверить, что

$$\sum_k \Phi_k(-b_k^{-1}(a_k - b_k)) < +\infty. \tag{31$'$}$$

Из (21), (31), (31)$'$ следует, что

$$\sum_k 1 - \zeta(H_k) < \infty. \tag{32}$$

Наконец, из (20), (14), (32) следует, что

$$\sum_k \zeta(E_k) < +\infty, \tag{33}$$

а из (17), (18), (19), (14), (33) следует, что

$$\sum_k \zeta(I - D_k) < +\infty. \tag{34}$$

По лемме 3.1 имеем

(35) $$\|S_{k,n}D_kS_{k,n}\|_\infty \leqslant a_k^2 + 2c^{(k)}N_k^2\delta_k,$$

(36) $$\|D_k - D_k^2\|_2 \leqslant 2N_k\lambda_k + 28N_k^2\delta_k.$$

Пусть $k \leqslant l$. Тогда так же как в доказательстве теоремы 3.4 получим

(37) $$\|[D_k, D_l]\|_\infty \leqslant c_{14}p_l^{-1/2}$$

где $c_{14} > 0$ постоянная.

Далее, так же как в доказательстве теоремы 3.4, используя (34), (35), (36), (37) построим операторы $V(k)$, которые обладают следующими свойствами:

(i) $0 \leqslant V(k) \leqslant I$;

(ii) $\|S_{l,n}(V(k)S_{l,n}\|_\infty \leqslant a_l^2 + 2c^{(l)}N_l^2\delta_l + c_{15}\| S_{l,n}\|_\infty^2 p_l^{-1/2}$,

где $l \geqslant k$. $1 \leqslant n \leqslant N_l$, $c_{15} > 0$ постоянная;

(iii) $\lim\limits_{k\to\infty} \zeta(V(k)) = 1$.

Если число $d$ выбрать достаточно большим, то $\|S_{l,n}\|_\infty^2 p_l^{-1/2} \leqslant p_l^{-1/4}$. Кроме того, из (14) $\lim\limits_{l\to\infty} c^{(l)}N_l\delta_l = 0$ если только $d$ достаточно велико. Поэтому (ii) можно переписать в следующем виде:

$$\|S_{l,n}V(k)S_{l,n}\|_\infty \leqslant a_l^2(1 + \theta_l)^2,$$

где $l \geqslant k$, $1 \leqslant n \leqslant N_l$, $\lim\limits_{l\to\infty} \theta_l = 0$. Наконец, из соотношения (iii) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|I - V(k)\|_2 = 0$.

Пусть $U(k) = V(k)T_k$, где $T_k = I \otimes Y_k^2$. Отметим, что по построению $\lim\limits_{k\to\infty} \zeta(T_k) = 1$. Поскольку операторы $T_k$ коммутируют со всеми операторами из $R$, $0 \leqslant T_k \leqslant I$, то операторы $U(k)$ обладают следующими свойствами:

(i)′ $0 \leqslant U(k) \leqslant I$;

(ii) $\|S_{l,n}U(k)S_{l,n}\|_\infty \leqslant a_l^2(1 + \theta_l)^2$, где $l \geqslant k$, $1 \leqslant n \leqslant N_l$;

(iii)′ $\|I - U(k)\|_2 \to 0$ при $k \to \infty$ (последнее соотношение следует из неравенства

$$\|I - U(k)\|_2 \leqslant \|I - V(k)\|_2 + \|I - T_k\|_2 \leqslant 1 - \zeta(V(k)) + 1 - \zeta(T_k)).$$

Пусть $l \geqslant k$.По лемме 3.2 имеем

(38) $$\|[E_{k,n}, W_{l,m}]\|_\infty \leqslant p_k\|[U_{k,n}, W_{l,m}]\|_\infty \leqslant p_kc_{16}(q^{-1}c^{(l)} + q\|[\hat{S}_{k,n}^2, W_{l,m}]\|_\infty),$$

где $c_{16} > 0$ постоянная, $q > 0$ произвольное целое. Далее

$$\|[\hat{S}^2_{k,n}, W_{l,m}]\|_\infty \leqslant 2\|[\hat{S}_{k,n}, W_{l,m}]\|_\infty \leqslant 2n_k c^{(l)}\beta_l \leqslant c_{17} n_l^{\theta_3}\beta_l,$$

