J. OPERATOR THEORY
11(1984), 273–303

SYSTÈMES DYNAMIQUES GÉNÉRALISÉS ET CORRESPONDANCES

MICHEL ENOCK et JEAN-MARIE SCHWARTZ

INTRODUCTION

Le développement de la théorie des systèmes dynamiques et des produits croisés est un des moteurs principaux de l'étude des algèbres d'opérateurs. Soit G un groupe localement compact agissant sur une algèbre de von Neumann $\mathscr{A}$. Dans le cas où G est abélien, un résultat essentiel, dû à M. Takesaki ([20]), énonce que le groupe dual $\hat{G}$ agit canoniquement sur le produit croisé de $\mathscr{A}$ par G.

Dès que le groupe n'est plus abélien, il faut donc trouver un remplaçant à son groupe dual. Plusieurs voies ont été explorées en ce sens; la plus usuelle en analyse harmonique (ainsi les théorèmes de dualité de T. Tannaka et de N. Tatsuuma ([21])) considère comme dual de G une classe ad hoc de ses représentations. Dans cet esprit, J. E. Roberts ([14]) introduisit une notion d'action d'un dual de groupe sur une algèbre de von Neumann. Grossièrement, celle-ci consiste (dans le cas où l'algèbre est proprement infinie) à associer de manière fonctorielle à toute représentation de G un endomorphisme de $\mathscr{A}$; au produit tensoriel des représentations correspond alors la composition des endomorphismes.

Une autre voie (empruntée par M. B. Landstad ([11]), Y. Nakagami ([12]), et les auteurs) consiste à considérer comme dual de G l'algèbre $\mathscr{M}(G)$ (resp. $\mathscr{R}(G)$) de la représentation régulière gauche λ_G (resp. droite ρ_G), munie de sa structure d'algèbre de Hopf-von Neumann. Dans ce cadre, une action du dual du groupe est un morphisme de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A} \otimes \mathscr{M}(G)$ (resp. $\mathscr{A} \otimes \mathscr{R}(G)$) qui fait de $\mathscr{A}$ un $\mathscr{M}(G)$-comodule (resp. $\mathscr{R}(G)$-comodule).

Les deux points de vue sont moins éloignés l'un de l'autre qu'il n'y paraît. Ainsi, le second consiste en fait à considérer l'ensemble $\{\lambda_G, \lambda_G \otimes \lambda_G\}$. Réciproquement, par exemple, J. Ernest ([8]) a pu déduire aisément le théorème de Tatsuuma d'un résultat important de P. Eymard ([9]) selon lequel G est le spectre de l'algèbre de Fourier $A(G)$, prédual de $\mathscr{M}(G)$.

Le but de ce papier consiste à relier ces deux conceptions, en utilisant la théorie des correspondances due à A. Connes ([2]): à toute représentation de G on associe de manière fonctorielle une correspondance de $\mathscr{A}$ dans elle-même, et au produit tensoriel de représentations correspond la composition des correspondances. On obtient là une définition alternative et équivalente de l'action d'un dual de groupe; l'équivalence (à cocycle près) entre deux actions, s'exprimant elle aussi de façon agréable.

Tous les résultats de ce papier sont, en fait, obtenus directement dans le cadre des algèbres de Kac. Là encore, sans efforts techniques supplémentaires, celui-ci s'avère donc parfaitement naturel. Cela indique de nouveau que les algèbres de Kac sont des outils bien adaptés à rendre compte de la dualité des groupes, quel que soit le point de vue adopté.

Les préliminaires sont regroupés dans le chapitre 1. Les chapitres 2 et 3 contiennent les principaux résultats. Enfin, dans le chapitre 4 on associe à toute fonction continue de type positif sur G une application complètement positive de $\mathscr{A}$ dans elle-même. Cette méthode s'est déjà révélée utile dans le cas des actions du dual d'un groupe discret considérées par J.-L. Sauvageot ([16]). Il y a là l'ébauche d'une troisième conception des actions d'un dual de groupe.

L'essentiel de ces résultats a été annoncé dans [7] et exposé à diverses occasions, notamment lors du séminaire d'Oberwolfach sur les C^*-algèbres en octobre 1981.

Nous remercions A. Connes qui nous a communiqué en avant-première son papier sur les correspondances et nous a suggéré la possibilité de leur utilisation pour traiter des actions de duaux de groupes.

NOTATIONS. Dans tout cet article G désignera un groupe localement compact et $\mathscr{A}$ une algèbre de von Neumann; on notera $L^2(\mathscr{A})$ l'espace hilbertien canonique et $J_{\mathscr{A}}$ l'isométrie antilinéaire associés. Dans certains cas, on munira $\mathscr{A}$ d'un poids normal semi-fini fidèle ψ; on utilisera alors les constructions usuelles de la théorie des poids et algèbres hilbertiennes: espace hilbertien H_ψ, isométrie antilinéaire J_ψ, idéal $\mathfrak{N}_\psi$, etc ....

On désignera par $\mathbf{K} = (M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ une algèbre de Kac à laquelle on associera l'algèbre de Kac commutante de la duale notée $\mathbf{K}^{\wedge\prime} = (\hat{M}', \hat{\Gamma}', \hat{\varkappa}', \hat{\varphi}')$[1]. On vérifie aisément que les représentations du prédual de M forment une catégorie $\operatorname{Rep} M_*$ dont les flèches sont les opérateurs d'entrelacement. On note systématiquement μ, μ_1 et μ_2 trois objets arbitraires de $\operatorname{Rep} M_*$, opérant respectivement dans les espaces hilbertiens $\mathfrak{H}_\mu$, $\mathfrak{H}_{\mu_1}$ et $\mathfrak{H}_{\mu_2}$, et engendrant les algèbres de von Neumann A_μ, A_{μ_1} et A_{μ_2}.

On entend par système dynamique généralisé le triplet constitué par une algèbre de Kac, une algèbre de von Neumann, et une action de la première sur la seconde ([4], I.1).

On note systématiquement α une action de $\mathbf{K}^{\wedge\prime}$ sur $\mathscr{A}$.

---

[1] Plus généralement, nous ferons largement appel aux notations de la théorie des algèbres de Kac ([3], [4], [5], [6], [17], [18]).

1. PRÉLIMINAIRES

1.1. RAPPELS. (i) Il existe ([3], 1.5) une représentation de M_* dans $\mathfrak{H}_{\mu_1} \otimes \mathfrak{H}_{\mu_2}$, notée $\mu_1 \times \mu_2$ telle que $A_{\mu_1 \times \mu_2} \subset A_{\mu_1} \otimes A_{\mu_2}$ et que, pour tous ω de M_*, θ_1 de $(A_{\mu_1})_*$ et θ_2 de $(A_{\mu_2})_*$, on ait:

$$\langle(\mu_1 \times \mu_2)(\omega), \theta_1 \otimes \theta_2\rangle = \langle\mu_{1*}(\theta_1)\,\mu_{2*}(\theta_2), \omega\rangle$$

où $\mu_{i*}(\theta_i)$ $(i = 1,2)$ désigne l'élément de M défini par

$$\langle\mu_{i*}(\theta_i), \omega\rangle = \langle\mu_i(\omega), \theta_i\rangle.$$

(ii) Si λ désigne la représentation de Fourier associée à **K** ([5], 2.1.11), il existe ([3], 2.14) un morphisme injectif normal $\hat{\beta}_\mu$ de $\hat{M}$ dans $A_\mu \otimes \hat{M}$ tel que $\hat{\beta}_\mu(1) = 1 \otimes 1$, et

$$\hat{\beta}_\mu(\lambda(\omega)) = \sigma(\lambda \times \mu)(\omega) \quad \text{pour tout } \omega \text{ de } M_*.$$

(iii) On notera ρ la représentation de M_* dans $\hat{M}'$ définie par:

$$\rho(\omega) = J\hat{J}\lambda(\omega)J\hat{J} \quad \text{pour tout } \omega \text{ de } M_*;$$

rappelons que, d'après [18], II.18, J et $\hat{J}$ commutent.

1.2. LEMME. *Soit Φ un morphisme de A_{μ_1} dans A_{μ_2} tel que $\Phi(1) = 1$ et $\Phi \circ \mu_1 = \mu_2$. On a:*

(i) $(\Phi \otimes i)(V_{\mu_1}) = V_{\mu_2}$, *où V_{μ_1} et V_{μ_2} désignent les générateurs de μ_1 et μ_2,* (cf. [3], 2.10).

(ii) $(\Phi \otimes i)\,\hat{\beta}_{\mu_1} = \hat{\beta}_{\mu_2}$.

Démonstration. Soit ω dans M_*. On a:

$$\begin{aligned}(i \otimes \omega)(\Phi \otimes i)(V_{\mu_1}) &= \Phi(i \otimes \omega)(V_{\mu_1}) = \\ &= \Phi(\mu_1(\omega)) = && \text{d'après [3], 2.10} \\ &= \mu_2(\omega).\end{aligned}$$

Par unicité, on en déduit (i).

Soit x dans $\hat{M}$. On a:

$$\begin{aligned}(\Phi \otimes i)\hat{\beta}_{\mu_1}(x) &= (\Phi \otimes i)(V_{\mu_1}(1 \otimes x)V_{\mu_1}^*) = && \text{d'après [3], 2.14 (i)} \\ &= V_{\mu_2}(1 \otimes x)V_{\mu_2}^* = && \text{d'après (i)} \\ &= \hat{\beta}_{\mu_2}(x) && \text{d'après [3], 2.14 (i)}\end{aligned}$$

d'où (ii).

1.3. LEMME. *Soient Ω dans $(A_\mu)_*$ et θ dans $(\hat{M})_*$. On a:*

$$\lambda_*((\Omega \otimes \theta) \circ \hat{\beta}_\mu) = \lambda_*(\theta)\mu_*(\Omega).$$

Démonstration. Soit ω dans M_*. On a, par définition de λ_*:

$$\langle \lambda_*((\Omega \otimes \theta) \circ \hat{\beta}_\mu), \omega \rangle = \langle \hat{\beta}_\mu(\lambda(\omega)), \Omega \otimes \theta \rangle =$$

$$= \langle \lambda \times \mu(\omega), \theta \otimes \Omega \rangle = \qquad \text{d'après 1.1.(ii)}$$

$$= \langle \lambda_*(\theta)\mu_*(\Omega), \omega \rangle \qquad \text{d'après 1.1(i)}$$

d'où le résultat.

1.4. PROPOSITION. *On a $(\hat{\beta}_\mu \otimes i)\hat{\Gamma} = (i \otimes \hat{\Gamma})\hat{\beta}_\mu$.*

Démonstration. Soient ω dans M_*, Ω dans $(A_\mu)_*$, θ_1 et θ_2 dans $\hat{M}_*$. On a:

$$\langle (\hat{\beta}_\mu \otimes i)\hat{\Gamma}(\lambda(\omega)), \Omega \otimes \theta_1 \otimes \theta_2 \rangle =$$

$$= \langle \hat{\Gamma}(\lambda(\omega)), ((\Omega \otimes \theta_1) \circ \hat{\beta}_\mu) \otimes \theta_2 \rangle =$$

$$= \langle \lambda(\omega), ((\Omega \otimes \theta_1) \circ \hat{\beta}_\mu) * \theta_2 \rangle = \qquad \text{d'après [5], I.2.2}$$

$$= \langle \omega, \lambda_*(\theta_2)\lambda_*((\Omega \otimes \theta_1) \circ \hat{\beta}_\mu) \rangle = \qquad \text{d'après [5], III.3.3}$$

$$= \langle \omega, \lambda_*(\theta_2)\lambda_*(\theta_1)\mu_*(\Omega) \rangle = \qquad \text{d'après 1.3}$$

$$= \langle \omega, \lambda_*(\theta_1 * \theta_2)\mu_*(\Omega) \rangle = \qquad \text{d'après [5], III.3.3}$$

$$= \langle \omega, \lambda_*((\Omega \otimes (\theta_1 * \theta_2)) \circ \hat{\beta}_\mu) \rangle = \qquad \text{d'après 1.3}$$

$$= \langle \lambda(\omega), ((\Omega \otimes (\theta_1 * \theta_2)) \circ \hat{\beta}_\mu) \rangle =$$

$$= \langle \hat{\beta}_\mu(\lambda(\omega)), \Omega \otimes (\theta_1 * \theta_2) \rangle =$$

$$= \langle (i \otimes \hat{\Gamma})\hat{\beta}_\mu(\lambda(\omega)), \Omega \otimes \theta_1 \otimes \theta_2 \rangle \qquad \text{d'après [5], I.2.2}$$

d'où le résultat, par linéarité, densité et continuité.

1.5. PROPOSITION. *On a: $\hat{\beta}_{\mu_1 \times \mu_2} = (\sigma \otimes i)(i \otimes \hat{\beta}_{\mu_1})\hat{\beta}_{\mu_2}$.*

Démonstration. Soient ω dans M_*, Ω_1 dans $(A_{\mu_1})_*$, Ω_2 dans $(A_{\mu_2})_*$ et θ dans $\hat{M}_*$. On a:

$$\langle \hat{\beta}_{\mu_1 \times \mu_2}(\lambda(\omega)), \Omega_1 \otimes \Omega_2 \otimes \theta \rangle =$$

$$= \langle (\lambda \times (\mu_1 \times \mu_2))(\omega),\ \theta \otimes \Omega_1 \otimes \Omega_2 \rangle = \qquad \text{d'après 1.1 (ii)}$$

$$= \langle \lambda_*(\theta)(\mu_1 \times \mu_2)_*(\Omega_1 \otimes \Omega_2), \omega \rangle = \qquad \text{d'après 1.1 (i)}$$

$$= \langle \lambda_*(\theta)\mu_{1*}(\Omega_1)\mu_{2*}(\Omega_2), \omega \rangle = \qquad \text{d'après 1.1 (i)}$$

$$= \langle \lambda_*((\Omega_1 \otimes \theta) \circ \hat{\beta}_{\mu_1})\mu_{2*}(\Omega_2),\ \omega \rangle = \qquad \text{d'après 1.3}$$

$$= \langle (\lambda \times \mu_2)(\omega), ((\Omega_1 \otimes \theta) \circ \hat{\beta}_{\mu_1}) \otimes \Omega_2 \rangle = \qquad \text{d'après 1.1 (i)}$$

$$= \langle \sigma(\lambda \times \mu_2)(\omega),\ (\Omega_2 \otimes \Omega_1 \otimes \theta) \circ (i \otimes \hat{\beta}_{\mu_1}) \rangle =$$

$$= \langle \hat{\beta}_{\mu_2}(\lambda(\omega)),\ (\Omega_2 \otimes \Omega_1 \otimes \theta) \circ (i \otimes \hat{\beta}_{\mu_1}) \rangle = \qquad \text{d'après 1.1 (ii)}$$

$$= \langle (i \otimes \hat{\beta}_{\mu_1})\,\hat{\beta}_{\mu_2}(\lambda(\omega)),\ \Omega_2 \otimes \Omega_1 \otimes \theta \rangle =$$

$$= \langle (\sigma \otimes i)(i \otimes \hat{\beta}_{\mu_1})\,\hat{\beta}_{\mu_2}(\lambda(\omega)),\ \Omega_1 \otimes \Omega_2 \otimes \theta \rangle$$

d'où le résultat, par linéarité, densité et continuité.

