J. OPERATOR THEORY
11(1984), 77–90

SUR LA STRUCTURE DES C^*-ALGÈBRES D'UNE CLASSE DE GROUPES DE LIE

VUONG MANH SON et HO HUU VIET

INTRODUCTION

Le problème de décrire la structure des C^*-algèbres des groupes localement compacts, non compacts et non commutatifs restait encore ouvert jusqu'aux dernières années. On disposait seulement d'un résultat de J. M. G. Fell (en 1962) sur la structure de la C^*-algèbre du groupe SL(2, **C**) et puis de quelques résultats analogues sur les groupes SL(2, **R**), Spin(4,1) etc ....

En 1972, L. G. Brown, R. G. Douglas et P. A. Fillmore [2] ont construit une théorie intéressante du K-foncteur homologique sur l'ensemble des classes d'équivalence des extensions (des suites exactes courtes) de C^*-algèbres. D. N. Ziep [14] a donné une application de cette théorie au problème ci-dessus. L'idée est de chercher les invariants topologiques dans la K-théorie homologique.

Cette idée fut depuis développée par J. Rosenberg [10] dans des cas analogues.

Puis, en 1979, G. G. Kasparov [7], [8] a généralisé le K-foncteur homologique, ce qui a permis à lui et à J. Rosenberg [11], de décrire les C^*-algèbres d'une classe de groupes plus large.

On voit qu'une C^*-algèbre peut être décrite à l'aide d'un K-foncteur convenable dans les cas où le dual du groupe a une structure topologique "assez simple". La méthode des K-orbites nous donne des classes de tels groupes de Lie. Plus précisément, D. N. Ziep propose de chercher des algèbres de Lie réelles résolubles ayant la propriété MD (resp. $\overline{\text{MD}}$): Toutes les K-orbites (voir, par exemple, [9]) sont de dimension nulle ou maximale (resp. ou égale à la dimension de l'algèbre de Lie considérée).

Dans le présent travail, nous chercherons à déterminer toutes les algèbres de Lie ayant la propriété $\overline{\text{MD}}$ (§ 1) et nous décrirons les C^*-algèbres des groupes de Lie connexes et simplement connexes correspondants (§ 3). Puis nous donnerons une condition nécessaire pour avoir la propriété MD et un exemple non trivial (§ 4).

Les résultats de § 1, § 3 appartiennent à H. H. Viet.

Les résultats de § 4 appartiennent à V. M. Son.
Les auteurs remercient D. N. Ziep pour son aide et ses encouragements.

1. CLASSIFICATION DES ALGÈBRES DE LIE DE TYPE $\overline{\mathrm{MD}}$

Dans ce paragraphe, nous démontrerons que toutes les algèbres de Lie réelles résolubles de classe $\overline{\mathrm{MD}}$ sont les algèbres de Lie commutatives ou les algèbres de Lie affines.

Soient G un groupe de Lie réel résoluble connexe de dimension n, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G ayant la propriété $\overline{\mathrm{MD}}$, $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de $\mathfrak{g}$. Pour tout élément F de $\mathfrak{g}^*$ nous désignerons par Ω_F la K-orbite contenant F, par G_F le stabilisateur de F et par $\mathfrak{g}_F$ l'algèbre de Lie de G_F. On sait que l'algèbre $\mathfrak{g}_F$ coïncide avec le noyau de la forme bilinéaire B_F sur $\mathfrak{g}$ définie par la formule:

$$B_F(X, Y) = \langle F, [X, Y]\rangle.$$

1.1. PROPOSITION. *Supposons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit de classe $\overline{\mathrm{MD}}$ et l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ne soit pas nulle. Alors:*

1. *Pour tout élément $F \in \mathfrak{g}^*$ induisant un élément non nul de $(\mathfrak{g}^1)^*$ on a* $\dim \Omega_F = n$.

2. $\mathfrak{g}^1$ *est une sous-algèbre de Lie commutative.*

Preuve. 1. Soit $F \in \mathfrak{g}^*$ comme ci-dessus. Si $\dim \Omega_F \neq n$ alors $\dim \Omega_F = 0$, $\dim \Omega_F = \dim G - \dim \Omega_F = n$, donc $\mathfrak{g}_F = \mathfrak{g}$. Autrement dit $\operatorname{Ker} B_F = \mathfrak{g}$. Alors

$$\langle F, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\rangle = 0$$

$$\langle F, \mathfrak{g}^1\rangle = 0.$$

C'est impossible d'après l'hypothèse.

2. Soit $\mathfrak{g}^2 := [\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^1]$. Alors $\mathfrak{g}^2$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et $\dim \mathfrak{g}^2 < \dim \mathfrak{g}^1$. Il existe donc $F \in \mathfrak{g}^*$ tel que $F|\mathfrak{g}^1 \neq 0$ et $F|\mathfrak{g}^2 = 0$. Alors

$$\dim \Omega_F = n.$$

$$\dim G_F = \dim G - \dim \Omega_F = 0.$$

Donc

$$\mathfrak{g}_F = 0.$$

Remarquons que $\mathfrak{g}^2 \subset \mathfrak{g}_F$ parce que

$$\langle F, [\mathfrak{g}^2, \mathfrak{g}]\rangle \subset \langle F, \mathfrak{g}^2\rangle = 0.$$

Alors $\mathfrak{g}^2 = 0$, donc $\mathfrak{g}^1$ est commutative.