где $c_{17}, \theta_3 > 0$ постоянные, $\beta_l = \beta(r_l)$. Поскольку

$$\lim_{l\to\infty} \beta_l n_l^s = 0 \tag{39}$$

для любого $s$, то $\|[S^2_{k,n}, W_{l,m}]\|_\infty \leqslant \beta_l^{3/4}$ если только $k$ достаточно велико. Полагая в (38) $q = [\beta_l^{-1/4}]\cdot c^{(l)} p_k$, где $[\cdot]$ целая часть числа, и используя (39), получим $\|[E_{k,n}, W_{l,m}]\|_\infty \leqslant c_{18}\beta_l^{1/4}$ если только $k$ достаточно велико; здесь $c_{18} > 0$ постоянная. Отсюда получим $\|[D_k, S_{l,m}]\|_\infty \leqslant 2c_{18} n_k n_l \beta_l^{1/4} \leqslant \beta_k^{1/5}$ если $k$ достаточно велико, $l \geqslant k$. Точно также $\|[D_k, S_{l,m}]\|_\infty \leqslant \beta_k^{1/5}$ для $k > l$, если $l$ достаточно велико. Следовательно, для $k \leqslant l$ имеем

$$\|[V(k,p), S_{l,n}]\|_\infty \leqslant 2(l-k)\beta_l^{1/5} + 2\sum_{i=0}^{\infty} \beta_{l+i}^{1/5}$$

где

$$V(k,p) = D_k D_{k+1} \ldots D_{k+p-1} D^2_{k+p} D_{k+p-1} \ldots D_k.$$

Поскольку $\beta(n) \leqslant \exp(-n^{\varepsilon_1})$, то

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta_{l+i} \leqslant c_{19} r_l^{1-\varepsilon_1} \exp(-r_l^{\varepsilon_1}) \leqslant \exp(-r_l^{\bar{\varepsilon}_1}),$$

где $c_{19}, \varepsilon_1 > \bar{\varepsilon}_1 > 0$, постоянные, $k$ достаточно велико. Следовательно, $\|[V(k,p), \mathbf{S}_{l,n}]\|_\infty \leqslant c_{20}\bar{\beta}_l$ где $c_{20} > 0$ постоянная, $\hat{\beta}_l = \exp(-r_l^{\bar{\varepsilon}_1})$, $p$ произвольное целое. Тогда

$$\|[V(k), S_{l,n}]\|_\infty \leqslant c_{20}\hat{\beta}_l, \quad \|[U(k), S_{l,n}]\|_\infty \leqslant c_{20}\hat{\beta}_2, \qquad l \geqslant k. \tag{40}$$

Аналогично можно доказать, что

$$\|[U(k), U(l)]\|_\infty \leqslant c_{20}\hat{\beta}_l, \qquad l \geqslant k. \tag{41}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Положим $\mu_n = \varepsilon 2^{-(n+1)}$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ . Положим $U^0(k) = U(k)$. Существует $k_0$ такое, что $\|I - U^0(k_0)\|_2 < \mu_0^2/4$. Поскольку распределение величины $Y_{k_0}$ имеет плотность $h_{k_0}(x)$ причем $\sup_x h_{k_0}(x) \leqslant 2k_0$, то используя лемму 3.12, а также построения, аналогичные приведенным в доказательстве теоремы 3.4, получим, что распределение оператора $U^0(k_0)$ в состоянии $\zeta$ имеет плотность $\hat{h}_{k_0}(x)$, причем

$$\sup_{x\geqslant\mu_0}\hat{h}_{k_0}(x)\leqslant 2\mu_0^{-1}k_0.$$

Положим

$$\hat{U}^0(k_0)=(|U^0(k_0)-\mu_0|+U^0(k_0)-\mu_0)/2,$$

$$E^0=\{U^0(k_0)\geqslant 1-\mu^0\},\ q_0=32\mu_1^{-5}\cdot k_0,$$

$$H_0=I-\exp(-q_0\hat{U}_0(k_0)).$$

По лемме 3.13 $0\leqslant H_0\leqslant E^0$, $\|E^0-H_0\|_2\leqslant\exp(-q_0\eta)+2k_0\mu_0^{-1}\eta$ для любого $\eta>0$. Положим здесь $\eta=\mu_1^3/8k_0$. Тогда получим

$$\|E^0-H_0\|_2\leqslant\exp(-4\mu_1^{-2})+\mu_1^2/4\leqslant\mu_1^2/2. \tag{42}$$

По лемме 3.2 имеем:

$$\|[H_0,S_{l,n}]\|_\infty\leqslant q_0\|[\hat{U}^0(k_0),S_{l,n}]\|_\infty\leqslant q_0c_{16}(q^{-1}\|S_{l,n}\|_\infty+q\|[U^0(k_0),S_{l,n}]\|_\infty)$$

где $l\geqslant k_0$, $q>0$ произвольное целое. Полагая здесь $q=[\hat{\beta}_l^{-\frac{1}{4}}\|S_{l,n}\|_\infty]$, где $[\cdot]$ целая часть числа, и используя (40), получим

$$\|[H_0,S_{l,n}]\|_\infty\leqslant c_{k_0}\hat{\beta}_l^{\frac{1}{4}}, \tag{43}$$