1.6. LEMME. *Soit t dans* $\mathrm{Hom}(\mu_1, \mu_2)$. *Pour tous vecteurs η_1 de $\mathfrak{H}_{\mu_1}$ et η_2 de $\mathfrak{H}_{\mu_2}$, on a:*

$$\mu_{2*}(\Omega_{t\eta_1, \eta_2}) = \mu_{1*}(\Omega_{\eta_1, t^*\eta_2})$$

où $\Omega_{\xi,\eta}$ désigne la forme vectorielle associée aux vecteurs ξ et η.

Démonstration. Soit ω dans M_*. On a:

$$\langle \mu_{2*}(\Omega_{t\eta_1, \eta_2}), \omega \rangle = \langle \mu_2(\omega),\ \Omega_{t\eta_1, \eta_2} \rangle = (\mu_2(\omega)\, t\eta_1 | \eta_2) =$$

$$= (t\mu_1(\omega)\eta_1 | \eta_2) = \qquad \text{par hypothèse}$$

$$= (\mu_1(\omega)\eta_1 | t^*\eta_2) = \langle \mu_1(\omega),\ \Omega_{\eta_1, t^*\eta_2} \rangle = \langle \mu_{1*}(\Omega_{\eta_1, t^*\eta_2}),\ \omega \rangle$$

d'où le résultat.

1.7. LEMME. *Soit t dans* $\mathrm{Hom}(\mu_1, \mu_2)$. *Alors* $1 \otimes t$ *entrelace* $\mu \times \mu_1$ et $\mu \times \mu_2$.

Démonstration. Soient ω dans M_*, ξ et ξ' dans $\mathfrak{H}_\mu$, η_1 dans $\mathfrak{H}_{\mu_1}$ et η_2 dans $\mathfrak{H}_{\mu_2}$. On a:

$$((1 \otimes t)(\mu \times \mu_1)(\omega)(\xi \otimes \eta_1) | \xi' \otimes \eta_2) =$$

$$= ((\mu \times \mu_1)(\omega)(\xi \otimes \eta_1) | \xi' \otimes t^* \eta_2) = \langle (\mu \times \mu_1)(\omega), \Omega_{\xi,\xi'} \otimes \Omega_{\eta_1, t^*\eta_2} \rangle =$$

$$= \langle \mu_*(\Omega_{\xi,\xi'}) \mu_{1*}(\Omega_{\eta_1, t^*\eta_2}), \omega \rangle = \qquad \text{d'après 1.1 (i)}$$

$$= \langle \mu_*(\Omega_{\xi,\xi'}) \mu_{2*}(\Omega_{t\eta_1, \eta_2}), \omega \rangle = \qquad \text{d'après 1.6}$$

$$= \langle (\mu \times \mu_2)(\omega), \Omega_{\xi,\xi'} \otimes \Omega_{t\eta_1, \eta_2} \rangle = \qquad \text{d'après 1.1 (i)}$$

$$= ((\mu_1 \times \mu_2)(\omega)(1 \otimes t)(\xi \otimes \eta_1) | \xi' \otimes \eta_2)$$

d'où le résultat, par linéarité, densité et continuité.

1.8. REMARQUE. Grâce à 1.7, on voit bien que l'opération qui au couple μ_1, μ_2) associe $\mu_1 \times \mu_2$ est un foncteur de $\mathrm{Rep}\, M_* \times \mathrm{Rep}\, M_*$ dans $\mathrm{Rep}\, M_*$.

Par ailleurs grâce à [3], théorème 1.5, le produit de Kronecker est associatif; il est facile de vérifier que la représentation 1 de M_*, définie par: $\omega \to \langle \omega, 1 \rangle$ est un élément neutre pour ce produit.

On en déduit aisément que $(\mathrm{Rep}\, M_*, \times, 1)$ est une catégorie avec multiplication au sens de [1].

1.9. PROPOSITION. *Soit t dans* $\mathrm{Hom}(\mu_1, \mu_2)$. *On a, pour tout x de* $\hat{M}$:

$$(t \otimes 1)\hat{\beta}_{\mu_1}(x) = \hat{\beta}_{\mu_2}(x)(t \otimes 1).$$

Démonstration. Soit ω dans M_*. On a:

$$(t \otimes 1)\hat{\beta}_{\mu_1}(\lambda(\omega)) = (t \otimes 1)\sigma(\lambda \times \mu_1)(\omega) = \qquad \text{d'après 1.1 (ii)}$$

$$= \sigma((1 \otimes t)(\lambda \times \mu_1)(\omega)) =$$

$$= \sigma((\lambda \times \mu_2)(\omega)(1 \otimes t)) = \qquad \text{d'après 1.7}$$

$$= \hat{\beta}_{\mu_2}(\lambda(\omega))(t \otimes 1) \qquad \text{d'après 1.1 (ii)}$$

d'où le résultat, par densité et continuité.

1.10. EXEMPLES. (i) Soit u dans le groupe intrinsèque de $\mathbf{K}$ ([19], 1.10). On peut considérer u comme une représentation de M_* de dimension 1. Alors, d'après [3], 2.14, on a:

$$\hat{\beta}_u = \operatorname{Ad} u|\hat{M}.$$

(ii) Soit G un groupe localement compact, λ_G sa représentation régulière gauche, alors, pour tout s de G, $\lambda_G(s)$ appartient au groupe intrinsèque de l'algèbre de Kac symétrique $\mathrm{KS}(G)$ (cf. [5], VIII, 1.7). Et, en appliquant (i), pour tout f de $L^\infty(G)$ et r de G, on obtient:

$$\hat{\beta}_{\lambda_G(s)}(f)(r) = (\lambda_G(s) f \lambda_G(s)^*)(r) = f(s^{-1}r).$$

Ainsi $\hat{\beta}_{\lambda_G(s)}$ est la translation à gauche par s^{-1}.

(iii) D'après [3], 4.2 et 4.3, si $\mathbf{K}$ est l'algèbre de Kac abélienne $\mathrm{KA}(G)$ (cf. [5], VIII, 1.7), les représentations de M_* sont en bijection canonique avec les représentations unitaires de G et le produit de Kronecker $\mu_1 \times \mu_2$ est le produit tensoriel des représentations. Dans ce cas, pour s de G, on a:

$$\hat{\beta}_\mu(\lambda(s)) = \mu(s) \otimes \lambda(s).$$

1.11. DÉFINITION. Pour tout μ de $\operatorname{Rep} M_*$ et tout x de $\hat{M}'$, on posera:

$$\gamma_\mu(x) = (J\hat{J} \otimes 1)\,\sigma\hat{\beta}_\mu(J\hat{J}xJ\hat{J})\,(J\hat{J} \otimes 1).$$

1.12. PROPOSITION. (i) *Pour tout μ de* $\operatorname{Rep} M_*$, γ_μ *est l'unique homomorphisme normal de $\hat{M}'$ dans $\hat{M}' \otimes A_\mu$ tel que $\gamma_\mu(1) = 1 \otimes 1$, et qui vérifie:*

$$\gamma_\mu \circ \rho = \rho \times \mu, \quad \textit{où } \rho \textit{ a été défini en } 1.1 \text{ (iii)}.$$

(ii) *On a:*

$$(\hat{\Gamma}' \otimes i)\gamma_\mu = (i \otimes \gamma_\mu)\hat{\Gamma}'.$$

Démonstration. La définition 1.11 entraîne immédiatement (i). D'autre part, en posant $v = \operatorname{Ad} J\hat{J}$, on trouve:

$$
\begin{aligned}
(\hat{\Gamma}' \otimes i)\gamma_\mu &= (\hat{\Gamma}' \otimes i)(v \otimes i)\sigma\hat{\beta}_\mu v = && \text{par définition}\\
&= (((v \otimes v)\sigma\hat{\Gamma}) \otimes i)\sigma\hat{\beta}_\mu v = && \text{d'après [18], II.8}\\
&= (v \otimes v \otimes i)(\sigma\hat{\Gamma} \otimes i)\sigma\hat{\beta}_\mu v = &&\\
&= (v \otimes v \otimes i)(\sigma \otimes i)(i \otimes \sigma)(\sigma \otimes i)(i \otimes \hat{\Gamma})\hat{\beta}_\mu v = &&\\
&= (v \otimes v \otimes i)(\sigma \otimes i)(i \otimes \sigma)(\sigma \otimes i)(\hat{\beta}_\mu \otimes i)\hat{\Gamma} v = && \text{d'après 1.4}\\
&= (v \otimes v \otimes i)(i \otimes \sigma\hat{\beta}_\mu)\sigma\hat{\Gamma} v = &&\\
&= (v \otimes v \otimes i)(i \otimes \sigma\hat{\beta}_\mu)(v \otimes v)\hat{\Gamma}' = && \text{d'après [18], II.8}\\
&= (i \otimes ((v \otimes i)\sigma\hat{\beta}_\mu v))\hat{\Gamma}' = &&\\
&= (i \otimes \gamma_\mu)\hat{\Gamma}' && \text{par définition,}
\end{aligned}
$$

d'où (ii).

1.13. PROPOSITION. *Avec les notations de* 1.5, 1.9 *et* 1.2 *respectivement, on a immédiatement:*

(i) $\gamma_{\mu_1 \times \mu_2} = (\gamma_{\mu_1} \otimes i)\, \gamma_{\mu_2}$;

(ii) $(1 \otimes t)\, \gamma_{\mu_1}(x) = \gamma_{\mu_2}(x)\,(1 \otimes t)$ *pour tout* x *de* $\hat{M}'$;

(iii) $(i \otimes \Phi)\, \gamma_{\mu_1} = \gamma_{\mu_2}$.

1.14. CAS PARTICULIERS: (i) Soit u un élément du groupe intrinsèque de $\mathbf{K}$. Comme en 1.10 (i), on note encore u la représentation de M_* associée. On aura:

$$\gamma_u = v\hat{\beta}_u v =$$

$$= v(\mathrm{Ad}\, u \,|\, \hat{M})v = \qquad \text{d'après 1.10 (i)}$$

$$= \mathrm{Ad}(J\hat{J}uJ\hat{J}) \,|\, \hat{M}'.$$

Comme d'autre part, d'après [17], I.10 et [5], 3.1.5 (a) on a:

$$u = \varkappa(u^*) = \hat{J}u\hat{J}.$$

On trouve: $\gamma_u = \mathrm{Ad}(JuJ) \,|\, \hat{M}'$. En particulier $\gamma_1 = \mathrm{id}_{\hat{M}'}$.

(ii) Si G est un groupe localement compact et $\mathbf{K} = \mathrm{KS}(G)$, en appliquant (i) à $\lambda_G(s)$ pour tout s de G, comme $\hat{M}'$ est égal à $L^\infty(G)$, on trouvera:

$$\gamma_{\lambda_G(s)} = \mathrm{Ad}\, \rho(s) \,|\, L^\infty(G);$$

c'est donc la translation à droite par s.

(iii) Comme $\rho = v\lambda$, on a clairement

$$\hat{\beta}_\rho = (v \otimes i)\hat{\beta}_\lambda =$$

$$= (v \otimes i)\, \hat{\Gamma} \qquad \text{d'après [3], 2.14 (iv).}$$

Il en résulte que:

$$\gamma_\rho = (v \otimes i)\, \sigma(v \otimes i)\, \hat{\Gamma} v =$$

$$= (v \otimes v)\, \sigma\hat{\Gamma} v =$$

$$= \hat{\Gamma}' \qquad \text{d'après [18], II.8.}$$

2. UNE AUTRE CONCEPTION DES ACTIONS DES ALGÈBRES DE KAC SUR LES ALGÈBRES DE VON NEUMANN

Une action α de $\mathbf{K}^{\wedge\prime}$ (par exemple, une coaction de G) sur $\mathscr{A}$ permet de munir $\mathscr{A}$ d'une structure de $\hat{M}'$-comodule (par exemple, de $\mathscr{R}(G)$-comodule). A toute représentation μ de M_* (par exemple, de G), on va associer un morphisme α_μ qui permet de munir $\mathscr{A}$ d'une structure de A_μ-comodule; cette construction est fonctorielle et "multiplicative" (théorème 2.2); de plus, le morphisme α_μ est égal à l'action α de départ. Une "décomposition" analogue peut s'effectuer pour un α-cocycle (théorème 2.7); si α_1 et α_2 sont deux actions équivalentes, leurs décompositions $(\alpha_1)_\mu$ et $(\alpha_2)_\mu$ sont équivalentes. Enfin, le théorème 2.13 donne une réciproque des théorèmes 2.2 et 2.7.

