J. OPERATOR THEORY
28(1992), 203–227

STABILITÉ ASYMPTOTIQUE DE CERTAINS SEMI-GROUPES D'OPÉRATEURS ET IDEAUX PRIMAIRES DE $L^1(\mathbb{R}^+)$

J. ESTERLE, E. STROUSE et F. ZOUAKIA

1. INTRODUCTION

L'objet de ce travail est de prouver le théorème suivant:

Soit E un espace de Banach et $(a^t)_{t\geqslant 0}$ un C_0-semi-groupe de $\mathcal{L}(E)$, borné, vérifiant $a^0 = I$ et soit A le générateur infinitésimal de $(a^t)_{t\geqslant 0}$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ est de synthèse spectrale pour $(\mathrm{i}SpA) \cap \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \int_0^\infty f(s) a^{t+s} \mathrm{d}s \right\| = 0.$$

Ce théoréme permet d'obtiner comme corollaire le théorème de Lyubich et Phong [18], Arendt et Batty [2] sur la stabilité asymptotique du semi-groupe $(a^t)_{t\geqslant 0}$ lorsque $(\mathrm{Sp}A)\cap\mathrm{i}\mathbb{R}$ est dénombrable et $(A-\lambda I)\mathcal{D}(A)$ est dense dans E pour tout $\lambda \in (\mathrm{Sp}A)\cap\mathrm{i}\mathbb{R}$. Ce qui nous a amené à nous interesser au problème de la stabilité asymptotique des semi-groupes d'opérateurs est l'étude des idéaux fermés des algèbres de convolution $L^1(\mathbb{R}^{+n})$. En effet, le second auteur a montré an 1987 dans [22] que si J est un idéal fermé de $L^1(\mathbb{R}^{+n})$ tel que J contient l'ensemble des éléments f de $L^1(\mathbb{R}^{+n})$ vérifiant $(\mathrm{supp} f)\cap[0,1]^n = \emptyset$ alors $J = \mathcal{L}^{-1}(J_1)$ où $J_1 = [\mathcal{L}(J)]^-$, $\mathcal{L}$ désignant la transformée de Laplace, à valeurs dans $\mathcal{A}_0^{(n)}$, l'algèbre des fonctions analytiques sur $\{z \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Re} z_1 > > 0, \mathrm{Re} z_2 > 0, ..., \mathrm{Re} z_n > 0\}$ continues sur $\{z \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Re} z_1 \geqslant 0, ..., \mathrm{Re} z_n \geqslant 0\}$ et tendant vers zéro à l'infini.

Un problème classique posé depuis 1950 par Levin (voir les contributions de Hedenmalm [12]) est de caracteriser les idéaux principaux denses de $L^1(\mathbb{R}^{+n})$. Le résultat de [22] suggère la conjecture suivante.

CONJECTURE. *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R}^{+n})$.
$[f * L^1(\mathbb{R}^{+n})]^- = L^1(\mathbb{R}^{n+})$ *si et seulement si* $[\mathcal{L}(f)\mathcal{A}_0^{(n)}]^- = \mathcal{A}_0^{(n)}$.

Ce résultat est bien connu pour $n = 1$. En effet le théorème de Nyman [19] peut s'interpréter de la façon suivante. Soit I un idéal fermé de $L^1(\mathbb{R}^+)$ et $Z(I) = \{z \in \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z \geqslant 0$ et $\mathcal{L}(f)(z) = 0$ pour tout $f \in I\}$. Si $Z(I) = \emptyset$ alors $I = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}(I)]^-)$.

La démonstration de Nyman, et la variante donnée par Dales dans [5] se fait en deux étapes. On considère un élément $g \in I^\perp$, le dual de $L^1(\mathbb{R}^+)$ étant identifié à $L^\infty(\mathbb{R}^-)$. On montre d'abord que $\mathcal{L}(g)$ s'étend en une fonction entière, puis que cette fonction entière est de type exponentiel. En réfléchissant sur le fait que $\mathcal{L}(g)$ est une fonction entière, nous avons établi un résultat simple et général (Proposition 2.1) qui permet d'étendre $\mathcal{L}(g)$ à $\mathbb{C}\backslash Z(\pi)$ où $\pi : L^1(\mathbb{R}^+) \to A$ est un homomorphisme continu de $L^1(\mathbb{R}^+)$ dans une algèbre de Banach, g est un élément de l'image du dual de A par l'application duale π^*, et où $Z(\pi)$ est un ensemble lié à π (qui coincide avec $Z(I)$ si π est l'application canonique de $L^1(\mathbb{R}^+)$ dans son quotient par un idéal fermé I). Ce point de vue est proche de celui développé par Y. Domar dans [7]. Nous établissons ensuite une formule (théorème 2.5) qui permet d'évaluer l'extension analytique de $\mathcal{L}(g)$ sur $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0, z \notin Z(\pi)\}$. Cette formule est le point de départ de la démonstration du résultat annoncé plus haut concernant les semi-groupes (qui est une version "continue" du théorème de Katznelson-Tzafriri pour les contractions sur un Banach [8], [17], [1], [10]). Elle permet aussi d'obtenir immédiatement la première étape de la démonstration de Nyman.

En ce qui concerne la deuxième étape de la démonstration, nous avons repris le point de vue adopté par Taylor et Williams dans l'étude des idéaux fermés de $\mathcal{A}^\infty(D)$. Ceci permet d'obtenir des estimations de la restriction de $\mathcal{L}(g)$ à l'axe imaginaire qui permettent, en utilisant la formule d'inversion de Fourier de même que dans [11], de montrer que $I = \mathcal{L}^{-1}([\mathcal{L}(I)]^-)$ si I est un idéal fermé de $L^1(\mathbb{R}^+)$ tel que $Z(I)$ contient au plus un point.

En utilisant la caractérisation de Beurling-Rudin des idéaux fermés de l'algèbre du disque on obtient ainsi aussi bien le théorème de Nyman (quand $Z(I) = \emptyset$) que celui de Gurarii (quand $Z(I)$ est réduit à un point).