где $c_{k_0}>0$ постоянная, зависящая от $k_0$. Аналогично можно доказать, что

$$\|[H_0,U(l)]\|_\infty\leqslant c_{k_0}\hat{\beta}_l^{1/4}. \tag{44}$$

Из (40)—(44) имеем

$$\|[H_0U(k)H_0,S_{l,n}]\|_\infty\leqslant c'_{k_0}\hat{\beta}_l^{1/4},$$

$$\|[H_0U(k)H_0,U(l)]\|_\infty\leqslant c'_{k_0}\hat{\beta}^{1/4},$$

где $l\geqslant k\geqslant k_0$, $c'_{k_0}$ постоянная, зависящая от $k_0$. Кроме того, из (ii)$'$, (43) имеем

$$\|U(k)^{1/2}H_0S_{l,n}\|_\infty\leqslant a_l(1+\theta_l)+\|[H_0,S_{l,n}]\|_\infty\leqslant a_l(1+\theta_l^{(1)}),$$

где $k_0\leqslant k\leqslant l$, $\lim\limits_{l\to\infty}\theta_l^{(1)}=0$.

Положим $U^{(1)}(k) = H_0 U(k) H_0$. Тогда

a$_1$) $0 \leqslant U^{(1)}(k) \leqslant H_0^2 \leqslant E^{(0)}$;

b$_1$) $\|S_{l,n} U^{(1)}(k) S_{l,n}\|_\infty \leqslant a_l^2 (1 + \theta_l^{(1)})^2$ где $k_0 \leqslant k \leqslant l$;

c$_1$) $\|H_0^2 - U^{(1)}(k)\|_2 \leqslant \|[H_0, U(k)]\|_\infty + \|I - U(k)\|_\infty \to 0$ при $k \to \infty$;

d$_1$) $\|[U^{(1)}(k), S_{l,n}]\|_\infty \leqslant c(k_0)\beta_l^{1/4}$, где $k_0 \leqslant k \leqslant l$, $c(k_0)$ — постоянная;

e$_1$) $\|[U'(k), U(l)]\|_\infty \leqslant c(k_0)\beta_l^{1/4}$ где $k_0 \leqslant k \leqslant l$;

f$_1$) $\|E_0^{(0)} - H_0\|_2 \leqslant \mu_1^2/4$.

Существует $k_1$ такое, что $\|H_0^2 - U^1(k_1)\|_2 \leqslant \mu_1^2/4$. По оператору $U^1(k_1)$ и числам $\mu_1$, $\mu_2$ построим $E^{(1)}, H_1$ таким же образом, как $E^0$, $H_0$ были построены по $U^0(k_0), \mu_0, \mu_1$. Положим $U^2(k) = H_1 U(k) H_1$. Тогда

a$_2$) $0 \leqslant U^{(2)}(k) \leqslant H_1^2 \leqslant U_1^{(1)}(k) \leqslant H_0^2 \leqslant E^{(0)}, E^{(1)} \leqslant E^{(0)}, H_1^2 \leqslant E^{(1)}$;

b$_2$) $\|S_{l,n} U^{(2)}(k) S_{l,n}\|_\infty \leqslant a_l^2 (1 + \theta_l^{(2)})^2$, где $k_1 \leqslant k \leqslant l$, $\lim\limits_{l\to\infty} \theta_l^{(2)} = 0$;

c$_2$) $\|H_1^2 - U^{(2)}(k)\|_2 \to 0$ при $k \to \infty$;

d$_2$) $\|[U^2(k), U(l)]\|_\infty \leqslant c(k_1)\beta_l^{1/16}$, где $k_1 \leqslant k \leqslant l$, $c(k_1) > 0$ постоянная;

e$_2$) $\|[U^1(k), U(l)]\|_\infty \leqslant c(k_1)\beta_l^{1/16}$, где $k_1 \leqslant k \leqslant l$;

f$_2$) $\|E^{(1)} - H_1\|_2 \leqslant \mu_2^2/4$,

и т. д. . Таким образом по индукции мы можем построить последовательность $\{E^{(m)}\}$, $\{H_m\}$ такую, что если $U^{(m+1)}(k) = H_m U(k) H_m$ то имеют место свойства a$_{m+1}$), b$_{m+1}$), c$_{m+1}$), d$_{m+1}$), e$_{m+1}$), f$_{m+1}$) аналогичные приведенным выше для $m = 0, 1$. Кроме того, по построению

$$\|H_m^2 - U^{(m+1)}(k_{m+1})\|_2 \leqslant \mu_{m+1}^2/4;$$

$$E^{(0)} \geqslant E^{(1)} \geqslant \cdots \geqslant E^{(m)} \geqslant E^{(m+1)} \geqslant \cdots; E^{(m)} \leqslant (1 - \mu_m)^{-1} U^m(k_m),$$

$$I - E^{(m)} = \{U^{(m)}(k_m) \leqslant 1 - \mu_m\}.$$

Имеем

$$\zeta(U^{(m+1)})(k_{m+1})) \geqslant \zeta(H_m^2) - \|H_m^2 - U^{(m+1)}(k_{m+1})\|_2 \geqslant \zeta(E^{(m)}) -$$

$$- 2\|E^{(m)} - H_m\|_2 - \mu_{m+1}^2/4 \geqslant \zeta(E^{(m)}) - 3\mu_{m+1}^2/4.$$