2.1. LEMME. *Soit δ une action de $\mathbf{K}$ sur $\mathscr{A}$. Soient $\mathscr{B}$ une algèbre de von Neumann et x dans $\mathscr{A} \otimes M \otimes \mathscr{B}$. Alors, les assertions:*

(i) $x \in \delta(\mathscr{A}) \otimes \mathscr{B}$,

(ii) $(\delta \otimes i \otimes i)(x) = (i \otimes \Gamma \otimes i)(x)$

sont équivalentes.

Démonstration. Il résulte de [4], I. 1(i) que (i) entraîne (ii). Soit Ω dans $\mathscr{B}_*$. On a:

$$(\delta \otimes i)(i \otimes i \otimes \Omega)(x) = (i \otimes i \otimes i \otimes \Omega)(\delta \otimes i \otimes i)(x) =$$

$$= (i \otimes i \otimes i \otimes \Omega)(i \otimes \Gamma \otimes i)(x) = \qquad \text{par hypothèse}$$

$$= (i \otimes \Gamma)(i \otimes i \otimes \Omega)(x).$$

En utilisant [6], IV.2 (iii) on en conclut que $(i \otimes i \otimes \Omega)(x)$ appartient à $\delta(\mathscr{A})$, ce qui achève la démonstration.

2.2. THÉORÈME. *Soient α une action de $\hat{\mathbf{K}}'$ sur $\mathscr{A}$, μ, μ_1 et μ_2 dans* $\operatorname{Rep} M_*$ *et t un opérateur d'entrelacement entre μ_1 et μ_2. Alors:*

(i) *il existe un unique morphisme normal α_μ de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A} \otimes A_\mu$ tel que*

$$(\alpha \otimes i)\alpha_\mu = (i \otimes \gamma_\mu)\alpha.$$

Les morphismes α_μ vérifient $\alpha_\mu(1) = 1 \otimes 1$, et:

(ii) $\alpha_{\mu_1 \times \mu_2} = (\alpha_{\mu_1} \otimes i)\, \alpha_{\mu_2}$;

(iii) $(1 \otimes t)\, \alpha_{\mu_1}(x) = \alpha_{\mu_2}(x)(1 \otimes t)$ *pour tout x de $\mathscr{A}$.*

Démonstration. Soit x dans $\mathscr{A}$. On a:

$$(\alpha \otimes i \otimes i)(i \otimes \gamma_\mu)\alpha(x) = (i \otimes i \otimes \gamma_\mu)(\alpha \otimes i)\alpha(x) =$$

$$= (i \otimes i \otimes \gamma_\mu)(i \otimes \hat{\Gamma}')\alpha(x) = \qquad \text{d'après [4], I. 1(i)}$$

$$= (i \otimes \hat{\Gamma}' \otimes i)(i \otimes \gamma_\mu)\alpha(x) \qquad \text{d'après 1.1 (ii).}$$

Il résulte donc de 2.1 que $(i \otimes \gamma_\mu)\alpha(x)$ appartient à $\alpha(\mathscr{A}) \otimes A_\mu$. Comme $\alpha \otimes i$ est injectif, il existe un unique élément $\alpha_\mu(x)$ dans $\mathscr{A} \otimes A_\mu$ tel que $(\alpha \otimes i)\alpha_\mu(x) = (i \otimes \gamma_\mu)\alpha(x)$, et grâce à 1.12 on a clairement $\alpha_\mu(1) = 1 \otimes 1$. On vérifie aisément que α_μ est un morphisme normal injectif de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A} \otimes A_\mu$, d'où (i).

On a:

$$(\alpha \otimes i \otimes i)(\alpha_{\mu_1} \otimes i)(\alpha_{\mu_2}) = (i \otimes \gamma_{\mu_1} \otimes i)(\alpha \otimes i)\alpha_{\mu_2} = \qquad \text{d'après (i)}$$

$$= (i \otimes \gamma_{\mu_1} \otimes i)(i \otimes \gamma_{\mu_2})\alpha = \qquad \text{d'après (ii)}$$

$$= (i \otimes \gamma_{\mu_1 \times \mu_2})\alpha = \qquad \text{d'après 1.13 (i)}$$

$$= (\alpha \otimes i \otimes i)\alpha_{\mu_1 \times \mu_2} \qquad \text{d'après (i)}$$

l'injectivité de $\alpha \otimes i \otimes i$ permet d'en déduire (ii).

On a:

$$(\alpha \otimes i)((1 \otimes t)\alpha_{\mu_1}(x)) = (1 \otimes 1 \otimes t)(\alpha \otimes i)\alpha_{\mu_1}(x) =$$

$$= (1 \otimes 1 \otimes t)(i \otimes \gamma_{\mu_1})\alpha(x) = \qquad \text{d'après (i)}$$

$$= (i \otimes \gamma_{\mu_2})\alpha(x)(1 \otimes 1 \otimes t) = \qquad \text{d'après 1.13 (ii)}$$

$$= (\alpha \otimes i)\alpha_{\mu_2}(x)(1 \otimes 1 \otimes t) = \qquad \text{d'après (i)}$$

$$= (\alpha \otimes i)(\alpha_{\mu_2}(x)(1 \otimes t))$$

l'injectivité de $\alpha \otimes i$ permet d'en déduire (iii).

2.3. Corollaire. *Avec les notations de* 1.2 *et* 2.2, *on a:*

$$(i \otimes \Phi)\alpha_{\mu_1} = \alpha_{\mu_2}.$$

Démonstration. Comme $\alpha \otimes i$ est injectif, cela se déduit immédiatement de 1.1 (iii).

2.4. CAS PARTICULIERS. (i) Dans le cas où $\mathscr{A} = \hat{M}'$ et $\alpha = \hat{\Gamma}'$, on a:

$$(\hat{\Gamma}' \otimes i)(\hat{\Gamma}')_\mu = (i \otimes \gamma_\mu)\hat{\Gamma}' = \qquad \text{d'après 2.2 (i)}$$

$$= (\hat{\Gamma}' \otimes i)\gamma_\mu \qquad \text{d'après 1.12 (ii).}$$

L'injectivité de $\hat{\Gamma}' \otimes i$ permet de conclure que $(\hat{\Gamma}')_\mu = \gamma_\mu$.

(ii) Soit δ une action de $\mathbf{K}$ sur $\mathscr{A}$. L'action duale $\delta\tilde{}$ ([4], II.6) est une action de $\mathbf{K}^{\wedge\prime}$ sur le produit croisé $\mathscr{W}^*(\delta)$. Avec les notations précédentes, on peut définir les $(\delta\tilde{})_\mu$ comme étant les uniques morphismes de $\mathscr{W}^*(\delta)$ dans $\mathscr{W}^*(\delta) \otimes A_\mu$ tels que l'on ait:

(a) $\qquad (\delta\tilde{})_\mu(\delta(x)) = \delta(x) \otimes 1$ pour tout x de $\mathscr{A}$.

(b) $\qquad (\delta\tilde{})_\mu(1 \otimes y) = 1 \otimes \gamma_\mu(y)$ pour tout y de $\hat{M}'$.

Par définition de $\mathscr{W}^*(\delta)$, l'unicité est, en effet, claire; de plus, d'après 2.4 (iii), $(\delta\tilde{})_\mu$ vérifie (a); et enfin, l'on a, par définition:

$$(\delta\tilde{} \otimes i)(\delta\tilde{})_\mu(1 \otimes y) = (i \otimes i \otimes \gamma_\mu)\delta\tilde{}(1 \otimes y) =$$

$$= (i \otimes i \otimes \gamma_\mu)(1 \otimes \hat{\Gamma}'(y)) = \qquad \text{d'après [4], II.1}$$

$$= 1 \otimes (i \otimes \gamma_\mu)\hat{\Gamma}'(y) =$$

$$= 1 \otimes (\hat{\Gamma}' \otimes i)\gamma_\mu(y) = \qquad \text{d'après 1.12 (ii)}$$

$$= (\delta\tilde{} \otimes i)(1 \otimes \gamma_\mu(y))$$

ce qui, par injectivité de $(\delta\tilde{} \otimes i)$ implique (b).

(iii) Dans le cas général, si x appartient à $\mathscr{A}^\alpha$, on a:

$$\alpha_\mu(x) = x \otimes 1.$$

Dans le cas où α est l'action triviale, cela implique que $(1_{\mathscr{A}}^{\mathbf{K}^{\wedge\prime}})_\mu$ est l'ampliation de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A} \otimes \mathscr{L}(\mathfrak{H}_\mu)$.

2.5. PROPOSITION. *Le morphisme α_ρ, associé à la représentation ρ au sens de 2.2, est égal à l'action α.*

Démonstration. On a:

$$(\alpha \otimes i)\,\alpha_\rho = (i \otimes \gamma_\rho)\,\alpha = \qquad \text{par définition}$$

$$= (i \otimes \hat{\Gamma}')\,\alpha = \qquad \text{d'après 1.14 (iii)}$$

$$= (\alpha \otimes i)\,\alpha \qquad \text{par définition de } \alpha.$$

L'injectivité de $\alpha \otimes i$ permet de conclure.

2.6. CAS PARTICULIERS. (i) En notant encore u la représentation de M_* définie par un élément u du groupe intrinsèque de $\mathbf{K}$, le théorème 2.2 permet de définir α_u comme élément de $\operatorname{Aut}\mathscr{A}$. Alors l'application $u \to \alpha_u$ est un morphisme de $G(\mathbf{K})$ dans $\operatorname{Aut}\mathscr{A}$. On trouve en particulier $\alpha_1 = \mathrm{id}_{\mathscr{A}}$.

(ii) Dans le cas où $\mathbf{K} = \mathrm{KS}(G)$, on sait que $G(\mathbf{K}) = \lambda(G)$; $\hat{\mathbf{K}}' = \mathrm{KA}(G)$ et α est une action continue de G sur $\mathscr{A}$ ([4], I.3 (ii)) au sens classique. Soient alors x dans $\mathscr{A}$ et s dans G. L'élément $\alpha(\alpha_{\lambda(s)}(x))$, où $\alpha_{\lambda(s)}$ est défini comme ci-dessus en (i), s'identifie à la fonction $t \to \alpha_t(\alpha_{\lambda(s)}(x))$. Comme $\gamma_{\lambda(s)}(\alpha(x))$ est la fonction $t \to \alpha_{ts}(x)$, ainsi que cela résulte de 1.14 (ii), on en déduit que $\alpha_{\lambda(s)} = \alpha_s$.

2.7. THÉORÈME. *Soient α une action de $\mathbf{K}^{\wedge\prime}$ sur A, B une algèbre de von Neumann, δ un morphisme injectif de A dans $A \otimes B$. Alors les assertions suivantes:*

(i) *il existe une représentation μ de M_* telle que $\delta = \alpha_\mu$*

et

(ii) *il existe un morphisme γ de $\hat{M}'$ dans $\hat{M}' \otimes B$ tel que*

$$(i \otimes \gamma)\,\alpha = (\alpha \otimes i)\,\delta$$

et

$$(\hat{\Gamma}' \otimes i)\,\gamma = (i \otimes \gamma)\,\hat{\Gamma}'$$

sont équivalentes.

Démonstration. Cela résulte clairement de 2.19.

2.7′ THÉORÈME. *Soient α une action de $\mathbf{K}^{\wedge\prime}$ sur $\mathscr{A}$, μ, μ_1 et μ_2 des objets de* $\operatorname{Rep} M_*$, *t un élément de* $\operatorname{Hom}(\mu_1, \mu_2)$ *et U un α-cocycle au sens de* [4], I.6(i). *Alors*

(i) *il existe un unique opérateur unitaire U dans $\mathscr{A} \otimes A_\mu$ tel que l'on ait:*

$$(\alpha \otimes i)\,(U_\mu) = (U^* \otimes 1)\,(i \otimes \gamma_\mu)\,(U).$$

Les unitaires U_μ *vérifient:*

(ii) $$U_{\mu_1 \times \mu_2} = (U_{\mu_1} \otimes 1)(\alpha_{\mu_1} \otimes i)(U_{\mu_2});$$

(iii) $$(1 \otimes t)\, U_{\mu_1} = U_{\mu_2}(1 \otimes t).$$

Démonstration. Posons $V = (U^* \otimes 1)\,(i \otimes \gamma_\mu)(U)$. Il est clair que V est un unitaire de $\mathscr{A} \otimes \hat{M}' \otimes A_\mu$. On a:

$$(\alpha \otimes i \otimes i)(V) = ((\alpha \otimes i)(U^*) \otimes 1)(\alpha \otimes i \otimes i)(i \otimes \gamma_\mu)(U) =$$

$$= ((\alpha \otimes i)(U^*) \otimes 1)(i \otimes i \otimes \gamma_\mu)(\alpha \otimes i)(U) =$$

$$= ((\alpha \otimes i)(U^*) \otimes 1)(i \otimes i \otimes \gamma_\mu)((U^* \otimes 1)(i \otimes \hat{\Gamma}')(U)) =$$

d'après [4], I.6 (i)

$$= ((\alpha \otimes i)(U^*) \otimes 1)\,(U^* \otimes 1 \otimes 1)\,(i \otimes (i \otimes \gamma_\mu)\,\hat{\Gamma}')\,(U) =$$

$$= ((\alpha \otimes i)(U^*)(U^* \otimes 1) \otimes 1)\,(i \otimes (\hat{\Gamma}' \otimes i)\,\gamma_\mu)\,(U) =$$

d'après 1.12 (ii)

$$= ((i \otimes \hat{\Gamma}')(U^*) \otimes 1)\,(i \otimes (\hat{\Gamma}' \otimes i)\,\gamma_\mu)\,(U) =$$

d'après [4], I.6 (i)

$$= (i \otimes \hat{\Gamma}' \otimes i)((U^* \otimes 1)\,(i \otimes \gamma_\mu)\,(U)) =$$

$$= (i \otimes \hat{\Gamma}' \otimes i)\,(V).$$

Il résulte donc de 2.1 que V appartient à $\alpha(\mathscr{A}) \otimes A_\mu$.