1.2. Dans la suite nous considérons seulement le cas où $\mathfrak{g}^1 \neq 0$ parce que si $\mathfrak{g}^1 = 0$, $\mathfrak{g}$ est commutative et toute K-orbite est alors de dimension zéro.

LEMME. (critère $\overline{\text{MD}}$). *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *satisfait à la condition* $\overline{\text{MD}}$ *si, et seulement si, pour tout élément non nul* X *de* $\mathfrak{g}$, *on a*

$$[X, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^1.$$

Preuve. Supposons que $\mathfrak{g}$ satisfasse à $\overline{\text{MD}}$. Alors si $F \in \mathfrak{g}^*$, $F|\mathfrak{g}^1 \neq 0$ on a $\dim \Omega_F = n$ d'après 2.1. Donc $\mathfrak{g}_F = 0$ et $\operatorname{Ker} B_F = 0$.

Supposons maintenant qu'il existe un élément non nul $X \in \mathfrak{g}$ tel que $[X, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}^1$. Alors il existe $F \in \mathfrak{g}^*$, $F|\mathfrak{g}^1 \neq 0$ tel que $\langle F, [X, \mathfrak{g}]\rangle = 0$. Ceci est impossible puisque $\operatorname{Ker} B_F = 0$.

Réciproquement, supposons que $[X, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^1$ pour tout X non nul. Si $F \in \mathfrak{g}^*$, $F|\mathfrak{g}^1 = 0$ alors on a

$$\operatorname{Ker} B_F = \mathfrak{g}.$$

Donc $\mathfrak{g}_F = \mathfrak{g}$ d'où $\dim G_F = n$ et $\dim \Omega_F = 0$.

Si $F \in \mathfrak{g}^*$, $F|\mathfrak{g}^1 \neq 0$, alors on a $\operatorname{Ker} B_F = 0$ parce que $[X, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^1$ pour tout X non nul.

Comme ci-dessus on a $\dim \Omega_F = n$.

1.3. Nous désignerons par ad^1_Y la restriction de l'opérateur ad_Y à $\mathfrak{g}^1$.

LEMME. *Si l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *satisfait à la condition* $\overline{\text{MD}}$, *les opérateurs* ad^1_Y *commutent entre eux.*

Preuve. Prenons arbitrairement Y et Y' dans $\mathfrak{g}$. On a

$$[Y, [Y', X]] + [X, [Y, Y']] + [Y', [X, Y]] = 0.$$

Comme $\mathfrak{g}^1$ est commutative, pour tout $X \in \mathfrak{g}^1$

$$[X, [Y, Y']] = 0.$$

Donc

$$[Y, [Y', X]] + [Y', [X, Y]] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}^1.$$

Donc

$$\mathrm{ad}^1_Y \,\mathrm{ad}^1_{Y'} = \mathrm{ad}^1_{Y'} \mathrm{ad}^1_Y.$$

1.4. THÉORÈME 1. *Toute algèbre de Lie réelle résoluble satisfaisant à la condition* $\overline{\mathrm{MD}}$ *est isomorphe à une des algèbres suivantes:*

1. *Une algèbre de Lie commutative.*
2. *L'algèbre de Lie affine réelle.*
3. *L'algèbre de Lie affine complexe.*

Preuve. 1ère étape. La dimension de $\mathfrak{g}^1$ est égale à 1 ou 2.

Considérons la représentation ad^1 de $\mathfrak{g}$ dans l'espace $\mathfrak{g}^1$. Le critère $\overline{\mathrm{MD}}$ dit exactement que cette représentation est irréductible. De plus, les opérateurs ad^1_Y (pour $Y \in \mathfrak{g}$) commutent entre eux. Il en résulte de manière classique qu'il y a une droite complexe D de $\mathfrak{g}^1_{\mathbf{C}} = \mathfrak{g}^1 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, stable par tous les opérateurs ad^1_Y.

Si D est égale à son imaginaire conjuguée $\bar{D}$, on a $D = \theta \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ où $\theta \subset \mathfrak{g}^1$ est de dimension 1 stable par les ad^1_Y; si $D \neq \bar{D}$, on a $D \oplus \bar{D} = \theta \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ où $\theta \subset \mathfrak{g}^1$ est de dimension 2 stable par les ad^1_Y.

En raison de l'irréductibilité, on a $\theta = \mathfrak{g}^1$ dans les deux cas.

REMARQUE 1. Il faut noter que s'il existe un espace de dimension 1 stable par les ad^1_Y, alors $\dim \mathfrak{g}^1 = 1$.

REMARQUE 2. Si $[Z_1, \mathfrak{g}^1] = [Z_2, \mathfrak{g}^2] = 0$, $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{g}$, alors

$$[Z_1, Z_2] = 0.$$

En effet, d'après l'identité de Jacobi,

$$[[Z_1, Z_2], T] + [[Z_2, T], Z_1] + [[T, Z_1], Z_2] = 0 \quad \forall T \in \mathfrak{g}.$$

Donc $[[Z_1, Z_2], T] = 0$ parce que $[Z_i, T] \in \mathfrak{g}^1$. En raison du critère $\overline{\mathrm{MD}}$, $[Z_1, Z_2] = 0$.