2. TRANSFORMÉE DE LAPLACE ET DUALITÉ

On désigne par $\mathcal{M}(R^+)$ l'ensemble des mesures à variation totale bornée sur $[0, +\infty[$ et $L^1(\mathbb{R}^+)$ l'algèbre des fonctions absolument sommables sur R^+ munie du produit de convolution (defini presque partout)

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\mathrm{d}t,$$

pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}^+)$, $x \in \mathbb{R}^+$ de sorte que $L^1(\mathbb{R}^+)$ est un idéal fermé de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$. Par la suite, nous noterons $P^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0\}$ et $P^- = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z < 0\}$. Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$, on définit la transformée de Laplace de μ sur $\overline{P^+}$ par $\mathcal{L}(\mu)(z) = = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt}\mathrm{d}\mu(t)$. On a pour $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$, $\mathrm{Re} z \geqslant 0, \mathcal{L}(f)(z) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{d}t$. Il est bien connu que:

(1) $\mathcal{L}$ est un homomorphisme continu de $L^1(\mathbb{R}^+)$ dans $\mathcal{A}_0(\overline{P^+})$, l'algèbre des fonctions analytiques sur P^+, continues sur $\overline{P^+}$ et tendant vers 0 à l'infini.

(2) Les caractères de $L^1(\mathbb{R}^+)$ sont les homomorphismes

$$\mathcal{X}_z : L^1(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{C}, \quad z \in \overline{P^+},$$

$$f \to \mathcal{L}(f)(z)$$

et l'application $z \to \mathcal{X}_z$ est un homéomorphisme de $\overline{P^+}$ sur l'ensemble des caractères de $L^1(\mathbb{R}^+)$.

Soit $L^\infty(\mathbb{R}^-)$ l'ensemble des fonctions essentiellement bornées sur $\mathbb{R}^-$. On identifie $L^\infty(\mathbb{R}^-)$ au dual de $L^1(\mathbb{R}^+)$ par la dualité,

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty f(t)g(-t)\mathrm{d}t \quad (f \in L^1(\mathbb{R}^+) \text{ et } g \in L^\infty(\mathbb{R}^-)).$$

On peut définir la transformée de Laplace d'une fonction $g \in L^\infty(\mathbb{R}^-)$ sur P^- en posant pour $\mathrm{Re} z < 0, \mathcal{L}(g)(z) = \int_{-\infty}^0 g(t)\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{d}t$. $\mathcal{L}(g)$ est une fonction analytique sur P^- et $|\mathcal{L}(g)(z)| \leqslant \dfrac{\|g\|_\infty}{|\mathrm{Re} z|}$.

Soit $\mathfrak{B}$ une algèbre de Banach unitaire d'unité e et $\pi : \mathcal{M}(\mathbb{R}^+) \to \mathfrak{B}$, un homomorphisme continu unitaire. On pose $\mathfrak{A} = [\pi(L^1(\mathbb{R}^+))]^-$, la fermeture de $\pi(L^1(\mathbb{R}^+))$ dans $\mathfrak{B}$. On désignera également par π la restricion de π à $L^1(\mathbb{R}^+)$ et par π^* l'application duale de cette restriction, $\pi^* : \mathfrak{A}^* \to L^\infty(\mathbb{R}^-)$, $\mathfrak{A}^*$ étant le dual de $\mathfrak{A}$. Comme $L^1(\mathbb{R}^+)$ est un idéal de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$, le spectre de $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ est le même dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ et dans $L^1(\mathbb{R}^+) \oplus \mathbb{C}\delta_0, \delta_0$ étant la mesure de Dirac à l'origine. Le spectre de f sera noté $\mathrm{Sp}(f)$.

Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^+)$, défini par $u(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $x \in \mathbb{R}^+$. Il est bien connu (voir par exemple [20]) que $[\mathrm{Span}_{n \geqslant 0} u^{*n}]^- = L^1(\mathbb{R}^+)$ et $u^{*n}(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-x}$ pour tout $x \in \in \mathbb{R}^+$.

On a $\mathcal{L}(u)(z) = \dfrac{1}{z+1}$ pour tout $z \in \overline{P^+}$, donc $\mathrm{Sp}(u) = \left\{\dfrac{1}{z+1} : z \in \overline{P^+}\right\} \cup \{0\}$.

Posons $Z_1(\pi) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{1}{z+1} \in \mathrm{Sp}(\pi(u)) \right\}$. Comme $\mathrm{Sp}(\pi(u)) \subset \mathrm{Sp}(u)$, il vient que $Z_1(\pi) \subset \overline{P^+}$. Pour des raisons de connexité, dont nous aurons besoin ultérieurement, on va considérer le complémentaire $Z(\pi)$ de la composante connexe de $\mathbb{C}\backslash Z_1(\pi)$ contenant P^-. On supposera toujours que $i\mathbb{R} \not\subset Z(\pi)$. Dans ce cas, $\mathbb{C}\backslash Z(\pi) \neq \emptyset$, et $\mathbb{C}\backslash Z(\pi)$ est évidemment connexe.

Dans toute la suite on désignera par $H(\mathbb{C}\backslash Z(\pi))$ (resp. $H(P^+), H(P^-)$) l'ensemble des fonctions analytiques sur $\mathbb{C}\backslash Z(\pi)$ (resp. P^+, P^-) muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}\backslash Z(\pi)$ (resp P^+, P^-). On note ω^* la topologie faible $\sigma(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A})$. Nous avons la proposition siuvante.

PROPOSITION 2.1. (1) *$[e-(\lambda+1)\pi(u)]^{-1} \in \mathfrak{A} \oplus \mathbb{C}e$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\backslash Z(\pi)$;*

(2) *Si $g = \pi^*(L)$ avec $L \in \mathfrak{A}^*$, l'application*

$$\begin{gathered}\mathbb{C}\backslash Z(\pi) \to \mathbb{C}\\ \lambda \to \langle \pi(u)(e-(\lambda+1)\pi(u))^{-1}, L\rangle\end{gathered}$$

est une extension analytique de $\mathcal{L}(g)$ à $\mathbb{C}\backslash Z(\pi)$ (notée également $\mathcal{L}(g)$).