Comme $\alpha \otimes i$ est injectif, il existe un unique unitaire U_μ de $\mathscr{A} \otimes A_\mu$ tel que $(\alpha \otimes i)(U_\mu) = V$, d'où (i).

En utilisant (i) et 1.13 (i), on obtient:

$$(\alpha \otimes i \otimes i)((U_{\mu_1} \otimes 1)\,(\alpha_{\mu_1} \otimes i)\,(U_{\mu_2})) = ((\alpha \otimes i)\,(U_{\mu_1}) \otimes 1)((\alpha \otimes i)\,\alpha_{\mu_1} \otimes i)\,(U_{\mu_2}) =$$

$$= ((U^* \otimes 1)\,(i \otimes \gamma_{\mu_1})\,(U) \otimes 1)\,((i \otimes \gamma_{\mu_1})\,\alpha \otimes i)\,(U_{\mu_2}) =$$

$$= (U^* \otimes 1 \otimes 1)\,(i \otimes \gamma_{\mu_1} \otimes i)\,(U \otimes 1)\,(i \otimes \gamma_{\mu_1} \otimes i)\,(\alpha \otimes i)\,(U_{\mu_2}) =$$

$$= (U^* \otimes 1 \otimes 1)\,(i \otimes \gamma_{\mu_1} \otimes i)\,((U \otimes 1)\,(\alpha \otimes i)\,(U_{\mu_2})) =$$

$$= (U^* \otimes 1 \otimes 1)\,(i \otimes \gamma_{\mu_1} \otimes i)\,(i \otimes \gamma_{\mu_2})\,(U) = (U^* \otimes 1 \otimes 1)\,(i \otimes \gamma_{\mu_1 \times \mu_2})\,(U),$$

d'où (ii), par définition de $U_{\mu_1 \times \mu_2}$.

2.8. Corollaire. *Avec les notations de* 1.2 *et* 2.7, *on a:*

$$(i \otimes \Phi)(U_{\mu_1}) = U_{\mu_2}.$$

Démonstration. Comme $\alpha \otimes i$ est injectif, cela se déduit immédiatement de 1.13 (iii).

2.9. Cas particuliers. (i) Avec les notations précédentes, on trouve $U_\rho = U$.
(ii) Avec les notations de 2.5 (iii), on vérifiera aisément que $U_{\lambda_{G(s)}} = u_s$.
(iii) Dans le cas où U est un $1_{\mathscr{A}}^{\mathbf{K}^{\wedge\prime}}$-cocycle, on a:

$$(i \otimes \sigma)(U_\mu \otimes 1) = (U^* \otimes 1)(i \otimes \gamma_\mu)(U).$$

(iv) Si 1 désigne la représentation triviale de M_*, $(\omega \to \omega(1))$, on a: $U_1 = 1_{\mathscr{A}}$.

2.10. Théorème. *Soient α_1 (resp. α_2) une action de $\mathbf{K}^{\wedge\prime}$ sur une algèbre de von Neumann $\mathscr{A}_1$ (resp. $\mathscr{A}_2$), Ψ un isomorphisme de $\mathscr{A}_1$ sur $\mathscr{A}_2$ et U un α_1-cocycle tels que $\alpha_2 \sim \alpha_1\ (\Psi, i, U)$ au sens de* [4], I.10 *(c'est-à-dire que l'on a*

$$\alpha_2(\Psi(x)) = (\Psi \otimes i)(U\alpha_1(x)U^*) \quad \textit{pour tout } x \textit{ de } \mathscr{A}_1).$$

Alors, pour tout μ de Rep M_* *et tout x de $\mathscr{A}_1$, on a:*

$$(\alpha_2)_\mu(\Psi(x)) = (\Psi \otimes i)(U_\mu(\alpha_1)_\mu(x)U_\mu^*).$$

Démonstration. On a:

$$(\alpha_2 \otimes i)(\alpha_2)_\mu(\Psi(x)) =$$

$$= (i \otimes \gamma_\mu)\alpha_2\Psi(x) = \qquad \text{d'après 2.2 (i)}$$

$$= (i \otimes \gamma_\mu)(\Psi \otimes i)(U\alpha_1(x)U^*) = \qquad \text{par hypothèse}$$

$$= (\Psi \otimes i \otimes i)(i \otimes \gamma_\mu)(U\alpha_1(x)U^*) =$$

$$= (\Psi \otimes i \otimes i)((U \otimes 1)(\alpha_1 \otimes i)(U_\mu)(i \otimes \gamma_\mu)\alpha_1(x)(\alpha_1 \otimes i)(U_\mu^*)(U^* \otimes 1)) =$$
d'après 2.7 (i)

$$= (\Psi \otimes i \otimes i)((U \otimes 1)(\alpha_1 \otimes i)(U_\mu)(\alpha_1 \otimes i)\alpha_\mu(x)(\alpha_1 \otimes i)(U_\mu^*)(U^* \otimes 1)) =$$
d'après 2.2 (i)

$$= (\Psi \otimes i \otimes i)((U \otimes 1)(\alpha_1 \otimes i)(U_\mu\alpha_\mu(x)U_\mu^*)(U^* \otimes 1)) =$$

$$= (\alpha_2 \otimes i)((\Psi \otimes i)(U_\mu\alpha_\mu(x)U_\mu^*)) \qquad \text{par hypothèse}$$

d'où le résultat, grâce à l'injectivité de $\alpha_2 \otimes i$.

2.11. PROPOSITION. (i) *Soient* $\mathscr{A}_1$ *une algèbre de von Neumann,* $\mathscr{A}_2$ *une sous--algèbre de von Neumann de* $\mathscr{A}_1$, α_1 *une action de* $\mathbf{K}^{\wedge\prime}$ *sur* $\mathscr{A}_1$ *telle que* $\alpha_1(\mathscr{A}_2) \subset \mathscr{A}_2 \otimes \hat{M}'$. *On note* α_2 *l'action de* $\mathbf{K}^{\wedge\prime}$ *sur* $\mathscr{A}_2$ *définie par restriction de* α_1. *On a alors :*

$$(\alpha_2)_\mu = (\alpha_1)_\mu \mid \mathscr{A}_2 .$$

(ii) *Soient* $\mathfrak{H}$ *un espace hilbertien,* $\mathscr{A}$ *une algèbre de von Neumann opérant sur* $\mathfrak{H}$, U *un* $1_{\mathbf{K}^{\wedge\prime}}^{\mathscr{L}(\mathfrak{H})}$*-cocycle dont on suppose qu'il implémente* α *(cf.* [4], I.9 (ii)*). On a alors:*

$$\alpha_\mu(x) = U_\mu(x \otimes 1)U_\mu^*$$

pour tout μ *de* $\operatorname{Rep} M$ *et tout* x *de* $\mathscr{A}$.

Démonstration. La preuve de (i) est triviale; celle de (ii) est un corollaire immédiat de (i), 2.4 (iii) et 2.10.

2.12. LEMME. (i) *Soit* η *un vecteur de* H. *L'opérateur* e_η *de* H *dans* $H \otimes H$ *définie par* $e_\eta(\xi) = (\hat{J} \otimes \hat{J})\sigma W^*\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J})(\eta \otimes \xi)$ *pour tout* ξ *de* H, *appartient à* $\operatorname{Hom}(\rho, \rho \times \rho)$.

(ii) *Soit* ζ *un vecteur de* $\mathfrak{H}_\mu$. *L'opérateur* e'_ζ *de* H *dans* $H \otimes \mathfrak{H}_\mu$ *défini par* $e'_\zeta(\xi) = (J\hat{J} \otimes 1)\sigma V_\mu \sigma(J\hat{J} \otimes 1)(\xi \otimes \zeta)$ *pour tout* ξ *de* H, *où* V_μ *est le générateur de* μ, *appartient à* $\operatorname{Hom}(\rho, \rho \times \mu)$.

Démonstration. On a:

$$\hat{\Gamma}' = (\hat{\Gamma}')_\rho = \qquad \text{d'après 2.5 (i).}$$

$$= \gamma_\rho \qquad \text{d'après 2.4 (i).}$$

Il en résulte

$$\hat{\Gamma}' \circ \rho = \rho \times \rho \qquad \text{d'après 1.12 (i).}$$

De plus, pour tout x de $\hat{M}'$, d'après [6], 2.2.5 (b) appliqué à $\mathbf{K}^{\wedge\prime}$ (cf. [18], 2.10), on a:

$$\Gamma^{\wedge\prime}(x) = (\hat{J} \otimes \hat{J})\sigma W^*\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J})(1 \otimes x)(\hat{J} \otimes \hat{J})\sigma W\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}).$$

Ainsi, pour tout ω de M_* on aura, d'après ce qui précède:

$$(\rho \times \rho)(\omega) = (\hat{J} \otimes \hat{J})\sigma W^*\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J})(1 \otimes \rho(\omega))(\hat{J} \otimes \hat{J})\sigma W\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}).$$

On en déduit que:

$$(\rho \times \rho)(\omega)e_\eta(\xi) = e_\eta(\rho(\omega)\xi)$$

d'où (i).

De façon analogue, on a:

$$\gamma_\mu \circ \rho = \rho \times \mu \qquad \text{d'après 1.12 (i);}$$

comme, d'après 1.11 et [5], 2.1.11, pour tout x de $\hat{M}'$, on a:

$$\gamma_\mu(x) = (J\hat{J} \otimes 1)\sigma V_\mu \sigma(J\hat{J} \otimes 1)(x \otimes 1)(J\hat{J} \otimes 1)\sigma V_\mu \sigma(J\hat{J} \otimes 1)$$

on en déduit que pour tout ω de M_* on obtient:

$$(\rho \times \mu)(\omega) = (J\hat{J} \otimes 1)\sigma V_\mu \sigma(J\hat{J} \otimes 1)(\rho(\omega) \otimes 1)(J\hat{J} \otimes 1)\sigma V_\mu \sigma(J\hat{J} \otimes 1)$$

d'où (ii) en concluant comme ci-dessus.

2.13. THÉORÈME. *Soient $\mathscr{A}$ une algèbre de von Neumann, $\mathscr{C}$ une sous-catégorie pleine de* $\operatorname{Rep} M_*$, *stable par multiplication et contenant ρ.*

(i) *Supposons que pour tout μ de $\mathscr{C}$ il existe un morphisme injectif ε_μ de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A} \otimes A_\mu$ tel que:*

(a) $\varepsilon_\mu(1) = 1$;

(b) $\varepsilon_{\mu_1 \times \mu_2} = (\varepsilon_{\mu_1} \otimes i)\varepsilon_{\mu_2}$ *pour tous μ_1, μ_2 de $\mathscr{C}$;*

(c) $(1 \otimes t)\varepsilon_{\mu_1}(x) = \varepsilon_{\mu_2}(x)(1 \otimes t)$ *pour tous x de $\mathscr{A}$, μ_1 et μ_2 de $\mathscr{C}$ et t de* $\operatorname{Hom}(\mu_1, \mu_2)$.

Alors ε_ρ est une action de $\hat{\mathbf{K}}'$ sur $\mathscr{A}$ et, avec les notations de 3.2, *on a:* $(\varepsilon_\rho)_\mu = \varepsilon_\mu$ *pour tout μ de $\mathscr{C}$.*

(ii) *Supposons de plus que pour tout μ de $\mathscr{C}$, il existe un unitaire Y_μ de $\mathscr{A} \otimes A_\mu$ tel que, pour tous μ_1 et μ_2 de $\mathscr{C}$, on ait:*

(d) $Y_{\mu_1 \times \mu_2} = (Y_{\mu_1} \otimes 1)(\varepsilon_{\mu_1} \otimes i)(Y_{\mu_2})$;

(e) $(1 \otimes t)Y_{\mu_1} = Y_{\mu_2}(1 \otimes t)$ *pour tout t de* $\operatorname{Hom}(\mu_1, \mu_2)$.

Alors Y_ρ est un ε_ρ-cocycle, et, avec les notations de 2.7, *on a:*

$$(Y_\rho)_\mu = Y_\mu \quad \textit{pour tout } \mu \textit{ de } \mathscr{C}.$$

Démonstration. Supposons $\mathscr{A}$ réalisée dans un espace hilbertien $\mathfrak{H}$. Soient ξ, η dans H, ζ dans $\mathfrak{H}$, x dans $\mathscr{A}$ et y dans $\mathscr{A} \otimes \hat{M}'$. Avec les notations de 2.12, on a:

$$(*) \qquad (1 \otimes e_\eta)(\zeta \otimes \xi) = (1 \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\sigma W^* \sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}))(1 \otimes \sigma)(\zeta \otimes \xi \otimes \eta).$$

Par linéarité, densité et continuité, on en déduit:

$$(**) \qquad (1 \otimes e_\eta)y(\zeta \otimes \xi) = (1 \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\sigma W^* \sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}))(1 \otimes \sigma)(y \otimes 1)(\zeta \otimes \xi \otimes \eta).$$

Il en résulte que:

$$(\varepsilon_\rho \otimes i)\varepsilon_\rho(x)(1 \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\sigma W^* \sigma(\hat{J} \otimes \hat{J})(1 \otimes \sigma)(\zeta \otimes \xi \otimes \eta) =$$

$$= (\varepsilon_\rho \otimes i)\varepsilon_\rho(x)(1 \otimes e_\eta)(\zeta \otimes \xi) = \qquad \text{d'après } (*)$$

$$= \varepsilon_{\rho \times \rho}(x)(1 \otimes e_\eta)(\zeta \otimes \xi) = \qquad \text{d'après (b)}$$

$$= (1 \otimes e_\eta)\varepsilon_\rho(x)(\zeta \otimes \xi) = \qquad \text{d'après 2.12 (i) et (c)}$$

$$= (1 \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\sigma W^* \sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}))(1 \otimes \sigma)(\varepsilon_\rho(x) \otimes 1)(\zeta \otimes \xi \otimes \eta) \qquad \text{d'après } (**).$$

Par linéarité, densité et continuité, on en déduit que:

$$(\varepsilon_\rho \otimes i)\varepsilon_\rho(x) =$$

$$= (1 \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\sigma W^* \sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}))(1 \otimes \sigma)(\varepsilon_\rho(x) \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(1 \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\sigma W \sigma(\hat{J} \otimes \hat{J})) =$$

$$= (i \otimes \hat{\Gamma}')\varepsilon_\rho(x) \quad \text{d'après [4], I.5 (ii) appliqué à } \hat{\mathbf{K}}' \text{ ([18], 2.10).}$$

Comme $\varepsilon_\rho(1) = 1$, on voit que ε_ρ est une action. Par un calcul analogue au précédent, en utilisant (ii), on obtient, pour tout μ de $\operatorname{Rep} M_*$:

$$(\varepsilon_\rho \otimes i)\varepsilon_\mu = (i \otimes \gamma_\mu)\varepsilon_\rho .$$

Par définition des $(\varepsilon_\rho)_\mu$, on en déduit (i).