С другой стороны

$$\zeta(U^{(m+1)}(k_{m+1})) \leqslant \zeta(E^{(m+1)}) + (1 - \mu_m)\zeta(E^{(m)} - E^{(m+1)})$$

(в последнем соотношении использовано неравенство $U^{m+1}(k_{m+1}) \leqslant E^{(m)}$). Следовательно,

$$\zeta(E^{m+1}) \geqslant \zeta(E^{(m)}) - 3\mu_{m+1}/4.$$

Положим $E(\varepsilon) = \lim\limits_{m\to\infty} E^{(m)}$, где предел берется в смысле сильной сходимости. Поскольку $\zeta(E^{(m)}) \geqslant I - 3/4 \sum\limits_{i=0}^{m} \mu_i > 1 - \varepsilon$, то $\zeta(E) \geqslant 1 - \varepsilon$. Пусть задано $c > 1$. Подберем $m_0$ так, чтобы $(1 - \mu_{m_0})^{-1} < c^{1/4}$. Поскольку $\lim\limits_{l\to\infty} \theta_l^{(m_0)} = 0$, то существует $l_0$ такое, что $(1 + \theta_l^{m_0})^2 < c^{1/4}$ для $l \geqslant l_0$. Тогда

$$\| S_{l,n}E(\varepsilon)S_{l,n}\|_\infty \leqslant \| S_{l,n}E^{(m_0)}S_{l,n}\|_\infty \leqslant (1 - \mu_{m_0})^{-1}a_l^2(1 + \theta_l^{m_0})^2 \leqslant c^{1/2}a_l^2$$

для всех достаточно больших $l$. Далее

$$a_l \leqslant (1 + \varepsilon_l)\cdot(2Z_{n_l} \ln\ln Z_{n_l})^{1/2}.$$

Поскольку $\lim \varepsilon_l = 0$, $\lim\limits_{N\to\infty} Z_N B_N^{-1} = 1$ для всех достаточно больших $l$ имеем $a_l^2 \leqslant c^{1/2}(2Z_{n_l} \ln\ln Z_{n_l})$. Следовательно,

$$\| S_{l,n}E(\varepsilon)S_{l,n}\|_\infty \leqslant c(2B_{n_l}\ln\ln B_{n_l}),$$

или

$$\| S_{l,n}E(\varepsilon)\|_\infty \leqslant (2cB_{n_l}\ln\ln B_{n_l})^{1/2},$$

для всех $l \geqslant l(c)$, $1 \leqslant n \leqslant N_l$.

Пусть $N$ произвольное натуральное. Подберем $l$ так, чтобы $n_l < N \leqslant n_{l+1}$. Положим $n = N - r_{l+1}$ и представим сумму $V_N$ в следующем виде $V_N = \sum\limits_{i=1}^{r_{l+1}} W_i + S_{l+1,n}$. Пусть задано $c > 1$ и $N$ настолько велико, что $l > l(c)$. Имеем

$$\left\| \sum_{i=1}^{2l+1} W_i \right\|_\infty \leqslant c_1 r_{l+1}^{\theta_1+1} < c_1 n_{l+1}^{\varepsilon_2/4};\ B_{n_{l+1}} \geqslant n_{l+1}^{\varepsilon_2}.$$

Следовательно,

$$\| V_N E(\varepsilon)\|_\infty \leqslant c_1 B_{n_{l+1}}^{1/4} + (2cB_{n_{l+1}}\ln\ln B_{n_{l+1}})^{1/2} \leqslant (1 + \varkappa_l)\cdot(2cB_{n_{l+1}}\ln\ln B_{n_{l+1}})^{1/2}, \tag{45}$$

где $\lim\limits_{l\to\infty} \varkappa_l = 0$.

Пусть $k_m \leqslant l < k_{m+1}$, где $k_m = 2^{p_m}$ (см. доказательство настоящей теоремы). Тогда

$$B_{n_{l+1}} \sim Z_{n_{l+1}} \leqslant (1 + \tau)^{\hat{k}_1} \ldots (1 + \tau_m)^{\hat{k}_m}(1 + \tau_{m+1})^{k-k_m+1},$$

$$B_{n_l} \sim Z_{n_l} \geqslant (1 + \tau_1)^{\hat{k}_1}\ldots (1 + \tau_m)^{\hat{k}_m}(1 + \tau_{m+1})^{l-k_m}.$$

Поскольку $\lim\limits_{m\to\infty} \tau_m = 0$, то отсюда следует, что $\lim\limits_{l\to\infty} B_{n_{l+1}}/B_{n_l} = 1$.