2ème étape.

1. Soit $\dim \mathfrak{g}^1 = 1$.

Considérons l'opérateur $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^1$ où $X \in \mathfrak{g}^1$, $X \neq 0$. D'après le critère $\overline{\mathrm{MD}}$, ad_X est surjectif. Il existe donc un élément Y de $\mathfrak{g}$ tel que

$$\mathrm{ad}_X Y = -X \quad \text{i.e.} \quad [Y, X] = X.$$

Nous montrerons que $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}_X = \mathfrak{g}^1$.

D'après la remarque 2, $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}_X$ est commutatif. Si $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}_X \neq \mathfrak{g}^1$, alors il existe $Y_1 \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}_X$, tel que $Y_1 \notin \mathfrak{g}^1$. Comme $[Y_1, Y] \in \mathfrak{g}^1$ on a $[Y_1, Y] = \lambda X$ où $\lambda \in \mathbf{R}$. Il est facile de vérifier que $[Y_1 + \lambda X, \mathfrak{g}] = 0$. D'après le critère $\overline{\mathrm{MD}}$, $Y_1 + \lambda X = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc $\{X, Y\}$ est une base de $\mathfrak{g}$ avec $[Y, X] = X$.

Autrement dit, $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie affine réelle.

2. Soit $\dim \mathfrak{g}^1 = 2$.

Supposons que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus L$ avec $\dim L > 2$.

Considérons l'opérateur $\mathrm{ad}_X\colon L \to \mathfrak{g}^1$, où $X \in \mathfrak{g}^1$ est non nul. Comme $\dim L > \dim \mathfrak{g}^1$, il existe $Y \in L$, $Y \neq 0$ tel que $\mathrm{ad}_X Y = 0$. Nous montrerons que $[Y, \mathfrak{g}^1] = 0$.

En effet si $[Y, \mathfrak{g}^1] \neq 0$, alors $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}^1_Y = \mathbf{R}X$. Puisque les ad^1_T commutent entre eux, $\mathbf{R}X$ est stable par tous les ad^1_T, $T \in \mathfrak{g}$. D'après la remarque 1, $\dim \mathfrak{g}^1 = 1$ ce qui est impossible.

Donc $[Y, \mathfrak{g}^1] = 0$.

En appliquant ce raisonnement plusieurs fois on déduit que $L = L_1 \oplus L_2$ où $\dim L_1 = 2$ et $[L_2, \mathfrak{g}^1] = 0$. D'après la remarque 2, L_2 est une sous-algèbre commutative. Si $L_2 \neq 0$ alors $\dim L_2 \geqslant 2$ parce que toute K-orbite est de dimension paire, donc n est paire.

Considérons l'opérateur surjectif:

$$\mathrm{ad}_Y\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^1$$

$$\mathrm{ad}_Y\colon \mathfrak{g}^1 \oplus L_2 \oplus L_1 \to \mathfrak{g}^1.$$

Si $Y \in \mathfrak{g}^1 \oplus L_2$ alors $[Y, \mathfrak{g}^1 \oplus L_2] = 0$. Donc l'opérateur $\mathrm{ad}_Y\colon L_1 \to \mathfrak{g}^1$ est surjectif, $\forall\, Y \in \mathfrak{g}^1 \oplus L_2 \diagdown \{0\}$. Mais $\dim L_1 = \dim \mathfrak{g}^1 = 2$, donc $\mathrm{ad}_Y \in \mathrm{Hom}(L_1, \mathfrak{g}^1)$. On a ainsi une application linéaire

$$\mathfrak{g}^1 \oplus L_2 \to \mathrm{Hom}(L_1, \mathfrak{g}^1).$$

De plus, cette application transforme tout $Y \neq 0$ en un isomorphisme, et en particulaire est injective.

Il est facile de voir que ceci est impossible. Donc $L_2 = 0$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus L$ où $\dim \mathfrak{g}^1 = \dim L = 2$.

Soit $\{X_1, X_2\}$ une base de $\mathfrak{g}^1$. Comme $\mathrm{ad}_{X_1}\colon L \to \mathfrak{g}^1$ est surjectif, il existe Y_1 de L tel que $[Y_1, X_1] = X_1$, i.e. $\mathrm{ad}^1_{Y_1} X_1 = X_1$. Si $\mathbf{R}X_1 = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}^1_{Y_1} - 1)$, alors $\mathbf{R}X_1$ serait stable pour les opérateurs ad_T, $T \in \mathfrak{g}$, d'où $\dim \mathfrak{g}^1 = 1$ d'après la remarque 1 ce qui est impossible. On en déduit que $\mathrm{ad}^1_{Y_1} = \mathrm{Id}$.

Considérons maintenant l'opérateur surjectif

$$\mathrm{ad}_{Y_1}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^1.$$

On a $\dim \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}_{Y_1} = 2$, donc il existe Y_2' tel que $[Y_1, Y_2'] = 0$ et que $\{Y_1, Y_2', X_1, X_2\}$ soit une base de $\mathfrak{g}$.