On a:

$$(i \otimes \hat{\Gamma}')(Y_\rho)(1 \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\sigma W^* \sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}))(1 \otimes \sigma)(\zeta \otimes \xi \otimes \eta) =$$

$$= (1 \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\sigma W^* \sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}))(1 \otimes \sigma)(Y_\rho \otimes 1)(\zeta \otimes \xi \otimes \eta) = \quad \text{d'après [4], I.5 (ii) appliqué à } \hat{\mathbf{K}}'$$

$$= (1 \otimes e_\eta) Y_\rho(\zeta \otimes \xi) = \quad \text{d'après } (**)$$

$$= Y_{\rho \times \rho}(1 \otimes e_\eta)(\zeta \otimes \xi) = \quad \text{d'après 2.12 (i) et (e)}$$

$$= Y_{\rho \times \rho}(1 \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\sigma W^* \sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}))(1 \otimes \sigma)(\zeta \otimes \xi \otimes \eta).$$

Par linéarité, densité et continuité, on en déduit que

$$(i \otimes \hat{\Gamma}')(Y_\rho) = Y_{\rho \times \rho} =$$

$$= (Y_\rho \otimes 1)(\varepsilon_\rho \otimes i)(Y_\rho) \quad \text{d'après (d).}$$

Ainsi Y_ρ est un ε_ρ-cocycle.

Par un calcul analogue au précédent, en utilisant 2.12 (ii), on obtient, pour tout μ de $\operatorname{Rep} M_*$:

$$(i \otimes \gamma_\mu)(Y_\rho) = Y_{\rho \times \mu} .$$

Cela entraîne successivement:

$$(Y_\rho^* \otimes 1)(i \otimes \gamma_\mu)(Y_\rho) = (Y_\rho^* \otimes 1) Y_{\rho \times \mu} =$$

$$= (\varepsilon_\rho \otimes i)(Y_\mu) \quad \text{d'après (d)}$$

d'où $Y_\mu = (Y_\rho)_\mu$, par définition de ces derniers, ce qui achève la démonstration du théorème.

3. ACTIONS D'UNE ALGÈBRE DE KAC ET CORRESPONDANCES

Grâce aux résultats du chapitre 2, nous pouvons associer, à toute action α de $\mathbf{K}^{\wedge\prime}$ (par exemple, coaction α de G) sur $\mathscr{A}$ et à toute représentation μ de M_* (par exemple, de G), une correspondance $\mathfrak{H}_\mu^\alpha$ de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$.

Cette construction est fonctorielle et antimultiplicative (théorèmes 3.3 et 3.14). Deux actions α_1 et α_2 sont équivalentes si et seulement si ces foncteurs associés sont équivalents.

Nous donnons d'abord des rappels sur les correspondances, tirés de [2] et [15].

3.1. Rappels. Au sens de [2], 1.1, une correspondance d'une algèbre de von Neumann $\mathscr{A}_1$ dans une algèbre de von Neumann $\mathscr{A}_2$ n'est autre qu'un $\mathscr{A}_2$-$\mathscr{A}_1$-bimodule ([15], 0.2.1) c'est-à-dire un espace hilbertien $\mathfrak{H}$ sur lequel agissent $\mathscr{A}_2$ et $\mathscr{A}_1$, respectivement par une représentation et une antireprésentation (i.e. une représentation de l'algèbre opposée $\mathscr{A}_1^0$) qui commutent. S'il n'y a pas ambiguïté, on notera ξx_1 (resp. $x_2\xi$) le résultat de l'action d'un élément x_1 de $\mathscr{A}_1$ (resp. x_2 de $\mathscr{A}_2$) sur ξ de $\mathfrak{H}$.

On dira que deux correspondances $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{K}$ de $\mathscr{A}_1$ dans $\mathscr{A}_2$ sont isomorphes, s'il existe un unitaire U de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{K}$ qui rend spatialement isomorphes à la fois les deux antireprésentations de $\mathscr{A}_1$ et les deux représentations de $\mathscr{A}_2$. On notera alors $\mathfrak{H} \underset{U}{\simeq} \mathfrak{K}$, ou $\mathfrak{H} \simeq \mathfrak{K}$.

On appelle ([2], Définition 3) *correspondance vague* de $\mathscr{A}_1$ dans $\mathscr{A}_2$ l'espace hilbertien $L^2(\mathscr{A}_1) \otimes L^2(\mathscr{A}_2)$ sur lequel opèrent $\mathscr{A}_1$ par l'antireprésentation $x \to J_{\mathscr{A}_1} x^* J_{\mathscr{A}_1} \otimes 1$ et $\mathscr{A}_2$ par la représentation $y \to 1 \otimes y$.

Si u désigne un morphisme d'algèbres de von Neumann de $\mathscr{A}_1$ dans $\mathscr{A}_2$, tel que $u(1) = 1$, on notera $L^2(u)$ la correspondance canoniquement associée. Il s'agit de l'espace hilbertien $L^2(\mathscr{A}_2)$, sur lequel opèrent $\mathscr{A}_1$ par l'antireprésentation $x \to J_{\mathscr{A}_2} u(x)^* J_{\mathscr{A}_2}$ et $\mathscr{A}_2$ par la représentation identique.

Par un abus de notation qui sera fréquent, dans le cas de l'identité sur $\mathscr{A}$, on notera cette correspondance $L^2(\mathscr{A})$ au lieu de $L^2(\mathrm{id}_{\mathscr{A}})$, ce qui revient à assimiler la correspondance à l'espace hilbertien sous-jacent.

Le produit tensoriel au-dessus de $\mathscr{A}_2$, modulo le poids ψ normal, semifini et fidèle sur $\mathscr{A}_2$, d'un $\mathscr{A}_3$-$\mathscr{A}_2$-bimodule $\mathfrak{K}$ par un $\mathscr{A}_2$-$\mathscr{A}_1$-bimodule $\mathfrak{H}$, noté $\mathfrak{K} \otimes_\psi \mathfrak{H}$ dans [15], 2.1 s'interprète comme la composition des correspondances au sens de [2], §2, nous le noterons donc plutôt $\mathfrak{K} \circ_\psi \mathfrak{H}$. Si ψ est un autre poids normal, semi-fini et fidèle sur $\mathscr{A}_2$, on a ([15], 2.6) $\mathfrak{K} \circ_\psi \mathfrak{H} \simeq \mathfrak{K} \circ_{\psi'} \mathfrak{H}$. On notera donc $\mathfrak{K} \circ \mathfrak{H}$ cette correspondance quand il n'y a pas ambiguïté.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que si $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ et $\mathfrak{H}_3$ désignent trois correspondances de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$, on a:

$$(\mathfrak{H}_3 \circ \mathfrak{H}_2) \circ \mathfrak{H}_1 \simeq \mathfrak{H}_3 \circ (\mathfrak{H}_2 \circ \mathfrak{H}_1).$$

On vérifie ([2], remarque 16 (c)) que, pour toute correspondance $\mathfrak{H}$ de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$, on a: $\mathfrak{H} \circ L^2(\mathscr{A}) \simeq L^2(\mathscr{A}) \circ \mathfrak{H} \simeq \mathfrak{H}$.

On peut aisément munir la classe des correspondances de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$ d'une structure de catégorie. Les flèches entre deux objects $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ seront les opérateurs de $\mathfrak{H}_1$ dans $\mathfrak{H}_2$ qui entrelacent à la fois les deux antireprésentations de $\mathscr{A}_1$ et les deux représentations de $\mathscr{A}_2$. On notera Corr $\mathscr{A}$ cette catégorie. Il résulte alors de [15], lemme 2.3 que la composition est un foncteur de Corr $\mathscr{A}$ $\times$ Corr $\mathscr{A}$ dans Corr $\mathscr{A}$. On vérifiera aisément que (Corr $\mathscr{A}$, $\circ$,$L^2(\mathscr{A})$) est une catégorie avec multiplication, au sens de [1].

3.2. Définition. On désignera par $\mathfrak{H}_\mu^\alpha$ la correspondance de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$ définie pour tous x et y de $\mathscr{A}$ par:

(i) l'espace hilbertien sous-jacent $L^2(\mathscr{A}) \otimes \mathfrak{H}_\mu$,

(ii) l'antireprésentation de $\mathscr{A}$ définie par $x \to J_{\mathscr{A}} x^* J_{\mathscr{A}} \otimes 1$,

(iii) la représentation de $\mathscr{A}$ définie par $y \to \alpha_\mu(y)$.

3.3. Proposition. *L'application qui, à toute représentation μ de M_* associe la correspondance $\mathfrak{H}_\mu^\alpha$ et à tout élément t de* Hom(μ_1, μ_2) *associe $1_{L^2(\mathscr{A})} \otimes t$ est un foncteur de* Rep M_* *dans* Corr $\mathscr{A}$.

On notera $\mathfrak{H}^\alpha$ ce foncteur.

Démonstration. Il résulte aisément de 2.2 (iii) que $1 \otimes t$ appartient bien à Hom$(\mathfrak{H}_{\mu_1}^\alpha, \mathfrak{H}_{\mu_2}^\alpha)$ et la proposition en découle immédiatement.

3.4. Remarque. Il est clair que $\mu_1 \underset{U}{\simeq} \mu_2$ entraîne $\mathfrak{H}_{\mu_1}^\alpha \underset{1 \otimes U}{\simeq} \mathfrak{H}_{\mu_2}^\alpha$ au sens de 3.1.

3.5. Cas particulier. *La correspondance $\mathfrak{H}_\rho^{\hat{\Gamma}'}$ est isomorphe à la correspondance vague de $\hat{M}'$ dans $\hat{M}'$.*

Démonstration. Dans les deux cas, l'espace hilbertien sous-jacent est $H \otimes H$. Par définition de $\mathfrak{H}_\rho^{\hat{\Gamma}'}$ la représentation de $\hat{M}'$ est donnée par

$$y \to \hat{\Gamma}'(y) = W(\hat{\mathbf{K}}')(1 \otimes y) W(\hat{\mathbf{K}}')^*$$

d'après [5], 2.2.5 (b) appliqué à $\hat{\mathbf{K}}'$ (cf. [18], 2.10). L'antireprésentation étant elle fournie par:

$$x \to \hat{J} x^* \hat{J} \otimes 1 = W(\hat{\mathbf{K}}')(\hat{J} x^* \hat{J} \otimes 1) W(\hat{\mathbf{K}}')^*$$

car $W(\hat{\mathbf{K}}')$ qui appartient à $\hat{M}' \otimes M$ commute aux $\hat{J} x^* \hat{J} \otimes 1$. Par définition de la correspondance vague, on voit donc que $W(\hat{\mathbf{K}}')$ réalise l'isomorphisme recherché.

3.6. Cas particulier. *Soit $(\alpha_s)_{s \in G}$ une action de G sur $\mathscr{A}$. La correspondance $\mathfrak{H}_{\lambda(s)}^\alpha$ est isomorphe à $L^2(\alpha_{s^{-1}})$.*

Démonstration. Soit s fixé dans G. D'après [10], Theorem 3.2, il existe un unitaire u_s de $L^2(\mathscr{A})$ qui commute à $J_{\mathscr{A}}$ et tel que $\alpha_s(y) = u_s y u_s^*$ pour tout y de $\mathscr{A}$. Dans ces conditions, u_s^* réalise l'isomorphisme recherché entre $\mathfrak{H}^{\alpha}_{\lambda(s)}$ qui, d'après 2.6 (ii) est composée de l'antireprésentation $x \to J_{\mathscr{A}} x^* J_{\mathscr{A}}$ et de la représentation $y \to \alpha_s(y)$ et $L^2(\alpha_{s^{-1}})$ qui est composée d'après 3.1 de l'antireprésentation $x \to J_{\mathscr{A}} \alpha_{s^{-1}}(x)^* J_{\mathscr{A}}$ et de la représentation identique.

3.7. Remarque. En utilisant ce qui précède dans le cas de la représentation triviale de M_* on voit que $\mathfrak{H}^{\alpha}_1$ est égale à $L^2(\mathscr{A})$.

3.8. Lemme. *En supposant $\mathscr{A}$ munie du poids ψ normal, semi-fini et fidèle, avec les notations du paragraphe* 1 *de* [15], *on a:*

$$\Lambda_{\psi}(\mathfrak{N}_{\psi}) \otimes \mathfrak{H}_{\mu} \subset D(\mathfrak{H}^{\alpha}_{\mu}, \mathring{\psi})$$

et pour tous ξ, η dans $\mathfrak{H}_{\mu}$ et x, y dans $\mathfrak{N}_{\psi}$:

$$\langle \Lambda_{\psi}(x) \otimes \xi, \Lambda_{\psi}(y) \otimes \eta \rangle_{\mathring{\psi}} = (\xi \mid \eta) y^* x.$$

Démonstration. D'après [15], 0.4.2, on a:

$$(\Lambda_{\psi}(x) \otimes \xi) y^* = (J_{\psi} y J_{\psi} \otimes 1)(\Lambda_{\psi}(x) \otimes \xi) =$$

$$= x J_{\psi} \Lambda_{\psi}(y) \otimes \xi.$$

Ainsi, $\Lambda_{\psi}(x) \otimes \xi$ appartient à $D(\mathfrak{H}^{\alpha}_{\mu}, \mathring{\psi})$, et on a:

$$R^{\mathring{\psi}}(\Lambda_{\psi}(x) \otimes \xi) J_{\psi} \Lambda_{\psi}(y) = x J_{\psi} \Lambda_{\psi}(y) \otimes \xi$$

d'où le résultat, d'après [15], 1.1.