Если $n_l \leqslant N < n_{l+1}$, то $B_{n_l} \leqslant B_N \leqslant B_{n_{l+1}}$. Тогда из (45) получим

$$\| V_N E(\varepsilon)) \|_\infty \leqslant (1 + \hat{\varkappa}_l)(2cB_N \ln\ln B_N)^{1/2}, \tag{46}$$

где $N \geqslant N(c)$, $\lim\limits_{l\to\infty} \hat{\varkappa}_l = 0$.

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(\omega)$ сходится для почти всех $\omega$, то существует измеримое подмножество $\Lambda \subset \Omega$ и постоянная $\tau > 0$ такие, что $\mu(\Lambda) > 1 - \varepsilon$ для каждого $\omega \in \Lambda$, $\left| \sum\limits_{i=1}^{n} X_i(\omega) \right| \leqslant \tau$ где $n = 1, 2, \ldots$ . Проектор $E(\varepsilon) \in R$ представляет собой измеримую $M$-значную функцию $\omega \to E(\omega)$, где $E(\omega)$ проектор из $M$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Поскольку $V_N = \sum\limits_{n=1}^{N} A_n \otimes I + \sum\limits_{n=1}^{N} I \otimes X_n$, то из неравенства (46) следует, что

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} A_n E(\omega) + \sum_{n=1}^{N} X_n(\omega) E(\omega) \right\|_\infty \leqslant (1 + \hat{\varkappa}_l)(2cB_N \ln\ln B_N)^{1/2},$$

где $N \geqslant N(c)$, $n_l < N \leqslant n_{l+1}$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Далее $\zeta(E(\varepsilon)) = \int_\Omega \rho(E(\omega)) \mathrm{d}\mu(\omega)$. Поскольку $\zeta(E(\varepsilon)) > 1 - \varepsilon$, $\mu(\Lambda) > 1 - \varepsilon$, то $\rho(E(\omega)) \geqslant 1 - 2\varepsilon$ для $\omega \in \Lambda_1 \subset \Lambda$, $\mu(\Lambda_1) > 0$. Следовательно, существует $\omega_0 \in \Lambda_1$ такое, что

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} A_n E(\omega_0) + \sum_{n=1}^{N} X_n(\omega_0) E(\omega_0) \right\|_\infty \leqslant (1 + \varkappa_l)(2cB_N \ln\ln B_N),$$

для всех $N \geqslant N(c)$, причем $c$ может пробегать значения $1 + m^{-1}$ где $m = 1, 2, \ldots$ . Тогда

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} A_n E(\omega_0) \right\|_\infty \leqslant \tau + (1 + \hat{\varkappa}_l)(2cB_N \ln\ln B_N)^{1/2}$$

для $N \geqslant N(c)$.

Пусть $E = E(\omega_0)$. Поскольку $\tau$ в последнем соотношении постоянно, то

$$\lim_{N\to\infty} (2B_N \ln\ln B_N)^{-1/2} \left\| \sum_{n=1}^{N} A_n E \right\|_\infty \leqslant c,$$

где $c = 1 + m^{-1}$, $m = 1, 2, \ldots$ . Кроме того $\rho(E) \geqslant 1 - 2\varepsilon$. Теорема доказана.

Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ стационарная в узком смысле последовательность самосопряженных операторов из $M$, удовлетворяющая условию Розенблата с функцией $\alpha(n)$. Пусть далее

$$\beta(n) = \sup_{|i-j| \geqslant n} \|[X_i, X_j]\|_\infty, \ \rho(X_n) = 0, \ \rho(X_n^2) = 1, \ n = 1, 2, \ldots .$$

Используя доказательство центральной предельной теоремы для некоммутативного стационарного случайного процесса [1], [2], а также теорему 3.5, можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.6. *Пусть последовательность* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет перечисленным выше требованиям. Пусть далее* $S_N = \sum_{n=1}^{N} X_n$. *Если выполнены следующие условия*

1) $\alpha(n),\ \beta(n) \leqslant \exp(-n^{\varepsilon_1})$, *где* $\varepsilon_1 > 0$ *постоянная*;

2) $\sup_n \| X_n \|_{\infty} < +\infty$;

то $S_N = S'_N + S''_N$, *где* $\lim_{N\to\infty} (2N \ln\ln N)^{-1/2} S''_N = 0$ *почти всюду и для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует проектор* $E \in M$ *такой, что* $\rho(E) \geqslant 1 - \varepsilon$, $\overline{\lim_{N\to\infty}} (2N \ln\ln N)^{-1/2} \| S'_N E \|_{\infty} \leqslant 1$.