(3) *L'image par $\mathcal{L} \circ \pi^*$ de tout borné de $\mathfrak{A}^*$ est relativement compacte dans $H(\mathbb{C}\backslash Z(\pi))$ et $\mathcal{L} \circ \pi^* : (\mathfrak{A}^*, \omega^*) \to H(\mathbb{C}\backslash(\pi))$ est séquentiellement continue.*

Preuve. (1) Comme la frontière de $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{A}\oplus\mathbb{C}e}(\pi(u))$ est contenue dans $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}\pi(u)$, comme $\mathbb{C}\backslash Z(\pi)$ est connexe et comme $[e-(\lambda+1)\pi(u)]^{-1} \in \mathfrak{A}\oplus\mathbb{C}e$ pour tout $\lambda \in P^-$, $[e-(\lambda+1)\pi(u)]^{-1} \in \mathfrak{A} \oplus \mathbb{C}e$ et $\pi(u)[e-(\lambda+1)\pi(u)]^{-1} \in \mathfrak{A}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\backslash Z(\pi)$.

(2) Soit $g = \pi^*(L)$, $L \in \mathfrak{A}^*$. Si $z \in P^-$ alors $\frac{1}{z+1} \notin \mathrm{Sp}(u)$ et $(\delta_0 - (z+1)u)$ est inversible dans $L^1(\mathbb{R}^+) \oplus \mathbb{C}\delta_0$. En particulier, pour $|z+1| < 1$, on a

$$(\delta_0 - (z+1)u)^{-1} = \delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (z+1)^n u^{*n}.$$

Donc pour $|z+1| < 1$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on a presque partout

$$[u * (\delta_0 - (z+1)u)^{-1}](x) = \mathrm{e}^{-x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n!} x^n \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{zx}.$$

Donc pour $|z+1| < 1$ on a

$$\mathcal{L}(g)(z) = \int_{-\infty}^{0} g(t)\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{d}t = \langle u * (\delta_0 - (z+1)u)^{-1}, g\rangle.$$

Par principe du prolongement analytique, cette égalité reste vraie pour $z \in P^-$. Or pour $z \in P^-$, on a

$$\langle u * (\delta_0 - (z+1)u)^{-1}, g\rangle = \langle u * (\delta_0 - (z+1)u)^{-1}, \pi^*(L)\rangle =$$

$$= \langle \pi(u)(e - (z+1)\pi(u))^{-1}, L\rangle.$$

Comme l'application

$$G : \mathbb{C}\backslash Z(\pi) \to \mathbb{C}$$

$$\lambda \to \langle \pi(u)(e - (\lambda+1)\pi(u))^{-1}, L\rangle$$

est analytique, elle est un prolongement analytique de $\mathcal{L}(g)$ à $\mathbb{C}\backslash Z(\pi)$, ce qui prouve (2).

(3) Soit (L_n) une suite d'éléments de $\mathfrak{A}^*$ convergeant faiblement vers $L \in \mathfrak{A}^*$. Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash Z(\pi)$ on a

$$\langle \pi(u)(e - (z+1)\pi(u))^{-1}, L_n\rangle = (\mathcal{L} \circ \pi^*)(L_n)(z).$$

Donc $(\mathcal{L} \circ \pi^*)(L_n)(z) \to (\mathcal{L} \circ \pi^*)(L)(z)$ $(n \to \infty)$ pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash Z(\pi)$. Par le théorème de Banach-Steinhaus, la suite L_n est bornée, donc la suite $(\mathcal{L} \circ \pi^*)(L_n)$ est bornée sur tout compact de $\mathbb{C}\backslash Z(\pi)$ et la convergence de $(\mathcal{L}\circ\pi^*)(L_n)$ vers $(\mathcal{L}\circ\pi^*)(L)$ est uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}\backslash Z(\pi)$. Si K est un borné de $\mathfrak{A}^*$, on obtient que $(\mathcal{L} \circ \pi^*)(K)$ est borné sur tout compact, donc relativement compact sur $H(\mathbb{C}\backslash Z(\pi))$, en utilisant aussi le fait que

$$\langle \pi(u)(e - (z+1)\pi(u))^{-1}, L\rangle = (\mathcal{L} \circ \pi^*)(L)(z)$$

pour tout $L \in K$ et tout $z \in \mathbb{C}\backslash Z(\pi)$.

DÉFINITION 2.2. Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R}^-)$ et $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$. On désignera par $g \circ \mu$, l'élément de $L^\infty(\mathbb{R}^-)$ défini par

$$\langle f, g \circ \mu\rangle = \langle f * \mu, g\rangle,$$

pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$, avec $f * \mu$ défini pour $x \in \mathbb{R}^+$ par $f * \mu(x) = \int_0^\infty f(x-t)d\mu(t)$.

REMARQUES 2.3. (1) Soit $L \in \mathfrak{A}^*$ et soit $g = \pi^*(L)$. On a

$$\langle f, g \circ \mu\rangle = \langle f * \mu, g\rangle = \langle f * \mu, \pi^*(L)\rangle =$$

$$= \langle \pi(f)\pi(\mu), L\rangle \quad (f \in L^1(\mathbb{R}^+), \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)).$$

Si on note par $L \circ \pi(\mu)$ l'élément de $\mathfrak{A}^*$ défini par $\langle a, L \circ \pi(\mu)\rangle = \langle a.\pi(\mu), L\rangle$ pour tout $a \in \mathfrak{A}$, alors

$$\langle f, g \circ \mu\rangle = \langle \pi(f), L \circ \pi(\mu)\rangle =$$

$$= \langle f, \pi^*(L \circ \pi(\mu))\rangle$$

pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et tout $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$. On a donc $g \circ \mu \in \pi^*(\mathfrak{A}^*)$ pour tout $g \in \pi^*(\mathfrak{A}^*)$ et tout $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$.

(2) Si $g \in L^\infty(\mathbb{R}^-)$, $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ alors $g*\mu|_{\mathbb{R}^-}$ est donné par la formule $(g*\mu)(t) = = \int_0^\infty f(t-s)d\mu(s)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^-$.