Comme $\mathrm{ad}^1_{Y_1} = \mathrm{Id}$, $\mathrm{ad}^1_{Y_2'}$ ne peut pas avoir des vecteurs propres en raison du critère MD. En changeant la base de $\mathfrak{g}^1$, on a

$$\mathrm{ad}^1_{Y_2'} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{où } a, b \in \mathbf{R},\ b \neq 0.$$

Pour $Y_2 = \frac{1}{b}(Y_2' - aY_1)$, on a $\mathrm{ad}^1_{Y_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\{X_1, X_2, Y_1, Y_2\}$ est une base de $\mathfrak{g}$ avec les crochets de Lie suivants:

$$[X_1, X_2] = 0 \quad [Y_1, Y_2] = 0$$

$$[Y_1, X_1] = X_1 \quad [Y_1, X_2] = X_2$$

$$[Y_2, X_1] = X_2 \quad [Y_2, X_2] = -X_1.$$

C'est l'algèbre de Lie affine complexe.

2. RAPPELS SUR LES K-GROUPES

2.1. Groupe de Kasparov $\mathrm{Ext}(A, B)$ ([7], [8]). Considérons les extensions des C^*-algèbres de la forme

$$(1) \qquad 0 \to B \otimes \mathcal{K} \to E \to A \to 0$$

où $\mathcal{K}$ est l'algèbre des opérateurs compacts d'un espace hilbertien.

Une extension est dite scindée s'il existe un homomorphisme-section $A \to E$.

L'extension (1) est déterminée d'une manière unique par un homomorphisme $\varphi : A \to \Theta(B \otimes \mathcal{K})$ où $\Theta(B \otimes \mathcal{K}) = M(B \otimes \mathcal{K})/B \otimes \mathcal{K}$.

Deux extensions φ_1, φ_2 sont dites unitairement équivalentes s'il existe un opérateur unitaire $u \in M(B \otimes \mathcal{K})$ tel que $\forall a \in A$, $\varphi_2(a) = u\varphi_1(a)u^{-1}$.

L'addition $\varphi_1 + \varphi_2$ est déterminée de manière suivante:

$$\varphi_1 + \varphi_2 : A \to \Theta(B \otimes \mathcal{K}) \oplus \Theta(B \otimes \mathcal{K}) \xrightarrow{\alpha} \Theta(B \otimes \mathcal{K})$$

où l'homomorphisme α est déduit de $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K} \to \mathcal{K}$.

L'ensemble des classes d'équivalence unitaire d'extensions scindées est un sous-semigroupe du semigroupe des classes de toutes les extensions. D'après G. G. Kasparov, nous désignons le quotient par $\mathrm{Ext}(A, B)$. Alors deux extensions φ_1, φ_2 appartiennent à une même classe de $\mathrm{Ext}(A, B)$ si, et seulement si, elles sont stablement équivalentes, i. e. s'il existe des extensions scindées δ_1, δ_2 telles que $\varphi_1 + \delta_1$ et $\varphi_2 + \delta_2$ soient unitairement équivalentes.

Si A est nucléaire et B possède une unité approchée dénombrable, $\mathrm{Ext}(A, B)$ est un groupe.

2.2. K-GROUPE $\mathrm{K}_*(A)$. Soit A une C^*-algèbre à élément unité. Par définition, $\mathrm{K}_0(A)$ est le groupe de Grothéndieck du semigroupe des classes d'équivalence des A-modules projectifs de type fini.

Quand A n'a pas d'élément unité, on définit

$$\mathrm{K}_0(A) = \mathrm{Ker}(\mathrm{K}_0(A^+) \to \mathrm{K}_0(\mathbf{C}) = \mathbf{Z})$$

où A^* est déduite de A par l'adjointion d'un élément unité.

Pour $A = C(X)$ avec X compact, on peut identifier $\mathrm{K}_0(A)$ avec le groupe topologique $\mathrm{K}^0(X)$ (cf. [6]).

On définit les groupes $\mathrm{K}_n(A)$ de manière suivante

$$\mathrm{K}_n(A) = \mathrm{K}_0(A \otimes C_0(\mathbf{R}^n)), \quad \forall\, n > 0.$$

Le théorème de périodicité de Bott affirme que $\mathrm{K}_0(A)$ et $\mathrm{K}_2(A)$ sont isomorphes. On a le théorème suivant.

THÉORÈME (cf. [3], [8]). *Pour chaque groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe G*

$$\mathrm{K}_0(C^*(G)) = \begin{cases} \mathbf{Z} & si\ \dim G\ est\ paire \\ 0 & si\ \dim G\ est\ impaire. \end{cases}$$

$$\mathrm{K}_1(C^*(G)) = \begin{cases} 0 & si\ \dim G\ est\ paire \\ \mathbf{Z} & si\ \dim G\ est\ impaire. \end{cases}$$

2.3. RELATION ENTRE LES GROUPES EXT ET K_*. Chaque extension (1) induit une suite exacte cyclique de K-groupes:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{K}_0(E) \arrow[r] & \mathrm{K}_0(A) \arrow[dr, "\delta_0"] & \\
\mathrm{K}_0(B) \arrow[ur] & & & \mathrm{K}_1(B) \arrow[dl] \\
& \mathrm{K}_1(A) \arrow[ul, "\delta_1"] & \mathrm{K}_1(E) \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

(On identifie les groupes $\mathrm{K}_*(B)$ et $\mathrm{K}_*(B \otimes \mathscr{K})$.)