*Если кроме того, состояние* $\rho$ *является следом, то для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует проектор* $E \in M$ *такой, что* $\rho(E) \geqslant 1 - \varepsilon$, $\overline{\lim_{N\to\infty}} (2N \ln\ln N)^{-1/2} \times \times \| S'_N E \|_{\infty} \leqslant 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В теоремах 3.4, 3.5 мы накладывали ограничения на величины $\|[X_n, X_m]\|_{\infty}$, $n, m = 1, 2, \dots$ . Если состояние $\rho$ является следом, то вместо этого, наложив такие же ограничения на величины $\|[X_n, X_m]\|_2$ и изменив соответствующим образом все доказательства, можно проверить, что результаты теорем 3.4, 3.5 останутся справедливыми. Кроме того, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.7. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *стационарная (см. [2]) последовательность самосопряженных операторов из* $M$, *удовлетворяющая условию Розенблата с функцией* $\alpha(n)$. *Пусть далее*

$$\beta(n) = \sup_{|i-j| \geqslant n} \|[X_i, X_j]\|_2,\ \rho(X_n) = 0,\ \rho(X_n^2) = 1,\ n = 1, 2, \dots .$$

*Положим* $S_N = \sum_{n=1}^{N} X_n$. *Если выполнены следующие условия*

1) $\alpha(n),\ \beta(n) \leqslant \exp(-n^{\varepsilon_1})$, *где* $\varepsilon_1 > 0$, *постоянная*,

2) $\sup \| X_n \|_{\infty} < +\infty$,

*то существует последовательность проекторов* $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *в* $M$ *и возрастающая последовательность целых чисел* $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такие, что* $\lim \sup P_k = I$; $\lim N_k = +\infty$; *для каждого* $c < 1$ *имеют место неравенства* $P_k S_{N_k} P_k \geqslant \geqslant c(2N_k \ln\ln N_k)^{1/2} P_k$ *если только* $k \geqslant k(c)$.

Доказательство теоремы 3.7 может быть получено из леммы 3.1 — 3.13, доказательства теоремы 3.5, а также следующей леммы.

ЛЕММА 3.14. *Пусть* $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ *последовательность проекторов из* $M$ *такая, что для любых* $A \in M(R_1, R_2, \ldots, R_{n-1})$, $B \in M(R_n, R_{n+1}, \ldots)$ *имеет место неравенство* $|\rho(AB) - \rho(A)\rho(B)| \leqslant \alpha(n)\|A\|_\infty\|B\|_\infty$ *где* $\alpha(n)$ *не зависит от* $A, B$; $n = 1, 2, \ldots,$ *причем* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha(n) < +\infty$. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho(R_n) = +\infty$ *и* $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ *последовательность проекторов из* $M$ *такая, что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|T_n - R_n\|_1 < +\infty$, *то* $\limsup T_n = I$ (*здесь* $\|S\|_1 = \rho(|S|)$ *для* $S \in M$ [17]).

*Доказательство.* Положим

$$G_n = I - \sup_{i \geqslant n} T_i,\quad \Pi_{m,n} = R^\perp_{m+n}R^\perp_{m+n-1} \ldots R^\perp_n R^\perp_{n+1} \ldots R^\perp_{n+m},$$

$$Q_{m,n} = T^\perp_{m+n}T^\perp_{m+n-1} \ldots T^\perp_n T^\perp_{n+1} T^\perp_{m+n},$$

где $R_i^\perp = I - R_i$, $T_i^\perp = I - T_i$. Тогда $Q_{m,n} \geqslant G_n$. С другой стороны

$$\rho(\Pi_{m,n}) \leqslant \rho(R^\perp_{m,n})\rho(\Pi_{m-1,n}) + \alpha(m+n).$$

Следовательно,

$$\rho(\Pi_{m,n}) \leqslant \prod_{i=1}^{m} \rho(R^\perp_{n+i}) + \sum_{i=n+1}^{n+m} \alpha(i).$$

Поскольку $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho(R_n) = +\infty$ то $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \rho(R^\perp_{n+i}) = 0$ для любого $n$. Следовательно,

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \rho(\Pi_{m,n}) \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha(i).$$

Далее

$$\|Q_{m,n} - \Pi_{m,n}\|_1 \leqslant 2\sum_{i=n}^{n+m} \|R_i - T_i\|_1.$$

Следовательно

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \rho(Q_{m,n}) \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha(i) + 2\sum_{i=n}^{\infty} \|R_i - T_i\|_1.$$

Поскольку $G_n \leqslant Q_{m,n}$ для всех $n$, то

$$\rho(G_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \alpha(i) + 2\sum_{i=n}^{\infty} \|R_i - T_i\|_1.$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty} \rho(G_n) = 0$. Кроме того, $\rho(G_1) \leqslant \rho(G_2) \leqslant \ldots \leqslant \rho(G_n) \leqslant \ldots$. Следовательно, $\rho(G_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, т. е. $\limsup T_n = I$. Лемма доказана.

Остановимся в заключение, коротко на последовательностях, удовлетворяющих $\| \|_2$ или же $\| \|_\infty$ — условию асимптотического коммутирования.