On a bien $(g*\mu)|_{\mathbb{R}^-} \in L^\infty(\mathbb{R}^-)$ et pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$

$$\langle f, (g*\mu)|_{\mathbb{R}^-}\rangle = \int_0^\infty f(t)(g*\mu)(-t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\left[\int_0^\infty g(-t-s)d\mu(s)\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi - s)g(-\xi)d\mu(s)d\xi =$$

$$= \int_0^\infty g(-\xi)\left[\int_0^\infty f(\xi-s)d\mu(s)\right]d\xi =$$

$$= \langle f*\mu, g\rangle = \langle f, g\circ\mu\rangle.$$

Nous avons donc $g \circ \mu = (g*\mu)|_{\mathbb{R}^-}$. Ceci nous amène à la définition suivante:

Définition 2.4. Si $g \in L^\infty(\mathbb{R}^-)$, $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$, on notera $g\Box\mu$ la fonction

$$g\Box\mu = (g*\mu)|_{\mathbb{R}^+}.$$

On peut évidemment poser pour $z \in P^+$:

$$\mathcal{L}(g\Box\mu)(z) = \int_0^\infty (g\Box\mu)(t)\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{d}t$$

et $\mathcal{L}(g\Box\mu)$ est une fonction analytique sur P^+.

Théorème 2.5. *Si $g \in \pi^*(\mathfrak{A}^*)$ et $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$, alors on a l'égalité*

$$\mathcal{L}(g\circ\mu)(z) + \mathcal{L}(g\Box\mu)(z) = \mathcal{L}(g)(z)\mathcal{L}(\mu)(z)$$

pour tout $z \in P^+ \backslash Z(\pi)$.

Preuve. D'après la remarque 2.3, $g \circ \mu \in \pi^*(\mathfrak{A}^*)$ et donc $\mathcal{L}(g)$ et $\mathcal{L}(g\circ\mu)$ sont définies et analytiques sur $\mathbb{C}\backslash Z(\pi)$ en vertu de la proposition 2.1. $\mathcal{L}(\mu)$ et $\mathcal{L}(g\Box\mu)$

sont définies dans P^+ et donc les deux membres de l'égalité ont bien un sens dans $P^+\backslash Z(\pi)$. Fixons $g \in \pi^*(\mathfrak{A}^*)$ et $z \in P^+\backslash Z(\pi)$ et considérons la fonction

$$\varphi : \mathcal{M}(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{C}$$

$$\mu \to \mathcal{L}(g \circ \mu)(z) + \mathcal{L}(g\Box\mu)(z) - \mathcal{L}(g)(z)\mathcal{L}(\mu)(z).$$

Il est évident que φ est linéaire. Nous allons montrer qu'elle est continue.

Soit (μ_n) une suite de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ telle que $\|\mu_n\|_1 \to 0 \ \ (n \to \infty)$. On a $\mathcal{L}(\mu_n)(z) \to$ $\to 0 \ \ (n \to \infty)$. On a aussi $\|g * \mu_n\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty \|\mu_n\|_1$, pour tout n. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \|g \circ \mu_n\|_\infty = 0 \ \text{ et } \ \lim_{n\to\infty} \|g\Box\mu_n\|_\infty = 0.$$

On a

$$\mathcal{L}(g\Box\mu_n)(z) = \int_0^\infty (g\Box\mu_n)(t)\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{d}t \to 0 \ \ (n \to \infty),$$

et de la proposition 2.2 résulte que $\mathcal{L}(g \circ \mu_n)(z) \to 0 \ \ (n \to \infty)$. Donc $\varphi(\mu_n) \to 0 (n \to \infty)$ et φ est continue. Nous voulons prouver que $\varphi \equiv 0$. Pour cela, il suffit de montrer que $\varphi(\mu) = 0$ lorsque μ est à support compact. Supposons que $\mathrm{supp}\mu \subset$ $\subset [0, a], a > 0$. Alors $\mathrm{supp}(g\Box\mu) \subset [0, a]$, et $\mathcal{L}(\mu)$ et $\mathcal{L}(g\Box\mu)$ sont des fonctions entières. Si $\lambda \in P^-$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (g * \mu)(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} g(\xi)\mathrm{e}^{-\lambda(s+\xi)}d\mu(s)d\xi =$$

$$= \mathcal{L}(g)(\lambda)\mathcal{L}(\mu)(\lambda).$$

Donc $\mathcal{L}(g \circ \mu)(\lambda) + \mathcal{L}(g\Box\mu)(\lambda) = \mathcal{L}(g)(\lambda)\mathcal{L}(\mu)(\lambda)$, pour tout $\lambda \in P^-$.

Or, les quatre fonctions ci-dessus sont analytiques sur $\mathbb{C}\backslash Z(\pi)$, et $\mathbb{C}\backslash Z(\pi)$ est connexe, donc

$$\mathcal{L}(g \circ \mu)(\lambda) + \mathcal{L}(g\Box\mu)(\lambda) = \mathcal{L}(g)(\lambda) \cdot \mathcal{L}(\mu)(\lambda)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\backslash Z(\pi)$. Donc $\varphi(\mu) = 0$, ce qui achève la preuve.

Par la suite, nous adopterons la même notation w* pour désigner les topologies faibles $\sigma(L^\infty(\mathbb{R}^-), L^1(\mathbb{R}^+))$ et $\sigma(\mathcal{M}(\mathbb{R}^+), \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+))$ ou $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$ est l'espace de Banach des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ et tendant vers zéro à l'infini. On notera par $\mathcal{F}f$ la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$. On dira [16] que $f \in L^1(\mathbb{R})$ est de synthèse spectrale pour un fermé F de $\mathbb{R}$ lorsqu'il existe une suite (f_n) de $L^1(\mathbb{R})$ telle que

(i) $\|f_n - f\|_1 \to 0 \ \ (n \to \infty)$ et

(ii) $\mathcal{F}f_n \equiv 0$ au voisinage de F pour tout n.

On dira aussi qu'un fermé F de $\mathbb{R}$ est un ensemble de synthèse lorsque tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathcal{F}f \equiv 0$ sur F est de synthèse spectrale pour F.

Le théorème suivant est le théorème principal de ce paragraphe.