3.9. Lemme. *Soit T un élément de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{L}(\mathfrak{H}_{\mu})$. Alors, avec les notations du paragraphe* 1 *de* [15], *on a trivialement:*

$$T D(\mathfrak{H}^{\alpha}_{\mu}, \mathring{\psi}) \subset D(\mathfrak{H}^{\alpha}_{\mu}, \mathring{\psi})$$

et, pour tout ζ de $D(\mathfrak{H}^{\alpha}_{\mu}, \mathring{\psi})$:

$$R^{\mathring{\psi}}(T\zeta) = T R^{\mathring{\psi}}(\zeta).$$

3.10. Lemme. *Soient x, y dans $\mathfrak{N}_{\psi}$, ξ, η dans $\mathfrak{H}_{\mu}$, T dans $\mathscr{A} \otimes \mathscr{L}(\mathfrak{H}_{\mu})$. On a:*

$$\langle T(\Lambda_{\psi}(x) \otimes \xi), \Lambda_{\psi}(y) \otimes \eta \rangle_{\mathring{\psi}} = (i \otimes \omega_{\xi,\eta})((y^* \otimes 1) T (x \otimes 1)).$$

Démonstration. On a:

$$\langle T(\Lambda_\psi(x) \otimes \xi),\ \Lambda_\psi(y) \otimes \eta\rangle_{\mathring{\psi}} =$$

$$= R^{\mathring{\psi}}(\Lambda_\psi(y) \otimes \eta)^* R^{\mathring{\psi}}(T(\Lambda_\psi(x) \otimes \xi)) = \qquad \text{par définition}$$

$$= R^{\mathring{\psi}}(\Lambda_\psi(y) \otimes \eta)^* T R^{\mathring{\psi}}(\Lambda_\psi(x) \otimes \xi) \qquad \text{d'après 3.9.}$$

Soient z et z' dans $\mathfrak{N}_\psi$. On en déduit:

$$(\langle T(\Lambda_\psi(x) \otimes \xi),\ \Lambda_\psi(y) \otimes \eta\rangle_{\mathring{\psi}} J_\psi \Lambda_\psi(z) \mid J_\psi \Lambda_\psi(z')) =$$

$$= (T R^{\mathring{\psi}}(\Lambda_\psi(x) \otimes \xi) J_\psi \Lambda_\psi(z) \mid R^{\mathring{\psi}}(\Lambda_\psi(y) \otimes \eta) J_\psi \Lambda_\psi(z')) =$$

$$= (T(x J_\psi \Lambda_\psi(z) \otimes \xi) \mid y J_\psi \Lambda_\psi(z') \otimes \eta) = \qquad \text{d'après 3.8}$$

$$= ((y^* \otimes 1) T(x \otimes 1)(J_\psi \Lambda_\psi(z) \otimes \xi) \mid J_\psi \Lambda_\psi(z') \otimes \eta) =$$

$$= ((i \otimes \omega_{\xi,\eta})((y^* \otimes 1) T(x \otimes 1)) J_\psi \Lambda_\psi(z) \mid J_\psi \Lambda_\psi(z'))$$

d'où le résultat.

3.11. LEMME. *Avec les mêmes notations, il existe un unitaire unique U_{μ_1,μ_2} de l'espace hilbertien $\mathfrak{H}^\alpha_{\mu_2} \otimes_\psi \mathfrak{H}^\alpha_{\mu_1}$ sur $\mathfrak{H}^\alpha_{\mu_1 \times \mu_2}$ tel que, pour tous x de $\mathfrak{N}_\psi$, Ξ de $\mathfrak{H}^\alpha_{\mu_1}$, et ξ de $\mathfrak{H}_{\mu_2}$, on ait:*

$$U^\alpha_{\mu_1,\mu_2}(\Lambda_\psi(x) \otimes \xi \otimes_\psi \Xi) = \alpha_{\mu_1}(x)\Xi \otimes \xi.$$

Démonstration. Soient x, y dans $\mathfrak{N}_\psi$, ξ, η dans $\mathfrak{H}_{\mu_2}$, Ξ_1, Ξ_2 dans $\mathfrak{H}^\alpha_{\mu_1}$. D'après [15], 2.2 (a), l'espace hilbertien $\mathfrak{H}^\alpha_{\mu_2} \otimes_\psi \mathfrak{H}^\alpha_{\mu_1}$ est le complété du produit tensoriel algébrique $\Lambda_\psi(\mathfrak{N}_\psi) \odot \mathfrak{H}_{\mu_2} \odot \mathfrak{H}^\alpha_{\mu_1}$ pour le produit scalaire

$$(\Lambda_\psi(x) \otimes \xi \otimes_\psi \Xi_1 \mid \Lambda_\psi(y) \otimes \eta \otimes_\psi \Xi_2) =$$

$$= (\langle \Lambda_\psi(x) \otimes \xi,\ \Lambda_\psi(y) \otimes \eta\rangle_{\mathring{\psi}} \Xi_1 \mid \Xi_2) =$$

$$= (\alpha_{\mu_1}(y^* x)\Xi_1 \mid \Xi_2) \qquad \text{d'après 3.8.}$$

L'existence et l'unicité d'une isométrie de $\mathfrak{H}^\alpha_{\mu_2} \otimes_\psi \mathfrak{H}^\alpha_{\mu_1}$ dans $\mathfrak{H}^\alpha_{\mu_1} \otimes \mathfrak{H}_{\mu_2}$ qui envoie $\Lambda_\psi(x) \otimes \xi \otimes_\psi \Xi$ sur $\alpha_{\mu_1}(x)\Xi \otimes \xi$ est ainsi acquise; il est clair qu'il s'agit d'un unitaire. Comme on a, en tant qu'espaces hilbertiens:

$$\mathfrak{H}^\alpha_{\mu_1 \times \mu_2} = L^2(\mathscr{A}) \otimes \mathfrak{H}_{\mu_1 \times \mu_2} =$$

$$= L^2(\mathscr{A}) \otimes \mathfrak{H}_{\mu_1} \otimes \mathfrak{H}_{\mu_2} = \mathfrak{H}^\alpha_{\mu_1} \otimes \mathfrak{H}_{\mu_2}$$

le lemme en résulte.

3.12. LEMME. *En conservant les mêmes notations, soit T dans $\mathscr{A} \otimes \mathscr{L}(\mathfrak{H}^{\alpha}_{\mu_1})$. On a:*

$$U^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2}(T \otimes_{\psi} 1) = ((\alpha_{\mu_1} \otimes i)(T))U^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2},$$

où $T \otimes_{\psi} 1$, opérateur sur $\mathfrak{H}^{\alpha}_{\mu_2} \otimes_{\psi} \mathfrak{H}^{\alpha}_{\mu_1}$, est défini comme en [15], 2.3.

Démonstration. Soient x, x' dans $\mathfrak{N}_{\psi}$, Ξ, Ξ' dans $\mathfrak{H}^{\alpha}_{\mu_1}$ et ξ, ξ' dans $\mathfrak{H}_{\mu_2}$. On a:

$$(U^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2}(T \otimes_{\psi} 1)(\Lambda_{\psi}(x) \otimes \xi \otimes \Xi) \mid U^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2}(\Lambda_{\psi}(x') \otimes \xi' \otimes \Xi')) =$$

$$= ((T \otimes_{\psi} 1)(\Lambda_{\psi}(x) \otimes \xi \otimes \Xi) \mid \Lambda_{\psi}(x') \otimes \xi' \otimes \Xi') = \qquad \text{d'après 3.11}$$

$$= (T(\Lambda_{\psi}(x) \otimes \xi) \otimes_{\psi} \Xi \mid \Lambda_{\psi}(x') \otimes \xi' \otimes_{\psi} \Xi') = \qquad \text{par définition}$$

$$= (\langle T(\Lambda_{\psi}(x) \otimes \xi), \Lambda_{\psi}(x') \otimes \xi' \rangle_{\psi}^{\circ} \Xi \mid \Xi') = \qquad \text{par définition}$$

$$= (\alpha_{\mu_1}((i \otimes \omega_{\xi,\xi'})((x'^* \otimes 1)T(x \otimes 1)))\Xi \mid \Xi') = \qquad \text{d'après 3.10}$$

$$= ((i \otimes i \otimes \omega_{\xi,\xi'})(\alpha_{\mu_1} \otimes i)((x'^* \otimes 1)T(x \otimes 1))\Xi \mid \Xi') =$$

$$= ((\alpha_{\mu_1} \otimes i)((x'^* \otimes 1)T(x \otimes 1))(\Xi \otimes \xi) \mid \Xi' \otimes \xi') =$$

$$= ((\alpha_{\mu_1} \otimes i)(T)(\alpha_{\mu_1}(x)\Xi \otimes \xi) \mid \alpha_{\mu_1}(x')\Xi' \otimes \xi') =$$

$$= ((\alpha_{\mu_1} \otimes i)(T)U^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2}(\Lambda_{\psi}(x) \otimes \xi \otimes_{\psi} \Xi) \mid U^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2}(\Lambda_{\psi}(x') \otimes \xi' \otimes \Xi')) \qquad \text{par définition.}$$

Grâce à 3.11, le résultat s'en déduit par linéarité, densité et continuité.

3.13. THÉORÈME. *L'opérateur unitaire $U^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2}$ réalise un isomorphisme entre les correspondances $\mathfrak{H}^{\alpha}_{\mu_2} \circ_{\psi} \mathfrak{H}^{\alpha}_{\mu_1}$ et $\mathfrak{H}^{\alpha}_{\mu_1 \times \mu_2}$.*

Démonstration. Soit x dans $\mathscr{A}$. On a:

$$U^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2}(\alpha_{\mu_2}(x) \otimes_{\psi} 1)U^{\alpha *}_{\mu_1,\mu_2} = (\alpha_{\mu_1} \otimes i)\alpha_{\mu_2}(x) = \qquad \text{d'après 3.12}$$

$$= \alpha_{\mu_1 \times \mu_2}(x) \qquad \text{d'après 2.2 (ii)}$$

ainsi, $U^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2}$ entrelace les représentations de $\mathscr{A}$ respectivement associées aux correspondances considérées.

Soient de plus, y dans $\mathfrak{N}_{\psi}$, ξ dans $\mathfrak{H}_{\mu_2}$ et Ξ dans $\mathfrak{H}^{\alpha}_{\mu_1}$. On a:

$$U^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2}(\Lambda_{\psi}(y) \otimes \xi \otimes_{\psi} (J_{\psi}x^*J_{\psi} \otimes 1)\Xi) =$$

$$= \alpha_{\mu_1}(y)(J_{\psi}x^*J_{\psi} \otimes 1)\Xi \otimes \xi = \qquad \text{d'après 3.11}$$

$$= (J_{\psi}x^*J_{\psi} \otimes 1)\alpha_{\mu_1}(y)\Xi \otimes \xi =$$

$$= (J_{\psi}x^*J_{\psi} \otimes 1)U^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2}(\Lambda_{\psi}(x) \otimes \xi \otimes_{\psi} \Xi) \qquad \text{d'après 3.11.}$$

On a donc:

$$U^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2}(1 \otimes_{\psi} (J_{\psi}x^*J_{\psi} \otimes 1)) = (J_{\psi}x^*J_{\psi} \otimes 1)U_{\mu_1,\mu_2}$$

qui exprime le fait que $U^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2}$ entrelace les deux antireprésentations de $\mathscr{A}$, d'où le théorème.

3.14. THÉORÈME. *Le foncteur $\mathfrak{H}^{\alpha}$ est antimultiplicatif, au sens de* [1].

Démonstration. Cela résulte immédiatement de 3.6 et 3.13.

3.15. CAS PARTICULIER. On vérifie aisément que le foncteur $\mathfrak{H}^{1_{\hat{\mathbf{K}}'}^{\mathscr{A}}}$ est naturellement équivalent au foncteur de $\operatorname{Rep} M_*$ dans $\operatorname{Corr} \mathscr{A} \times \operatorname{Rep} M_*$ qui à tout objet μ de $\operatorname{Rep} M_*$ associe $(\mathrm{id}_{\mathscr{A}}, \mu)$.

Ainsi, $\mathfrak{H}^{1_{\hat{\mathbf{K}}'}^{\mathbf{C}}}$ est le foncteur identique de $\operatorname{Rep} M_*$.

3.16. LEMME. *Soient α et δ deux actions de $\hat{\mathbf{K}}'$ sur $\mathscr{A}$. Soient μ_1 et μ_2 dans* $\operatorname{Rep} M_*$, *t_i dans* $\operatorname{Hom}(\mathfrak{H}^{\alpha}_{\mu_i}, \mathfrak{H}^{\delta}_{\mu_i})$ *pour* $i = 1, 2$.