Леммы 3.15 и 3.16 показывают, что всякая такая последовательность в определенном смысле близка к некоторой последовательности коммутирующих операторов. Это обстоятельство позволяет получить для таких последовательностей ряд результатов, относящихся к усиленному закону больших чисел, закону повторного логарифма, а также центральной предельной теореме. Здесь мы приведем (без доказательства) один наиболее простой из этих результатов (теорема 3.8).

Пусть $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ последовательность операторов из $M$, удовлетворяющая следующему условию: для каждого $n = 1, 2, \ldots$ существует $\beta(n)$ такое, что $\|[A, B]\|_\infty \leqslant \beta(n)\|A\|_\infty\|B\|_\infty$, для любых $A \in M(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1})$, $B \in M(A_n, A_{n+1}, \ldots)$

Лемма 3.15. *Пусть последовательность $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ обладает указанным свойствам. Тогда существует последовательность $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ операторов из $M$, которая обладает следующими свойствами*:

1) $B_n \in M(A_1, A_2, \ldots, A_n)$; $n = 1, 2, \ldots$,

2) $B_nB_m = B_mB_n$; $n, m = 1, 2, \ldots$,

3) $\|A_n - B_n\|_\infty \leqslant \beta(n)\|A_n\|_\infty$.

*Если операторы $A_n$ кроме того являются самосопряженными, то операторы $B_n$ также можно выбрать самосопряженными.*

*Доказательство.* Положим $B_1 = A_1$. Пусть операторы $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ уже построены так, что выполнены свойства 1), 2), 3). Поскольку $M(B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}) \subset M(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1})$, то для любого унитарного оператора $U \in M(B_1, B_2, \ldots, B_{n-1})$ имеет неравенство $\|[U, A_n]\|_\infty \leqslant \beta(n)\|A_n\|_\infty$. Пусть $K$ множество всевозможных операторов вида $\sum_i \lambda_i U_i^* A_n U_i$, где $U_i$ унитарные операторы из $M(B_1, B_2, \ldots, B_{n-1})$, $\lambda_i$ положительные числа $\sum \lambda_i = 1$. Множество $K$ является выпуклым и ограниченным по норме. Пусть $\overline{K}$ слабое замыкание $K$. Тогда $\overline{K}$ является выпуклым слабо компактным подмножеством в $M$. Кроме того каждый унитарный оператор $U$ из $M(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1})$ определяет аффинное слабо непрерывное отображение $\overline{K}$ в $\overline{K}$, которое переводит оператор $T \in \overline{K}$ в оператор $U^*TU$.

Поскольку алгебра $M(B_1, B_2, \ldots, B_{n-1})$ коммутативна, то по теореме Маркова-Какутани существует оператор $B_n \in \overline{K}$ такой, что $U^*B_nU = B_n$

для любого унитарного оператора $U \in M(B_1, \ldots, B_{n-1})$. По построению $K \subset M(B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}, A_n) \subset M(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. В частности, $B_n \in M(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Кроме того, поскольку $M(B_1, B_2, \ldots, B_{n-1})$ порождается своими унитарными операторами, то $B_m B_n = B_n B_m$ для всех $m = 1, 2, \ldots, n-1$.

Далее, для любых унитарных операторов $U_1, U_2, \ldots, U_m \in M(B_1, B_2, \ldots$ $\ldots, B_{n-1})_m$ и положительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ таких, что $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ имеем

$$\left\| A_n - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i U_i^* A_n U_i \right\|_\infty \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \| [A_n, U_i] \|_\infty \leqslant \beta(n) \|A_n\|_\infty \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = \beta(n) \|A_n\|_\infty.$$

Следовательно, $\|A_n - T\|_\infty \leqslant \beta(n)\|A_n\|_\infty$ для любого $T \in \overline{K}$. В частности, $\|A_n - B_n\|_\infty \leqslant \beta(n)\|A_n\|_\infty$. Таким образом оператор $B_n$ обладает всеми требуемыми свойствами. Лемма доказана.

Точно также можно доказать, что если для любого $n$ существует $\beta(n)$ такое, что $\|[A, B]\|_2 \leqslant \beta(n)\|A\|_\infty \|B\|_\infty$ для любых $A \in M(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1})$, $B \in M(A_n, A_{n+1}, \ldots)$ то справедлива следующая лемма

ЛЕММА 3.16. *Существует последовательность $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ операторов из $M$, которая обладает свойствами* 1), 2) *леммы, а также свойством*

3′) $$\|A_n - B_n\|_2 \leqslant \beta(n)\|A_n\|_\infty, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

*Если операторы $A_n$, кроме того, являются самосопряженными, то операторы $B_n$ также можно выбрать самосопряженными.*

ТЕОРЕМА 3.8. *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ последовательность операторов из $M$, удовлетворяющая условию Розенблата с функцией $\alpha(n)$ и $\|\cdot\|_2$ — условию асимптотического коммутирования с функцией $n(\alpha)$. Если выполнены следующие условия*:

1) $\sup \|X_n\| < +\infty$;
2) $\alpha(n) \leqslant n^{-\varepsilon}$, *где $\varepsilon > 0$ постоянная*;
3) $\lim_{n\to\infty} n^d \beta(n) = 0, \quad d = 1, 2, \ldots,$

*то* $\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{n=1}^{N} (X_n - \rho(X_n)I) = 0$ *почти всюду.*

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Аншелевич, В. В., Центральная предельная теорема в некоммутативной теории вероятностей, *ДАН СССР*, **208** (1973), 1265—1267.
2. Аншелевич, В. В., Состояния Кубо-Мартина-Швингера и некоторые вопросы некоммутативной теории вероятностей, диссертация, 1973.
3. Araki, H.; Woods, E. J., A classification of factors, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **3**(1968), 51—130.
4. Arveson, W., Analyticity in operator algebras, *Amer. J. Math.*, **89** (1967), 578—642.
5. Cuculescu, I., Martingales on von Neumann algebras, *J. Multivariate Anal.*, **1**(1971), 17—27.
6. Dixmier, J., *Les algèbres d'operateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villard, Paris, 1969.
7. Данфорд, Н.; Шварц, Д., *Линейные операторы*,, М., ИЛ, 1962.

8. Kadison, R. V., A generalized Schwartz inequality and algebraic invariants for operator algebras, *Ann. of Math.*, **56** (1952), 494—503.
9. Kovács, I.; Szücs, J., Ergodic type theorems in von Neumann algebras, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **27**(1966), 233—246.
10. Lance, E. C., Non-commutative ergodic theory, *Proc. of the meeting on $C^*$-algebras and their appl. to theor. phys.*, Roma, Citta Universitaria, 1975, 70—79.
11. Lance, E. C., Ergodic theorems for convex sets and operators algebras, *Invent. Math.*, **37**(1976), 201—214.
12. Lance, E. C., Martingale convergence in operator algebras, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **84**(1978), 47—56.
13. Петров, В. В., *Суммы независимых случайных величин*, М., 1972.
14. Powers, R. T., Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann algebras, *Ann. of Math.*, **86**(1967), 138—171.
15. Radin, Ch., Non-commutative mean ergodic theory, *Comm. Math. Phys.*, **21**(1971), 291—302.
16. Рид, М.; Саймон, Б., *Методы современной математической физики. I.*, «Мир», 1977.
17. Segal, I. E., A non-commutative extension of abstract integration, *Ann. of Math.*, **57**(1953), 401—457. (Corrections, ibidem, 595—596).
18. Синай, Я. Г.; Аншелевич, В. В., Некоторые вопросы некоммутативной эргодической теории, *УМН*, **4**(1976), 151 — 169.
19. Takesaki, M., Conditional expectation in von Neumann algebra, *J. Functional Analysis*, **9**(1972), 306—321.
20. Tomiyama, J., On the projections of norm one in $W^*$-algebras. I, II, III, *Proc. Japan Acad.*, **33**(1957), 608—618; *Tôhoku Math. J.*, **10**(1958), 204—209; **11**(1959), 125—129.
21. Umegaki, H., Conditional expectation in an operator algebra. I, II, III, IV, *Tôhoku Math. J.*, **6**(1954), 177—181; **8**(1956), 86—100; *Kodai Math. Sem. Rep.*, **11**(1959), 51—74; **14**(1962), 59—85.
22. Yeadon, F. J., Non-commutative $L_p$-spaces, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **77**(1975), 91—102.
23. Yeadon, F. J., Ergodic theorems for semi-finite von Neumann algebras. I, *J. London Math. Soc.*, **16**(1977), 326—332.
24. Гольдштейн, М. Ш., О сходимости условных математических ожиданий в алгебрах фон Неймана, *ДАН УзССР*, **12**(1978), 7 — 8.
25. Гольдштейн, М. Ш., Эргодическая теорема для субстохастических операторов, *ДАН УзССР*, **7**(1979), 3 — 5.
26. Гольдштейн, М. Ш., Сходимость математических ожиданий в алгебрах фон Неймана, *ДАН УзССР*, **10**(1979), 8 — 9.
27. Гольдштейн, М. Ш., Усиленный закон больших чисел для последовательностей операторов, *Изв. АН УзССР*, **4**(1980), 16 — 25.
28. Гольдштейн, М. Ш., Эргодические теоремы и энтропия в алгебрах фон Неймана, *ДАН СССР*, **253**(1980), 781 — 785.

*М. Ш. ГОЛЬДШТЕЙН*
*Ташкентский Государственный Университет*
*им. В. И. Ленина,*
*Физический факультет,*
*Кафедра математики,*
*ВУЗ Городок,*
*700095 Ташкент, 95, СССР.*

Received July 26, 1980.