THÉORÈME 2.7. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ de synthèse spectrale pour $(-\mathrm{i}Z(\pi)) \cap \mathbb{R}$, et soit (μ_n) une suite de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$. Si $\mu_n \xrightarrow{w^*} 0$ $(n \to \infty)$ alors $\|\pi(f * \mu_n)\| \to 0$ $(n \to \infty)$.*

La preuve de ce théorème nécessite trois résultats préliminaires. Le lemme suivant est certainement bien connu.

LEMME 2.8. *Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ (resp. $L^\infty(\mathbb{R}^-)$) telle que $\mathcal{L}(g)$ s'étende continûment en une fonction (notée aussi $\mathcal{L}(g)$) sur $P^+ \cup U$ (resp. $P^- \cup U$) où U est un ouvert de $\mathrm{i}\mathbb{R}$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}\mathcal{F}f$ est compact contenu dans $-\mathrm{i}U$. On a pour presque tout $t \in \mathbb{R}$*

$$(g * f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\operatorname{supp}\mathcal{F}f} \mathcal{F}f(y)\mathcal{L}(g)(\mathrm{i}y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}yt}dy.$$

Preuve. Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$. Pour tout $x > 0$, posons $g_x(t) = g(t)\mathrm{e}^{-xt}$. On a $g_x \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$, $g_x * f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{F}(g_x * f) = \mathcal{F}(g_x)\mathcal{F}(f)$. Comme $\mathcal{F}f$ est à support compact, on obtient par la formule d'inversion de Fourier que $(g_x * f)(s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\operatorname{supp}\mathcal{F}f} \mathcal{F}f(y)\mathcal{F}(g_x)(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ys}dy$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Or $\mathcal{F}(g_x)(y) =$
$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yt}\mathrm{d}t = \mathcal{L}(g)(x + \mathrm{i}y)$, donc

$$(g_x * f)(s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\operatorname{supp}\mathcal{F}f} \mathcal{L}(g)(x + \mathrm{i}y)\mathcal{F}f(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ys}dy$$

et

$$(1) \qquad (g_x * f)(s) \underset{x \to 0+}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\operatorname{supp}\mathcal{F}f} \mathcal{L}(g)(\mathrm{i}y)\mathcal{F}f(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ys}dy.$$

On a aussi $(g_x * f)(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(s-t)\mathrm{d}t + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(s-t)[-1 + \mathrm{e}^{-xt}]\mathrm{d}t$. Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{x \to 0+} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(s-t)[-1 + \mathrm{e}^{-xt}]\mathrm{d}t = 0$$

et donc

$$(g * f)(s) = \lim_{x \to 0+} (g_x * f)(s) \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

(1) et (2) nous donnent $(g * f)(s) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathrm{supp}\mathcal{F}f} \mathcal{F}f(y)\mathcal{L}(g)(\mathrm{i}y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ys}dy$. La démonstration est analogue dans le cas $g \in L^\infty(\mathbb{R}^-)$, en posant $h(t) = g(-t)$ pour $t \in \mathbb{R}^+$.

LEMME 2.9. *Soit $\rho_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^-)$, $\rho_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ et U un ouvert de $\mathrm{i}\mathbb{R}$. On suppose que $\mathcal{L}(\rho_1)$ se prolonge continûment à $P^- \cup U$ et $\mathcal{L}(\rho_2)$ se prolonge continûment à $P^+ \cup U$ avec $\mathcal{L}(\rho_1)|U = -\mathcal{L}(\rho_2)|U$. On a $(\rho_1 + \rho_2) * \Psi = 0$ pour tout $\Psi \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}\mathcal{F}\Psi \subset -\mathrm{i}U$.*

Preuve. Si $\mathrm{supp}\mathcal{F}\Psi$ est compact, le lemme précédent implique que $\rho_1 * \Psi = -\rho_2 * \Psi$ et donc $(\rho_1 + \rho_2) * \Psi = 0$.

Supposons que $\mathrm{supp}(\mathcal{F}\Psi)$ n'est pas compact. On a $\Psi \in [\Psi * L^1(\mathbb{R})]^-$ car $L^1(\mathbb{R})$ possède une unité approchée bornée. Comme l'ensemble des éléments de $L^1(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact est dense dans $L^1(\mathbb{R})$, il existe donc une suite (φ_n) de $L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}\mathcal{F}(\varphi_n)$ est compact pour tout n et $\|\Psi - \Psi * \varphi_n\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$. Alors $\mathrm{supp}\mathcal{F}(\Psi * \varphi_n)$ est compact et contenu dans $-\mathrm{i}U$, donc de ce qui précède il vient que $(\rho_1 + \rho_2) * \Psi * \Psi_n = 0$ pour tout n. L'application $h \to (\rho_1 + \rho_2) * h$ étant continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$, on a donc $(\rho_1 + \rho_2) * \Psi = 0$. On en déduit la propriété suivante.

LEMME 2.10. *Soit L_n une suite bornée d'éléments de $\mathfrak{A}^*$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ de synthèse spectrale pour $(-\mathrm{i}Z(\pi)) \cap \mathbb{R}$ et soit (μ_n) une suite d'éléments de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$. Si $\mu_n \xrightarrow{\mathrm{w}^*} 0$ $(n \to \infty)$ alors $(\pi^*(L_n) \circ \mu_n) \circ f \xrightarrow{\mathrm{w}^*} 0$ $(n \to \infty)$*