Chaque élément de $\mathrm{Ext}(A, B)$ induit donc une paire d'homomorphismes (δ_0, δ_1) et on a ainsi un homomorphisme

$$\gamma\colon \mathrm{Ext}(A, B) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{K}_0(A), \mathrm{K}_1(B)) \oplus \mathrm{Hom}(\mathrm{K}_1(A), \mathrm{K}_0(B)).$$

THÉORÈME (cf. [12]). *Soient A et B des C^*-algèbres séparables et soit A une imite inductive des C^*-algèbres de type* I. *On a la suite exacte naturelle suivante:*

$$0 \to \mathrm{Ext}(\mathrm{K}_0(A),\ \mathrm{K}_0(B)) \oplus \mathrm{Ext}(\mathrm{K}_1(A),\ \mathrm{K}_1(B)) \to$$

$$\to \mathrm{Ext}(A, B) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Hom}(\mathrm{K}_0(A),\ \mathrm{K}_1(B)) \oplus \mathrm{Hom}(\mathrm{K}_1(A),\ \mathrm{K}_0(B)) \to 0.$$

3. DESCRIPTION DES C^*-ALGÈBRES DE GROUPES DE LIE

Dans ce paragraphe nous décrirons les C^*-algèbres des groupes de Lie dont les algèbres de Lie sont de classe $\overline{\mathrm{MD}}$.

3.1. GROUPE DES TRANSFORMATIONS AFFINES DE LA DROITE RÉELLE.

Soit

$$\mathrm{Aff}\,\mathbf{R} = \{(a, b),\ a, b \in \mathbf{R},\ a \neq 0\}$$

avec le produit $(a, b)(a', b') = (aa',\ b + ab')$.

THÉORÈME (cf. [14], [15]). *On a la suite exacte courte des C^*-algèbres suivantes:*

$$0 \to \mathscr{K} \to C^*(\mathrm{Aff}\,\mathbf{R}) \to C_0(\mathbf{R} \cup \mathbf{R}) \to 0.$$

La C^*-algèbre $C^*(\mathrm{Aff}\,\mathbf{R})$ *correspond à l'élément* $\mathrm{Index}\,C^*(\mathrm{Aff}\,\mathbf{R}) = (1,1)$ *dan le groupe*

$$\mathrm{Ext}(C_0(\mathbf{R} \cup \mathbf{R}), \mathbf{C}) \cong \mathrm{Ext}(S^1 \vee S^1) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}.$$

3.2. GROUPE DES TRANSFORMATIONS AFFINES DE LA DROITE COMPLEXE.

Soit

$$\mathrm{Aff}\,\mathbf{C} = \{(z, \omega);\ z,\ \omega \in \mathbf{C},\ z \neq 0\}$$

avec le produit

$$(z, \omega)(z', \omega') = (zz',\ \omega + z\omega').$$

THÉORÈME (cf. [10]). *On a la suite exacte courte des C^*-algèbres*

$$0 \to \mathscr{K} \to C^*(\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}) \to C_0\Big(\bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_i^1\Big) \to 0.$$

La C^*-algèbre $C^*(\mathrm{Aff}\,\mathbf{C})$ correspond à l'élément

$$\mathrm{Index}\,C^*(\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}) = (1,\ 1, \ldots)$$

dans le groupe

$$\mathrm{Ext}\Big(C_0\Big(\bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_i^1\Big), \mathbf{C}\Big) \cong \mathrm{Ext}\Big(\bigvee_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^1\Big) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \ldots.$$

3.3. GROUPE SIMPLEMENT CONNEXE DES TRANSFORMATIONS AFFINES DE LA DROITE RÉELLE.

Soit

$$\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{R}} = \{(a, b);\ a,\ b \in \mathbf{R}\}.$$

Le produit est donné par la formule:

$$(a, b)(a', b') = (a + a',\ b + e^a b').$$

THÉORÈME (cf. [10]). *On a la suite exacte courte des C^*-algèbres suivantes*

$$0 \to \mathscr{K} \to C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{R}}) \to C_0(\mathbf{R}) \to 0.$$

Cette suite exacte correspond à l'élément $\mathrm{Index}\, C^*(\mathrm{Aff}\,\mathbf{R}) = 1$ *dans le groupe*

$$\mathrm{Ext}(C_0(\mathbf{R}), \mathbf{C}) \cong \mathrm{Ext}(S^1) \cong \mathbf{Z}.$$

3.4. GROUPE SIMPLEMENT CONNEXE DES TRANSFORMATIONS AFFINES DE LA DROITE COMPLEXE.

Soit

$$\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}} = \{(z, \omega);\ z, \omega \in \mathbf{C}\}$$

avec le produit $(z, \omega)(z', \omega') = (z + z',\ \omega + e^z \omega')$.