Avec les notations de 3.13, *on a:*

$$U^{\delta}_{\mu_1,\mu_2}(t_2 \otimes_{\psi} t_1) = (t_1 \otimes i)(\alpha_{\mu_1} \otimes i)(t_2)U^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2}$$

où $t_2 \otimes_{\psi} t_1$ est défini comme en [15], 2.3 *(le fait que t_2 entrelace les antireprésentations de $\mathscr{A}$ associées à $\mathfrak{H}^{\alpha}_{\mu_2}$ et $\mathfrak{H}^{\delta}_{\mu_2}$ assure que t_2 appartienne à $\mathscr{A} \otimes \mathscr{L}(\mathfrak{H}_{\mu_2})$, ce qui permet d'écrire la formule ci-dessus).*

Démonstration. Soient x dans $\mathfrak{N}_{\psi}$, Ξ dans $\mathfrak{H}^{\alpha}_{\mu_1}$, ξ dans $\mathfrak{H}_{\mu_2}$. On a:

$$U^{\delta}_{\mu_1,\mu_2}(1 \otimes_{\psi} t_1)(\Lambda_{\psi}(x) \otimes \xi \otimes_{\psi} \Xi) = U^{\delta}_{\mu_1,\mu_2}(\Lambda_{\psi}(x) \otimes \xi \otimes_{\psi} t_1\Xi) = \qquad \text{par définition}$$

$$= \delta_{\mu_1}(x)t_1\Xi \otimes \xi = \qquad \text{d'après 3.11}$$

$$= t_1\alpha_{\mu_1}(x)\Xi \otimes \xi = \qquad \text{par hypothèse}$$

$$= (t_1 \otimes 1)\alpha_{\mu_1}(x)\Xi \otimes \xi = (t_1 \otimes 1)U^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2}(\Lambda_{\psi}(x) \otimes \xi \otimes_{\psi} \Xi).$$

Par linéarité, densité et continuité, on en déduit que:

$$(*) \qquad U^{\delta}_{\mu_1,\mu_2}(1 \otimes_{\psi} t_1) = (t_1 \otimes 1)U^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2}.$$

On a:

$$U^{\delta}_{\mu_1,\mu_2}(t_2 \otimes_{\psi} t_1) = U^{\delta}_{\mu_1,\mu_2}(1 \otimes_{\psi} t_1)(t_2 \otimes_{\psi} 1) =$$

$$= (t_1 \otimes 1)U^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2}(t_2 \otimes_{\psi} 1) = \qquad \text{d'après } (*)$$

$$= (t_1 \otimes 1)(\alpha_{\mu_1} \otimes i)(t_2)U^{\alpha}_{\mu_1,\mu_2} \qquad \text{d'après 3.12}$$

ce qui achève la démonstration.

3.17. THÉORÈME. *Soient α et δ deux actions de $\hat{\mathbf{K}}'$ sur $\mathscr{A}$, U un α-cocycle tel que $\delta = \operatorname{Ad} U \circ \alpha$. Alors, pour tout μ de* $\operatorname{Rep} M_*$, *l'unitaire U_μ défini en réalise un isomorphisme entre $\mathfrak{H}^\alpha_\mu$ et $\mathfrak{H}^\delta_\mu$.*

L'application qui à tout μ de $\operatorname{Rep} M_*$ *associe cet isomorphisme est une équivalence multiplicative naturelle entre les foncteurs antimultiplicatifs $\mathfrak{H}^\alpha$ et $\mathfrak{H}^\delta$.*

Démonstration. Comme U appartient à $\mathscr{A} \otimes A_\mu$, il est clair qu'il entrelace les antireprésentations de $\mathscr{A}$ respectivement associées à $\mathfrak{H}^\alpha_\mu$ et $\mathfrak{H}^\delta_\mu$; le cas des représentations est réglé par le théorème 2.10, d'où la première partie du théorème.

Soit t dans $\operatorname{Hom}(\mu_1, \mu_2)$, le théorème 2.2 (iii) assure la commutativité du diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H}^\alpha_{\mu_1} \arrow[r, "U_{\mu_1}"] \arrow[d, "1\otimes t"'] & \mathfrak{H}^\delta_{\mu_1} \arrow[d, "1\otimes t"] \\
\mathfrak{H}^\alpha_{\mu_2} \arrow[r, "U_{\mu_2}"] & \mathfrak{H}^\delta_{\mu_2}
\end{tikzcd}$$

ce qui assure le caractère naturel de l'équivalence entre les foncteurs $\mathfrak{H}^\alpha$ et $\mathfrak{H}^\delta$.

De plus, grâce au lemme 3.16 on trouve:

$$U^\delta_{\mu_1,\mu_2}(U_{\mu_2} \otimes_\psi U_{\mu_1}) = (U_{\mu_1} \otimes i)(\alpha_{\mu_1} \otimes i)(U_{\mu_2})U^\alpha_{\mu_1,\mu_2} =$$

$$= U_{\mu_1 \times \mu_2} U^\alpha_{\mu_1,\mu_2} \qquad \text{d'après 2.7 (ii)}$$

ce qui implique la commutativité du diagramme ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H}^\alpha_{\mu_2} \circ \mathfrak{H}^\alpha_{\mu_1} \arrow[r, "U^\alpha_{\mu_1,\mu_2}"] \arrow[d, "U_{\mu_2}\otimes_\psi U_{\mu_1}"'] & \mathfrak{H}^\alpha_{\mu_1 \times \mu_2} \arrow[d, "U_{\mu_1 \times \mu_2}"] \\
\mathfrak{H}^\delta_{\mu_2} \circ \mathfrak{H}^\delta_{\mu_1} \arrow[r, "U^\delta_{\mu_1,\mu_2}"] & \mathfrak{H}^\delta_{\mu_1 \times \mu_2}
\end{tikzcd} .$$

Ainsi, l'équivalence naturelle conserve le caractère antimultiplicatif des foncteurs $\mathfrak{H}^\alpha$ et $\mathfrak{H}^\delta$.

Enfin, comme d'après 2.9 (iv), on a $U_1 = 1_{\mathscr{A}}$, la démonstration est complète.

3.18. THÉORÈME. *Soient α et δ deux actions de $\hat{\mathbf{K}}'$ sur $\mathscr{A}$, $\mathscr{C}$ une sous-catégorie à multiplication pleine de* $\operatorname{Rep} M_*$ *contenant ρ. On suppose que la restriction à $\mathscr{C}$ des foncteurs $\mathfrak{H}^\alpha$ et $\mathfrak{H}^\delta$ sont naturellement et multiplicativement équivalents. Alors, il existe un α-cocycle U tel que $\delta(x) = U\alpha(x)U^*$ pour tout x de $\mathscr{A}$.*

Démonstration. Par hypothèse, on peut associer à tout μ de $\mathscr{C}$, un unitaire $\dot{Y}_\mu$ sur $L^2(\mathscr{A}) \otimes \mathfrak{H}_\mu$ tel que

(i) $\mathfrak{H}^\alpha_\mu \underset{Y_\mu}{\simeq} \mathfrak{H}^\delta_\mu$

ce qui implique:

$$Y_\mu \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{L}(\mathfrak{H}_\mu) \qquad \text{(entrelacement des antireprésentations)}$$

$$(*) \qquad Y_\mu \alpha_\mu(x) = \delta_\mu(x) Y_\mu \qquad \text{(entrelacement des représentations);}$$

(ii) pour tout t de $\mathrm{Hom}(\mu_1, \mu_2)$, on ait:

$$(1 \otimes t) Y_{\mu_1} = Y_{\mu_2}(1 \otimes t)$$

ce qui implique en particulier que $Y_\mu \in \mathscr{A} \otimes A_\mu$ pour tout $\mu \in \mathscr{C}$;

(iii) $U^\delta_{\mu_1,\mu_2}(Y_{\mu_2} \otimes_\psi Y_{\mu_1}) = Y_{\mu_1 \times \mu_2} U^\alpha_{\mu_1,\mu_2}$.

D'après 3.16, cela entraîne:

$$Y_{\mu_1 \times \mu_2} = (Y_{\mu_1} \otimes i)(\alpha_{\mu_1} \otimes i)(Y_{\mu_2}).$$

Dans ces conditions, on voit que les opérateurs Y_μ vérifient les hypothèses du théorème 2.13, donc Y_ρ est un α-cocycle que nous noterons désormais U. Enfin, grâce à $(*)$ appliqué à ρ et à 2.5, on achève la démonstration.

3.19. COROLLAIRE. *Soient G un groupe localement compact, $\mathscr{A}$ une algèbre de von Neumann, α et δ deux co-actions au sens de* [13] *de G sur $\mathscr{A}$. On leur associe les deux foncteurs antimultiplicatifs $\mathfrak{H}^\alpha$ et $\mathfrak{H}^\delta$ de* Rep$G$ *dans* Corr $\mathscr{A}$. *Alors les deux assertions:*

(i) *les co-actions α et δ sont faiblement équivalentes au sens de* [4];

et

(ii) *les foncteurs multiplicatifs $\mathfrak{H}^\alpha$ et $\mathfrak{H}^\delta$ sont naturellement et multiplicativement équivalents;*

sont équivalentes.

4. ACTIONS ET APPLICATIONS COMPLÈTEMENT POSITIVES

En utilisant le chapitre 2, nous pouvons associer à toute action α de $\mathbf{K}^{\wedge\prime}$ sur $\mathscr{A}$ et à tout élément de type positif représentable de $\mathbf{K}$ (par exemple, à toute co-action de G sur $\mathscr{A}$ et à toute fonction continue de type positif sur G) une application complètement positive de $\mathscr{A}$ dans elle-même, le produit se transformant en composition des applications complètement positives.

4.1. LEMME. *Soit t isométrique dans* $\mathrm{Hom}(\mu_1, \mu_2)$. *Pour tous ξ de $\mathfrak{H}_{\mu_1}$ et x de $\mathscr{A}$, on a:*

$$(i \otimes \Omega_\xi)\alpha_{\mu_1}(x) = (i \otimes \Omega_{t\xi})\alpha_{\mu_2}(x)$$

où, pour η dans $\mathfrak{H}_{\mu_i}$ $(i = 1, 2)$, Ω_μ désigne l'état vectoriel associé à η.

Démonstration. Soit ζ dans $L^2(\mathscr{A})$. On a:

$$(\alpha_{\mu_2}(x)(\zeta \otimes t\xi) \mid \zeta \otimes t\xi) = ((1 \otimes t^*t)\alpha_{\mu_1}(x)(\zeta \otimes \xi) \mid \zeta \otimes \xi) = \qquad \text{d'après 2.2 (iii)}$$

$$= (\alpha_{\mu_1}(x)(\zeta \otimes \xi) \mid \zeta \otimes \xi) \qquad \text{par hypothèse}$$

d'où le résultat.

4.2. Proposition. *Avec les notations précédentes, soit ξ_i dans $\mathfrak{H}_{\mu_i}$ $(i = 1, 2)$ tel que $\mu_{1*}(\Omega_{\xi_1}) = \mu_{2*}(\Omega_{\xi_2})$. On a, pour tout x de $\mathscr{A}$:*

$$(i \otimes \Omega_{\xi_1})\alpha_{\mu_1}(x) = (i \otimes \Omega_{\xi_2})\alpha_{\mu_2}(x).$$

Démonstration. Soit ν_i la sous-représentation de μ_i, cyclique de vecteur ξ_i. En appliquant le lemme précédent à l'injection canonique de $\mathfrak{H}_{\nu_i} = (\mu_i(M_*)\xi_i)^-$ dans $\mathfrak{H}_{\mu_i}$, on trouve:

$$(*) \qquad (i \otimes \Omega_{\xi_i})\alpha_{\nu_i}(x) = (i \otimes \Omega_{\xi_i})\alpha_{\mu_i}(x)$$

où, par abus de notation, Ω_{ξ_i} désigne aussi bien l'état vectoriel associé à ξ_i sur $\mathscr{L}(\mathfrak{H}_{\mu_i})$ que sur $\mathscr{L}(\mathfrak{H}_{\nu_i})$.

De plus, on a, pour tout ω de M_*:

$$(\nu_1(\omega)\xi_1 \mid \xi_1) = (\mu_1(\omega)\xi_1 \mid \xi_1) = \qquad \text{par hypothèse}$$

$$= \langle \mu_1(\omega), \Omega_{\xi_1} \rangle = \langle \mu_{1*}(\Omega_{\xi_1}), \omega \rangle =$$

$$= \langle \mu_{2*}(\Omega_{\xi_2}), \omega \rangle = \qquad \text{par hypothèse}$$

$$= (\nu_2(\omega)\xi_2 \mid \xi_2) \qquad \text{par un calcul analogue.}$$

Comme ν_1 et ν_2 sont cycliques, respectivement de vecteurs ξ_1 et ξ_2, on en déduit qu'il existe un unitaire u qui entrelace ν_1 et ν_2 et tel que $u\xi_1 = \xi_2$. En appliquant alors 4.1 on en déduit:

$$(i \otimes \Omega_{\xi_1})\alpha_{\nu_1}(x) = (i \otimes \Omega_{\xi_2})\alpha_{\nu_2}(x)$$

d'où le résultat, grâce à $(*)$.

4.3. Proposition. *Soit x un élément de type positif représentable de* $\mathbf{K}$ *(*cf. [3], 1.7*). Pour tout μ de* $\operatorname{Rep} M_*$ *et θ de $(A_\mu)_*^+$ tels que $x = \mu_*(\theta)$, l'application complètement positive, qui à tout y de $\mathscr{A}$ associe $(i \otimes \theta)\alpha_\mu(y)$ ne dépend que de x.*

On l'appelera l'application complètement positive associée à α et x, et on la notera L_x^α.

Démonstration. Notons π la représentation canonique de A_μ dans $L^2(A_\mu)$. D'après [10], Theorem 2.17, il existe un unique vecteur ξ dans le cône $L^2(A_\mu)^\natural$ tel que $\Omega_\xi \circ \pi = \theta$. En utilisant 2.3, on trouve:

$$(i \otimes \theta)\alpha_\mu(y) = (i \otimes \Omega_\xi)\alpha_{\pi\circ\mu}(y);$$

comme de plus, on a: $x = (\pi \circ \mu)_*(\Omega_\xi)$ par hypothèse, la proposition se déduit de 4.2.

4.4. PROPOSITION. *Avec les notations de* [3], 1.7 *et* [3], 2.6, *soient* x, x_1 *et* x_2 *dans* PR(**K**) *et* λ *un réel positif. On a:*

(i) $L^\alpha_{x_1x_2} = L^\alpha_{x_1} \circ L^\alpha_{x_2}$;

(ii) $L^\alpha_{x_1+x_2} = L^\alpha_{x_1} + L^\alpha_{x_2}$;

(iii) $L^\alpha_{\lambda x} = \lambda L^\alpha_x$;

(iv) $L^\alpha_1 = \mathrm{id}$;

(v) *si* $\mu \in \operatorname{Rep} M_*$, $\theta \in (A_\mu)^+_*$ *avec* $x = \mu_*(\theta)$, *alors* $\|L^\alpha_x\| = \|\theta\|$;
de plus, si M_* *possède une unité approchée, on a:* $\|L^\alpha_x\| = \|x\|$.