Preuve. Par la remarque 2.3.1, $\pi^*(L_n)\circ\mu_n \in \pi^*(\mathfrak{A}^*)$, donc $\pi^*(L_n)\circ\mu_n \in L^\infty(\mathbb{R}^-)$ et $(\pi^*(L_n) \circ \mu_n) \circ f$ est bien défini. Il suffit de montrer que zéro est la seule valeur d'adhérence de la suite $(\pi^*(L_n)\circ\mu_n\circ f)$ pour la topologie w*. Les suites $(\pi^*(L_n)\circ\mu_n)$ et $(\pi^*(L_n)\square\mu_n)$ étant bornées dans $L^\infty(\mathbb{R}^-)$ et $L^\infty(\mathbb{R}^+)$ et la suite $\mathcal{L}(\pi^*(L_n) \circ \mu_n)$ étant bornée sur tout compact de $\mathbb{C}\backslash Z(\pi)$, il suffit donc de se placer dans le cas où

$$\pi^*(L_n) \circ \mu_n \xrightarrow{\mathrm{w}^*} \rho_1 \quad (n \to \infty), \pi^*(L_n)\square\mu_n \xrightarrow{\mathrm{w}^*} \rho_2 \quad (n \to \infty),$$

$$\mathcal{L}(\pi^*(L_n) \circ \mu_n) \to H \quad (n \to \infty)$$

uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}\backslash Z(\pi)$ et de prouver que $\rho_1 \circ f = 0$. Comme $\mathcal{L}(\mu_n)(z) = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt}d\mu_n(t) \to 0$ $(n \to \infty)$, il résulte du théorème 2.5 que

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(\pi^*(L_n) \circ \mu_n) = -\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(\pi^*(L_n)\square\mu_n)$$

pour tout $z \in P^+ \cap (\mathbb{C}\backslash Z(\pi))$.

Considérons la fonction

$$F(z) = \begin{cases} H(z) & \text{si } z \in \mathbb{C}\backslash Z(\pi) \\ -\mathcal{L}(\rho_2)(z) & \text{si } z \in P^+ \end{cases}$$

F est définie et analytique sur $\mathbb{C}\backslash(Z(\pi) \cap \mathrm{i}\mathbb{R})$. Elle vérifie $F|P^- = \mathcal{L}(\rho_1)$ et $F|P^+ = -\mathcal{L}(\rho_2)$.

Posons $U = \mathrm{i}\mathbb{R}\backslash(Z(\pi) \cap \mathrm{i}\mathbb{R})$; f étant de synthèse spectrale pour $(-\mathrm{i}Z(\pi)) \cap \mathbb{R}$, il existe une suite (f_n) de $L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}\mathcal{F}(f_n) \subset -\mathrm{i}U$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0 (n \to \infty)$. Donc $\|(\rho_1 + \rho_2) * f - (\rho_1 + \rho_2) * f_n\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty)$. En vertu du lemme précédent, $(\rho_1 + \rho_2) * f_n = 0$ pour tout n donc $(\rho_1 + \rho_2) * f = 0$. Comme $\rho_2 = 0$ sur $\mathbb{R}^-$ on a $\rho_1 * f = 0$ sur $\mathbb{R}^-$ et $\rho_1 \circ f = 0$, ce qui achève la preuve.

Preuve du théorème 2.7. Soit $h \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Par le théorème de Hahn Banach, il existe une suite (L_n) de $\mathfrak{A}^*$, telle que $\|L_n\| = 1$ pour tout n et $\langle \pi(f * h * \mu_n), L_n \rangle = \|\pi(f * h * \mu_n)\|$. Posons $g_n = \pi^*(L_n)$. Le lemme 2.10 nous donne que

$$\|\pi(f * h * \mu_n)\| = \|\pi(f)\pi(h)\pi(\mu_n)\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Or la suite $(\pi(\mu_n))$ est bornée et $L^1(\mathbb{R}^+)$ possède une unité approchée bornée donc $\|\pi(f * \mu_n)\| \to 0 \quad (n \to \infty)$. Ce qui achève la preuve du théorème.

Si $Z(\pi) \cap \mathrm{i}\mathbb{R} = \emptyset$, alors tout elémént de $L^1(\mathbb{R}^+)$ est de synthèse spectrale pour $(-\mathrm{i}Z(\pi)) \cap \mathbb{R}$. On a donc le corollaire suivant:

COROLLAIRE 2.11. *Si $Z(\pi) \cap \mathrm{i}\mathbb{R} = \emptyset$, alors pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et toute suite (μ_n) de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ tendant* w* *vers zéro on a $\|\pi(f * \mu_n)\| \to 0 \quad (n \to \infty)$.*

REMARQUE 2.12. On peut donner une démonstration simple et directe de ce corollaire. Pour cela il suffit de montrer que si $(g_n) = (\pi^*(L_n))$ avec (L_n) bornée dans $\mathfrak{A}^*$ et si $(\mu_n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ vérifie $\mu_n \xrightarrow{w^*} 0 \quad (n \to \infty)$ alors $g_n \circ \mu_n \xrightarrow{w^*} 0 \quad (n \to \infty)$. Pour prouver cela, on constate qu'il existe $M > 0$ tel que $\|g_n \circ \mu_n\|_\infty \leqslant M$ et $\|g_n \Box \mu_n\|_\infty \leqslant M$, pour tout n et que la suite $(\mathcal{L}(g_n \circ \mu_n))_n$ (resp. $(\mathcal{L}(g_n \Box \mu_n))_n$) est normale dans $H(\mathbb{C}\backslash Z(\pi))$ (resp. $H(P^+)$). Il suffit donc de montrer que si $\mathcal{L}(g_n \circ \mu_n) \to F \quad (n \to \infty)$ dans $H(\mathbb{C}\backslash Z(\pi))$ alors $F = 0$. L'utilisation du théorème 2.5, du fait que $(\mathcal{L}(g_n \circ \mu_n))$ et $(\mathcal{L}(g_n \Box \mu_n))$ sont normales et que $Z(\pi) \cap \mathrm{i}\mathbb{R} = \emptyset$ nous permet d'étendre F en une fonction entière G telle que $|G(z)| \leqslant \dfrac{M}{|\mathrm{Re} z|}$ pour tout $z \notin \mathrm{i}\mathbb{R}$. On conclut alors par le résultat suivant.