PROPOSITION. *Le dual du groupe $\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}}$ (l'espace des représentations unitaires irréductibles de $\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}}$) se compose de deux sous-ensembles suivants:*

1. *Le sous-ensemble fermé X_1 des représentations unitaires de dimension 1 U_λ ($\lambda \in \mathbf{R}^2$) qui est homéomorphe à $\mathbf{R}^2$.*

2. *Le sous-ensemble ouvert X_2 des représentations unitaires irréductibles de dimension infinie T_α ($\alpha \in S^1$) qui est homéomorphe à S^1.*

Preuve. Il est clair que $N = \{(0, \omega),\ \omega \in \mathbf{C}\}$ est un sous-groupe invariant commutatif avec le dual $\hat{N} \cong \mathbf{C}$.

Le groupe $\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}}$ opère sur $\hat{N}$ par la formule

$$g(\chi_\lambda) = \chi_{\lambda e^z} \quad \text{où } g = (z, \omega) \in \widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}},\ \chi_\lambda \in \hat{N}.$$

Donc dans l'espace dual $\hat{N}$, il y a deux orbites $\{0\}$ et $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Les représentations unitaires de dimension 1, U_λ, correspondant à l'orbite $\{0\}$ sont les prolongements de la représentation triviale du sous-groupe invariant N:

$$U_\lambda(z, \omega) = e^{i\mathrm{Re}(z\bar{\lambda})}, \quad (z, \omega) \in \widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}},\ \lambda \in \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2.$$

D'après ([4], 3.6.3) l'ensemble X_1 de ces représentations est fermé dans le dual de $\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}}$. On vérifie facilement $X_1 \cong \mathbf{R}^2$.

Prenons maintenant χ_1 dans l'orbite $\mathbf{C}\setminus\{0\}$. Le stabilisateur G_{χ_1} est l'ensemble $\{(i2\pi n, h),\ n \in \mathbf{R},\ h \in \mathbf{C}\}$.

Les représentations unitaires irréductibles de dimension infinie de $\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}}$ sont induites par les représentations S de G_{χ_1} telles que $S|N \simeq \chi_1$. Donc elles sont induites par les représentations S_α,

$$S_\alpha(i2\pi n, h) = \exp(i\mathrm{Re}h + 2\pi n\alpha) \quad \text{où } \alpha \in S^1.$$

Désignons ces représentations par T_α, $\alpha \in S^1$. L'ensemble X_2 des T_α, $\alpha \in S^1$, est ouvert dans le dual de $\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}}$ parce que X_1 est fermé. De plus comme G_{χ_1} est un sous-groupe invariant de $\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}}$, X_2 est homéomorphe à S^1 d'après ([5], Theorem 4.4).

THÉORÈME 2. *On a la suite exacte courte suivante*

$$0 \to C(S^1) \otimes \mathscr{K} \to C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}}) \to C_0(\mathbf{R}^2) \to 0. \tag{2}$$

Preuve. D'après ([4], 18.1) le dual de $\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}}$ et le spectre de $C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}})$ sont identiques.

Conservons les notations de la proposition ci-dessus.

Posons $I = \bigcap_{\pi \in X_1} \mathrm{Ker}\,\pi$. Comme X_1 est fermé, I est un idéal bilatère fermé avec le spectre $\hat{I} \cong X_2 \cong S^1$. Donc d'après ([4], 10.5.4) on a $I \cong C(S^1, \mathscr{K})$. Or $C(S^1, \mathscr{K}) \cong C(S^1) \otimes \mathscr{K}$ (voir par exemple [13]), d'où on a $I \cong C(S^1) \otimes \mathscr{K}$.

Considérons maintenant la sous-C^*-algèbre quotient $C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}})/I$. Son spectre X_1 est homéomorphe à $\mathbf{R}^2$. Pour tous $\varphi, \psi \in C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}})$, $U_\lambda \in X_1$, on a

$$U_\lambda(\varphi * \psi - \psi * \varphi) = U_\lambda(\varphi)U_\lambda(\psi) - U_\lambda(\psi)U_\lambda(\varphi) = 0.$$

Donc

$$\varphi * \psi - \psi * \varphi \in I$$

$$\varphi * \psi = \psi * \varphi \pmod{I}.$$

Donc $C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}})/I$ est commutative d'où on a

$$C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}})/I \cong C_0((C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}}/I)^\wedge) \cong C_0(\mathbf{R}^2).$$

On obtient ainsi la suite exacte courte (2).

THÉORÈME 3. *La C^*-algèbre $C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}})$ correspond à l'élément* Index $C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}})=1$ *dans le groupe* $\mathrm{Ext}(C_0(\mathbf{R}^2), C(S^1)) \cong \mathbf{Z}$.