Démonstration. Soient μ_i dans $\operatorname{Rep} M_*$ et θ_i dans $(A_{\mu_i})^+_*$ tels que $x_i = \mu_{i*}(\theta_i)$. On a:

$$x_1x_2 = \mu_{1*}(\theta_i)\mu_{2*}(\theta_2) =$$

$$= (\mu_1 \times \mu_2)_*(\theta_i \otimes \theta_2) \qquad \text{d'après [3], 1.5.}$$

Soit y dans $\mathscr{A}$. On a donc:

$$L^\alpha_{x_1x_2}(y) = (i \otimes \theta_1 \otimes \theta_2)\alpha_{\mu_1\times\mu_2}(y) = \qquad \text{par définition}$$

$$= (i \otimes \theta_1 \otimes \theta_2)(\alpha_{\mu_1} \otimes i)\alpha_{\mu_2}(y) = \qquad \text{d'après 2.2 (ii)}$$

$$= (i \otimes \theta_1)\alpha_{\mu_1}((i \otimes \theta_2)\alpha_{\mu_2}(y)) =$$

$$= L^\alpha_{x_1} \circ L^\alpha_{x_2}(y) \qquad \text{par définition, d'où (i).}$$

Soit π la représentation universelle de M_*, d'après [3], 2.6, il existe Θ_1 et Θ_2 dans $B(\mathbf{K})^+$ tels que $x_i = \pi_*(\Theta_i)$. Ainsi, $x_1 + x_2 = \pi_*(\Theta_1 + \Theta_2)$, d'où:

$$L^\alpha_{x_1+x_2}(y) = (i \otimes (\Theta_1 + \Theta_2))\alpha_\pi(y) =$$

$$= (i \otimes \Theta_1)\alpha_\pi(y) + (i \otimes \Theta_2)\alpha_\pi(y) =$$

$$= L^\alpha_{x_1}(y) + L^\alpha_{x_2}(y) \qquad \text{d'où (ii).}$$

Les preuves de (iii) et (iv) sont immédiates.

On a:

$$\|L_x^\alpha(y)\|^2 = \|L_x^\alpha(y)^* L_x^\alpha(y)\| = \|(i \otimes \theta)\alpha_\mu(y)^*(i \otimes \theta)\alpha_\mu(y)\| =$$

$$= \|\theta\|^2 \left\| \left(i \otimes \frac{\theta}{\|\theta\|}\right) \alpha_\mu(y)^* \left(i \otimes \frac{\theta}{\|\theta\|}\right) \alpha_\mu(y) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\theta\|^2 \left\| \left(i \otimes \frac{\theta}{\|\theta\|}\right) \alpha_\mu(y^* y) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\theta\|^2 \|y^* y\| \leqslant \|\theta\|^2 \|y\|^2$$

car $i \otimes \dfrac{\theta}{\|\theta\|}$ est une espérance conditionnelle; il en résulte: $\|L_x^\alpha\| \leqslant \|\theta\|$, comme $L_x^\alpha(1) = \|\theta\| 1$, on en déduit l'égalité.

On a clairement $\|x\| \leqslant \|\theta\|$. Si M_* possède une unité approchée $(\omega_i)_{i \in I}$, $\mu(\omega_i)$ tend ultrafaiblement vers 1, et donc:

$$\|\theta\| \leqslant \operatorname{Sup}\{|\langle \mu(\omega), \theta \rangle|, \ \omega \in M_*, \ \|\omega\| \leqslant 1\} =$$

$$= \operatorname{Sup}\{|\langle \mu_*(\theta), \omega \rangle|, \ \omega \in M_*, \ \|\omega\| \leqslant 1\} = \|x\|$$

ce qui achève (v) et la proposition.

4.5. Cas particuliers. (i) Si $\mathbf{K} = \mathrm{KS}(G)$, alors $\mathrm{PR}(\mathbf{K})$ est composé des éléments de la forme

$$x = \int_G \lambda_G(s)\, \mathrm{d}m(s)$$

où m appartient à $M^1(G)^+$. Plus précisément, avec les notations de [3], 3.7, on a pour $m \in M^1(G)^+ = C_0(G)^{*+}$:

$$\varkappa \pi_*(m) = \int_G \lambda_G(s)\, \mathrm{d}m(s).$$

D'où:

$$\pi_*(m) = \left(\int_G \lambda_G(s)\, \mathrm{d}m(s)\right)^* =$$

$$= \int_G \lambda_G(s^{-1})\, \mathrm{d}m(s) = \int_G \lambda_G(s)\, \mathrm{d}\check{m}(s).$$

On en déduit que pour tout y de $\mathscr{A}$, on a:

$$L_x^\alpha(y) = (i \otimes \check{m})\alpha_\pi(y)$$

où, rappelons-le, π est la représentation universelle de $L^1(G)$.

Comme $\alpha(y)$ s'identifie à la fonction $s \to \alpha_s(y)$, considérée comme élément de l'algèbre de von Neumann $\mathscr{A} \otimes L^\infty(G)$, il est facile de voir que $\alpha_\pi(y)$ est la même fonction, mais considérée comme élément de l'algèbre de von Neumann $\mathscr{A} \otimes C_\mathrm{U}(G)^{**}$.

Ainsi, on a:

$$L_x^\alpha(y) = \int_G \alpha_s(y)\,\mathrm{d}\check{m}(s) = \int_G \alpha_{s^{-1}}(y)\,\mathrm{d}m(s).$$

(ii) Si $\mathbf{K} = \mathrm{KA}(G)$, il résulte de [3], 4.1 que $\mathrm{PR}(\mathbf{K})$ est égal à $\mathrm{FCTP}(G)$, espace des fonctions continues de type positif sur G. Si α est une action du "dual de G", autrement dit une "co-action" de G au sens de [13], sur une algèbre de von Neumann $\mathscr{A}$, on sait ainsi lui associer, pour toute fonction f de $\mathrm{FCTP}(G)$, une application L_f^α complètement positive de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$ telle que

$$L_{f_1 f_2}^\alpha = L_{f_1}^\alpha \circ L_{f_2}^\alpha,$$

$$L_1^\alpha = \mathrm{id}_{\mathscr{A}},$$

$$\|L_f^\alpha\| = \|f\| \quad \text{(car } L^1(G) \text{ possède une unité approchée).}$$

En particulier, si G' est un sous-groupe ouvert de G, la fonction caractéristique de G' appartenant à $\mathrm{FCTP}(G)$, on obtient une espérance conditionnelle; et à tout caractère sur G on associe un automorphisme de $\mathscr{A}$.

4.6. Proposition. (i) *Dans le cas de l'action $\hat{\Gamma}'$ de $\hat{\mathbf{K}}'$ sur $\hat{M}'$, on trouve, pour tout x de* $\mathrm{PR}(\mathbf{K})$ *et tout ω de M_*:*

$$L_x^{\hat{\Gamma}'}(\rho(\omega)) = \rho(x \cdot \omega).$$

(ii) *Dans le cas où α est une action duale au sens de* [4], II.7, *l'application $x \to L_x^\alpha$, définie sur* $\mathrm{PR}(\mathbf{K})$, *est injective.*

Démonstration. Avec les notations précédentes, si $x = \mu_*(\theta)$, on a:

$$L_x^{\hat{\Gamma}'}(\rho(\omega)) = (i \otimes \theta)\gamma_\mu(\rho(\omega)) =$$

$$= (i \otimes \theta)(\rho \times \mu)(\omega) \qquad \text{d'après 1.12 (i).}$$

Ainsi, pour tout Ω de $(\hat{M}')_*$, on a:

$$\langle L_x^{\hat{\Gamma}'}(\rho(\omega)), \Omega\rangle = \langle(\rho \times \mu)(\omega), \Omega \otimes \theta\rangle =$$

$$= \langle \rho_*(\Omega)\mu_*(\theta), \omega\rangle = \qquad \text{d'après [3], 1.5}$$

$$= \langle \rho_*(\Omega), x \cdot \omega\rangle =$$

$$= \langle \rho(x \cdot \omega), \Omega\rangle$$

d'où (i).

Soit δ une action de $\mathbf{K}$ sur une algèbre de von Neumann $\mathscr{B}$. Posons $\mathscr{A}=\mathscr{W}^*(\delta)$ et $\alpha = \delta^{\sim}$. On a, pour tout ω de M_*:

$$L_x^\alpha(1 \otimes \rho(\omega)) = (i \otimes \theta)\alpha_\mu(1 \otimes \rho(\omega)) =$$

$$= (i \otimes \theta)(1 \otimes \gamma_\mu(\rho(\omega))) = \qquad \text{d'après 2.4 (ii)}$$

$$= 1 \otimes \rho(x \cdot \omega)$$

par un calcul analogue à (i). La fidélité de ρ permet d'en déduire (ii).

4.7. Définition. On notera $\mathfrak{H}_x^\alpha$ la correspondance de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$ canoniquement associée au sens de [19] à l'application complètement positive L_x^α. Il s'agit donc de l'espace hilbertien complété de $\mathscr{A} \odot L^2(\mathscr{A})$ pour le produit scalaire

$$\left(\sum_i y_i \otimes \xi_i \,\middle|\, \sum_i z_i \otimes \eta_i\right) = \sum_i (L_x^\alpha(z_i y_i)\xi_i \,|\, \eta_i)$$

pour tous y_i, z_i dans $\mathscr{A}$ et ξ_i, η_i dans $L^2(\mathscr{A})$, sur lequel $\mathscr{A}$ agit par la représentation définie par $y(z \otimes \xi) = yz \otimes \xi$ et l'antireprésentation

$$(z \otimes \xi)y = z \otimes J_{\mathscr{A}} y^* J_{\mathscr{A}} \xi .$$

4.8. Proposition. *Avec les notations précédentes, soit* $x = \mu_*(\theta)$ *un élément de* $\mathrm{PR}(\mathbf{K})$. *La correspondance* $\mathfrak{H}_x^\alpha$ *est isomorphe à une sous-correspondance de* $\mathfrak{H}_\mu^\alpha$.

Démonstration. Supposons que $\theta = \Omega_\xi$, il est facile de voir que l'application de $\mathscr{A} \odot L^2(\mathscr{A})$ dans $\mathfrak{H}_\mu^\alpha$ définie par $y \otimes \eta \to \alpha_\mu(y)(\eta \otimes \xi)$ se prolonge en une isométrie de $\mathfrak{H}_x^\alpha$ dans $\mathfrak{H}_\mu^\alpha$ qui entrelace les représentations et antireprésentations associées.

BIBLIOGRAPHIE

1. Benabou, J., Catégories avec multiplications, *C.R.Acad. Sci. Paris*, **256**(1963), 1887–1890.
2. Connes, A., Notes manuscrites, 1980.
3. De Cannière, J.; Enock, M.; Schwartz, J.-M., Algèbres de Fourier associées à une algèbre de Kac, *Math. Ann.*, **245**(1979), 1–22.
4. Enock, M., Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac, *J. Functional Analysis*, **26**(1977), 16–47.
5. Enock, M.; Schwartz, J.-M., Une dualité dans les algèbres de von Neumann, *Bull. Soc. Math. France, Suppl. Mém.*, **44**(1975), 1–144.
6. Enock, M.; Schwartz, J.-M., Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac. II, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto*, **16**(1980), 189–232.
7. Enock, M.; Schwartz, J.-M., Actions d'une algèbre de Kac sur une algèbre de von Neumann et représentations, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **291**(1980), 631–633.

8. ERNEST, J., Hopf-von Neumann algebras, *Funct. Anal. Conf. Irvine, 1966*, Academic Press, 1967, pp. 195–215.
9. EYMARD, P., L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, *Bull. Soc. Math. France*, **92**(1964), 181–236.
10. HAAGERUP, U., Standard forms of von Neumann algebras, *Math. Scand.*, **37**(1975), 271–283.
11. LANDSTAD, M. B., Duality theory for invariant systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **248**(1979), 223–267.
12. NAKAGAMI, Y., Dual action on a von Neumann algebra and Takesaki's duality for a locally compact group, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto*, **12**(1977), 727–775.
13. NAKAGAMI, Y.; TAKESAKI, M., *Duality for crossed products of von Neumann algebras*, Lecture Notes in Math., **731**(1979), Springer-Verlag.
14. ROBERTS, J. E., Cross products of a von Neumann algebra by group duals, *Inst. Nazionale di Alta Mat., Symposia Mathematica*, **20**(1976), Academic Press, 1977.
15. SAUVAGEOT, J.-L., Sur le produit tensoriel relatif d'espaces de Hilbert, *J. Operator Theory*, **9**(1983), 237–252.
16. SAUVAGEOT, J.-L., *Produit de Kronecker des représentations covariantes*, Tirage préliminaire, 1982.
17. SCHWARTZ, J.-M., Sur la structure des algèbres de Kac. I, *J. Functional Analysis*, **34**(1979), 370–406.
18. SCHWARTZ, J.-M., Sur la structure des algèbres de Kac. II, *Proc. London Math. Soc.*, **41**(1980), 465–480.
19. STINESPRING, F. W., Positive functions on C^*-algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6**(1955), 211–216.
20. TAKESAKI, M., Duality in crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, *Acta Math.*, **131**(1973), 249–310.
21. TATSUUMA, N., A duality theorem for locally compact groups, *J. Math. Kyoto Univ.*, **6**(1967), 187–293.

MICHEL ENOCK et JEAN-MARIE SCHWARTZ
Laboratoire de Mathématiques Fondamentales,
Université Pierre et Marie Curie,
4, place Jussieu,
F-75230, Paris Cedex 05,
France.

Received December 22, 1982; revised April 20, 1983.