PROPOSITION 2.13. *Si G est une fonction entière et vérifie $|G(z)| \leqslant \dfrac{M}{|\mathrm{Re} z|}$ pour tout $z \notin \mathrm{i}\mathbb{R}$ alors $G = 0$.*

Preuve. Pour tout entier naturel n, considérons la fonction $H(z) = (z + \mathrm{i}n)(z - \mathrm{i}n)G(z)$. Pour $|z| = n$, nous avons $|H(z)| \leqslant 4nM$ et par principe du maximum, $|H(0)| \leqslant 4nM$ donc $|G(0)| \leqslant \frac{4M}{n}$ et ceci pour tout n donc $G(0) = 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $G_x(z) = G(z + \mathrm{i}x), z \in \mathbb{C}$. Nous avons pour $z \notin \mathrm{i}\mathbb{R}$, $|G_x(z)| \leqslant \frac{M}{|\mathrm{Re}(z + \mathrm{i}x)|} = \frac{M}{|\mathrm{Re} z|}$. De ce qui précède, nous aurons $G_x(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $G(\mathrm{i}x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par le principe des zéros isolés, ceci ne peut être vrai que si $G = 0$.

3. STABILITÉ ASYMPTOTIQUE DE CERTAINS SEMI-GROUPES D'OPÉRATEURS

Dans ce paragraphe l'algèbre de Banach $\mathfrak{B}$ considérée est l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ des opérateurs bornés sur un espace de Banach E. On se donne un C_0-semi-groupe borné $(a^t)_{t \geqslant 0}$ dans $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire un semi-groupe fortement continu sur $[0, +\infty[$, borné, et tel que $a^0 = I$ [13, p. 321]. Ce semi-groupe nous permet de définir l'homomorphisme continu

$$\pi : \mathcal{M}(\mathbb{R}^+) \to \mathcal{L}(E) \quad \text{où} \quad \pi(\mu) \cdot x = \int_0^\infty a^t \cdot x \mathrm{d}\mu(t)$$

pour tout $x \in E$ et tout $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$. L'intégrale ci-dessus est définie au sens de Bochner et commute avec les formes linéaires continues. L'image par π de la mesure de Dirac au point t, δ_t, n'est autre que a^t.

PROPOSITION 3.1.

$$\pi(L^1(\mathbb{R}^+))E = E.$$

Preuve. Pour tout $n \geqslant 1$, soit $e_n = n\mathcal{X}_{[0,1/n]}$ où $\mathcal{X}_{[0,1/n]}$ est la fonction caractéristique de $[0, 1/n]$; (e_n) est une unité approchée bornée de $L^1(\mathbb{R}^+)$. Si $x \in E$, on a pour tout $n \geqslant 1$,

$$\|\pi(e_n) \cdot x - x\| = n \int_0^{1/n} (a^t x - x) \mathrm{d}t.$$

Donc

$$\|\pi(e_n) \cdot x - x\| \leqslant \sup_{t \in [0,1/n]} \|a^t x - x\|$$

et $\|\pi(e_n) \cdot x - x\| \to 0 \ (n \to \infty)$. Nous avons donc montré que $[\pi(L^1(\mathbb{R}^+))E]^- = E$. Le théorème de factorisation de Cohen [4] nous donne que $\pi(L^1(\mathbb{R}^+))E = E$.

REMARQUE 3.2. Réciproquement la donnée d'un homomorphisme continu $\pi : \mathcal{M}(\mathbb{R}^+) \to \mathcal{L}(E)$ tel que $\pi(L^1(\mathbb{R}^+))E = E$ entraine l'existence d'un C_0-semi-groupe borné $(a^t)_{t \geqslant 0} \subset \mathcal{L}(E)$ vérifiant $a^0 = I$, tel que l'application associée à $(a^t)_{t \geqslant 0}$

comme ci-dessus soit π. Il suffit pour cela de prendre $a^t = \pi(\delta_t)$ pour $t \geqslant 0$ et d'utiliser l'identité $\mu * f = \int_0^\infty (f * \delta_t) d\mu(t)$ valable pour $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$, $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$, l'intégrale étant prise au sens de Bochner.

DÉFINITION 3.3. *Ou dit qu'un semi-groupe $(b^t)_{t\geqslant 0} \subset (E)$ est asymptotiquement stable lorsque $\lim_{t\to\infty} \|b^t \cdot x\| = 0$ pour tout $x \in E$.*

Si $E = \mathcal{C}_0([0, +\infty])$, $(b^t f)(x) = f(x+t)$ pour $t \geqslant 0$, $x \in [0, +\infty[$, alors $(b^t)_{t\geqslant 0}$ est asymptotiquement stable.

Si $E = L^2(\mathbb{R})$ et $(b^t f)(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt} f(x)$ pour tout $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, alors $(b^t)_{t\geqslant 0}$ n'est pas asymptotiquement stable. Nous allons maintenant étudier la stabilité asymptotique du C_0-semi-groupe $(a^t)_{t\geqslant 0}$ introduit plus haut. Soit A le générateur infinitésimal du semi-groupe $(a^t)_{t\geqslant 0}$ et posons $B = -A$. Il est bien connu [13, Chap. X] que B vérifie les trois propriétés suivantes:

P_1: Le domaine $\mathcal{D}(B)$ de B est dense dans E et B est un opérateur fermé.

P_2: Pour tout $x \in \mathcal{D}(B)$, l'application $t \to a^t \cdot x$ est dérivable sur $[0, +\infty[$, de dérivée $-a^t \cdot B \cdot x$.

P_3: $(B + \lambda I)^{-1} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} a^t \mathrm{d}t$, pour tout $\lambda \notin \mathrm{Sp}A$; en particulier

$$(B + I)^{-1} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} a^t \mathrm{d}t = \pi(u).$$

De la propriété P_3, on déduit

P_4: (1) $[I - (\lambda+1)\pi(u)](E) = [I - (\lambda+1)\pi(u)](B+I)(\mathcal{D}(B)) = (B - \lambda I)\mathcal{D}(B)$.

(2) $Z(\pi) \cap \mathrm{i}\mathbb{R} = (\mathrm{Sp}B) \cap \mathrm{i}\mathbb{R}$ donc $[(-\mathrm{i}Z(\pi)) \cap \mathbb{R}] = [(\mathrm{iSp}A) \cap \mathbb{R}]$.