Preuve. Nous calculons d'abord les K-groupes

$$\mathrm{K}_0(C_0(\mathbf{R}^2)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{K}_0(C(S^2)) \to \mathbf{Z}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{K}^0(S^2) \to \mathbf{Z}) =$$

$$= \mathrm{Ker}(\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}.$$

$$\mathrm{K}_0(C(S^1)) = \mathrm{K}^0(S^1) = \mathbf{Z}.$$

$$\mathrm{K}_1(C_0(\mathbf{R}^2)) = \mathrm{K}_0(C_0(\mathbf{R}^2)\otimes C_0(\mathbf{R}^1)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{K}_0(C(S^3)) \to \mathbf{Z}) =$$

$$= \mathrm{Ker}(\mathrm{K}^0(S^3) \to \mathbf{Z}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}) = 0.$$

$$\mathrm{K}_1(C(S^1)) = \mathrm{K}_0(C(S^1) \otimes C_0(\mathbf{R}^1)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{K}_0(C(S^2)) \to \mathbf{Z}) =$$

$$= \mathrm{Ker}(\mathrm{K}^0(S^2) \to \mathbf{Z}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}.$$

Alors d'après le théorème de 2.3, nous avons

$$\mathrm{Ext}(C_0(\mathbf{R}^2), C(S^1)) \cong \mathrm{Hom}\,(\mathrm{K}_0(C_0(\mathbf{R}^2)), \mathrm{K}_1(C(S^1))) = \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}.$$

Considérons la suite exacte des K-groupes de (2)

$$0 \xrightarrow{\delta_1} \mathbf{Z} \to \mathrm{K}_0(C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}})) \to \mathbf{Z} \xrightarrow{\delta_0} \mathbf{Z} \to \mathrm{K}_1(C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}})) \to 0.$$

Nous avons $\delta_1 = 0$, $\delta_0 : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ est un isomorphisme parce que $\mathrm{K}_1(C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}})) = 0$ d'après le théorème de 2.2.

Donc Index $C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}}) = 1$.

4. SUR LA CLASSE D'ALGÈBRES DE LIE MD

Soit G un groupe de Lie réel résoluble dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ a la propriété MD.

4.1. Avec les notations de § 1 on a

PROPOSITION ([1], Chapitre 2, Théorème 1.7) *Soit F un élément de l'espace dual $\mathfrak{g}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Si l'orbite Ω_F est de dimension maximale alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_F$ est commutative.*

4.2. THÉORÈME 4. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle résoluble de classe* MD. *Alors $\mathfrak{g}^2 = [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathfrak{g}$.*

Preuve. Remarquons d'abord que pour tout élément F de $\mathfrak{g}^*$ tel que $F|_{\mathfrak{g}^1} \neq 0$ l'orbite Ω_F est de dimension maximale.

En effet, si $\dim \Omega_F = 0$, $\dim G_F = \dim G$ d'où

$$\operatorname{Ker} B_F = \mathfrak{g}_F = \mathfrak{g} \qquad \text{(voir 1.1).}$$

Alors

$$\langle F, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \rangle = 0$$

$$\langle F, \mathfrak{g}^1 \rangle = 0$$

ce qui contredirait l'hypothèse.

Prenons maintenant $F \in \mathfrak{g}^*$, $F(\mathfrak{g}^2) = 0$, $F(\mathfrak{g}^1) \neq 0$. Alors $\dim \Omega_F$ est maximale, donc $\mathfrak{g}_F$ est commutative d'après 4.1. D'autre part $\mathfrak{g}^2 \subset \mathfrak{g}_F$ parce que

$$\langle F, [\mathfrak{g}^2, \mathfrak{g}] \rangle \subset \langle F, \mathfrak{g}^2 \rangle = 0.$$

Donc $\mathfrak{g}^2$ est commutative.

REMARQUE. Nous avons les isomorphismes suivants

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^1 \cong \mathbf{R}^k, \quad \mathfrak{g}^1/\mathfrak{g}^2 \cong \mathbf{R}^l, \quad \mathfrak{g}^2 \cong \mathbf{R}^m.$$

Alors les produits semi-directs $\mathbf{R}^k \cdot \mathbf{R}^l \cdot \mathbf{R}^m$ satisfont à la condition $\mathfrak{g}^2$ est commutative. Quelques-uns des produits semi-directs $\mathbf{R}^k \cdot \mathbf{R}^l$ ayant la propriété MD sont considérés dans [10], [7].

Nous donnons maintenant un exemple de produit semi-direct $\mathbf{R}^k \cdot \mathbf{R}^l \cdot \mathbf{R}^m$ ayant la propriété MD.

Soit $\{X, Y, Z, T\}$ une base de $\mathfrak{g}$ avec

$$[T, X] = -X, \quad [T, Y] = Y, \quad [T, Z] = 0$$

$$[X, Y] = Z, \quad [X, Z] = 0, \quad [Y, Z] = 0.$$

Alors $\mathfrak{g}$ est résoluble, $\mathfrak{g}^1 = \mathbf{R}\{X, Y, Z\}$ est l'algèbre de Heisenberg et $\mathfrak{g}^2 = \mathbf{R}Z \neq 0$.

Nous montrerons que si $F = \theta T$ $(\theta \neq 0)$ $\dim \Omega_F = 0$, sinon $\dim \Omega_F = 2$. En effet soit $F = \alpha X^* + \beta Y^* + \gamma Z^* + \theta T^*$ où $\alpha, \beta, \gamma, \theta \in \mathbf{R}$, $\{X^*, Y^*, Z^*, T^*\}$ la base duale de $\{X, Y, Z, T\}$. On a

$$\mathfrak{g}_F = \operatorname{Ker} B_F =$$

$$= \{U \in \mathfrak{g} \mid \langle F, [U, X] \rangle = \langle F, [U, Y] \rangle = \langle F, [U, Z] \rangle = \langle F, [U, T] \rangle = 0\}.$$

Soit $U = aX + bY + cZ + tT$; $a, b, c, t \in \mathbf{R}$. On vérifie facilement que

$$U \in \mathfrak{g}_F \Leftrightarrow \begin{cases} -\gamma b - \alpha d = 0 \\ \gamma a + \beta d = 0 \\ \alpha a - \beta b = 0. \end{cases}$$

1. Si $\alpha = \beta = \gamma = 0$ $(F = \theta T^*,\ \theta \neq 0)$, $\mathfrak{g}_F = \mathfrak{g}$ donc $\dim \Omega_F = 0$.

2. Si $\gamma \neq 0$, $b = -\frac{\alpha}{\gamma} d$, $a = \frac{\beta}{\gamma} d$ avec d arbitraire. Donc $\mathfrak{g}_F = \Big\{U = d\Big(\frac{b}{\gamma} X - \frac{\alpha}{\gamma} Y + T\Big) + cZ\Big\}$ d'où $\dim \mathfrak{g}_F = 2$. Donc $\dim \Omega_F = 2$.

3. Si $\gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ on a $d = 0$, $a = \frac{\beta}{\alpha} b$, b arbitraire. Donc $\mathfrak{g}_F = \Big\{U = b\Big(\frac{\beta}{\alpha} X + Y\Big) + cZ\Big\}$ d'où $\dim \mathfrak{g}_F = 2$, $\dim \Omega_F = 2$.

4. Si $\gamma = \beta = 0$, $\alpha \neq 0$ on a $d = a = 0$, b arbitraire. Donc $\mathfrak{g}_F = \{U = bY + cZ\}$, $\dim \mathfrak{g}_F = 2$, $\dim \Omega_F = 2$.

5. Si $\gamma = \alpha = 0$, $\beta \neq 0$ tout a fait analogue $\dim \Omega_F = 2$.

Nous finissons le travail en posant les deux problèmes suivants:

Problème 1. Chercher toutes les algèbres de Lie réelles résolubles ayant la propriété MD.

Problème 2. D'écrire les C^*-algèbres des groupes de Lie correspondants à l'aide d'un K-foncteur convenable.

RÉFÉRENCES

1. Bernat, P.; Conze, N.; Duflo, M., et al., *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Paris, Dunod, 1972.
2. Brown, L. G., Douglas, R. G.; Fillmore P. A., Extensions of C^*-algebras and K-homology, *Ann. of Math.*, **105**(1977), 265–324.
3. Connes, A., An analogue of the Thom isomorphisme for cross products of a C^*-algebra by an action of **R**, *Advances in Math.*, **39**(1981), 31–55.
4. Dixmier, J., *Les C^*-algèbres et leurs représentations*, 2[me] édition, Paris, Gauthier-Villars, 1969.
5. Fell, J. M. G., Weak containment and induced representations of groups, *Canad. J. Math.*, **14**(1962), 237–268.

6. KAROUBI, M., *K-theory: An introduction*, Grundlehren der Math. Wissenschaften, N. 226, Springer-Verlag, Berlin — New York — Heidelberg, 1978.

7. KASPAROV, G. G., K-foncteur dans la théorie des extensions de C^*-algèbres (en russe), *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 13(1979), 73—74.

8. KASPAROV, G. G., K-foncteur d'opérateurs et les extensions de C^*-algèbres (en russe), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 44(1980), 571—636.

9. KIRILLOV, A. A., *Elements of the theory of representations*, Springer Verlag, Berlin — Heidelberg—New York, 1976.

10. ROSENBERG, J., The C^*-algèbras of some real and p-adic solvable groups, *Pacific J. Math.*, 65(1976), 175—192.

11. ROSENBERG, J., Homological invariants of extensions of C^*-algebras, *Proc. Symp. Pure Math.*, Vol. 38.

12. ROSENBERG, J.; SCHOCHET, C., The classification of extensions of C^*-algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 4(1981), 105—110.

13. SAKAI, S., *C^*-algebras and W^*-algebras*, Springer, Berlin, 1971.

14. ZIEP, D. N., Sur la structure de la C^*-algèbre du groupe des transformations affines de la droite réelle (en russe), *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 9(1975), 63—64.

15. ZIEP, D. N., Application du K-foncteur homologique Ext(·) dans l'étude de la structure de C^*-algèbres de quelques groupes de Lie résolubles (en russe), thèse, Moscou, 1977.

VUONG MANH SON
Institut de Finance,
229 Rue Dong Khoi,
Ho Chi Minh ville,
Vietnam.

HO HUU VIET
Institut de Mathématiques,
Nghia do, Tu liem, Hanoi,
Vietnam.

Received February 3, 1982; revised September 1, 1982.