Nous avons le théorème suivant:

THÉORÈME 3.4. *Soit E un espace de Banach et $(a^t)_{t\geqslant 0} \subset \mathcal{L}(E)$ un C_0-semi-groupe borné vérifiant $a^0 = I$ et soit A le générateur infinitésimal de $(a^t)_{t\geqslant 0}$.*

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ est de synthèse pour $(\mathrm{iSp}A) \cap \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \int_0^\infty f(s) a^{t+s} \mathrm{d}s \right\| = 0.$$

Preuve. Comme $\delta_t \xrightarrow{w^*} 0$ $(t \to \infty)$, il résulte du théorème 2.7 que $\|\pi(f)\pi(\delta_t)\| \to$ $\to 0 (t \to \infty)$. Donc

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \int_0^\infty f(s) a^{t+s} \mathrm{d}s \right\| = \lim_{t\to\infty} \|\pi(f) a^t\| = 0.$$

De la proposition 3.1 et du théorème précédent on déduit en particulier le corollaire suivant (l'ensemble vide est de synthèse !):

COROLLAIRE 3.5 ([18],[2]). *Soit E un espace de Banach et $(a^t)_{t\geqslant 0} \subset \mathcal{L}(E)$ un C_0-semi-groupe borné vérifiant $a^0 = I$ et soit A le générateur infinitésimal de $(a^t)_{t\geqslant 0}$. Si $(\mathrm{Sp}A) \cap \mathrm{i}\mathbb{R} = \emptyset$ alors le semi-groupe $(a^t)_{t\geqslant 0}$ est asymptotiquement stable.*

On déduit également du théorème 3.4 le résultat suivant, obtenu par des méthodes fort différentes par Lyubich-Phong [18] et Arendt-Batty [2].

THÉORÈME 3.6. *Soit E un espace de Banach et $(a^t)_{t\geqslant 0} \subset \mathcal{L}(E)$ un C_0-semi-groupe borné, tel que $a^0 = I$ et soit A son générateur infinitésimal. Si $(\mathrm{Sp}A) \cap \mathrm{i}\mathbb{R}$ est dénombrable et si $(A + \lambda I)\mathcal{D}(A)$ est dense dans E pour tout $\lambda \in (\mathrm{Sp}(-A)) \cap \mathrm{i}\mathbb{R}$ alors le semi-groupe $(a^t)_{t\geqslant 0}$ est asymptotiquement stable.*

De la propriété P_4, il découle que $(\mathrm{Sp}A) \cap \mathrm{i}\mathbb{R}$ est dénombrable et si $(A+\lambda I)\mathcal{D}(A)$ est dense dans E pour tout $\lambda \in (\mathrm{Sp}(-A)) \cap \mathrm{i}\mathbb{R}$ alors $Z(\pi) \cap \mathrm{i}\mathbb{R}$ est dénombrable et $[I - (\lambda - 1)\pi(u)](E)$ est dense dans E pour tout $\lambda \in Z(\pi) \cap \mathrm{i}\mathbb{R}$. Comme les fermés denombrables sont de synthèse [16], on a d'àpres le théorème 3.4 que $\|\pi(f)a^t\| \to$ $\to 0$ $(t \to \infty)$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et la stabilité asymptotique du semi-groupe $(a^t)_{t\geqslant 0}$ sera obtenue grâce au théorème suivant, qui semble présenter un intérêt indépendant en lui-même.

THÉORÈME 3.7. *Soit E un space de Banach et $(a^t)_{t\geqslant 0} \subset \mathcal{L}(E)$ un C_0-semi-groupe borné tel que $a^0 = I$. Soit A le générateur infinitésimal de (a^t) et soit A^* l'adjoint de A. Soit $I_0 = \{f \in L^1(\mathbb{R}^+) : \mathcal{F}f = 0$ sur $(\mathrm{iSp}A) \cap \mathbb{R}\}$. Si $(\mathrm{Sp}A) \cap \mathrm{i}\mathbb{R}$ est dénombrable et si A^* n'a aucune valeur propre dans $\mathrm{i}\mathbb{R}$ alors*

$$\mathrm{Span}\left\{\int_0^\infty f(t)a^t \cdot x\mathrm{d}t \ : \ f \in I_0, x \in E\right\}$$

est dense dans E.

D'après le théorème de Hahn-Banach, l'ensemble des valeurs propres de A^* n'est autre que l'ensemble des éléments λ de $\mathbb{C}$ tels que $(\lambda - A)\mathcal{D}(A)$ est non dense dans E. Il résulte alors de la propriété P_4 et des hypothèses du théorème 3.7 que $Z(\pi) \cap \mathrm{i}\mathbb{R}$ est dénombrable, que $[I - (\lambda + 1)\pi(u)](E)$ est dense dans E pour tout $\lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ et que

$$I_0 = \{f \in L^1(\mathbb{R}^+) : \mathcal{F}f = 0 \text{ sur } (-\mathrm{i}Z(\pi)) \cap \mathbb{R}\}.$$

Dans la preuve du théorème 3.7, nous allons utiliser essentiellement des arguments d'analyse harmonique. Rappelons qu'une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ est presque périodique si l'ensemble des translatés de f est précompact dans $L^\infty(\mathbb{R})$ (voir [16]). Si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ est presque périodique, on sait que [3, p.60] pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T e^{-i\lambda\xi} f(\xi) d\xi$ existe et est nulle sauf pour un ensemble dénombrable $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Les λ_i sont appelés les fréquences de f. On sait qu'une fonction presque périodique n'admettant pas de fréquences est nulle [3].

Pour prouver le théorème 3.7, nous avons besoin du lemme suivant, qui est l'équivalent pour $L^1(\mathbb{R})$ d'un résultat bien connu pour l'algèbre de Wiener $A(\Gamma)$.

LEMME 3.8. *Soit S un ensemble fermé dénombrable de $\mathbb{R}$ et*

$$J = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \mathcal{F}f = 0 \text{ sur } S\}.$$

Posons $J^+ = J \cap L^1(\mathbb{R}^+)$. Alors l'injection $i : L^1(\mathbb{R}^+)/J^+ \to L^1(\mathbb{R})/J$ est un isomorphisme isométrique.

Preuve. Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et soit $e_n : x \to n\mathcal{X}_{[0,1/n]}$ de sorte que (e_n) est une unité approchée de $L^1(\mathbb{R})$ de norme 1.

Posons $\langle f, g\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(-t)dt$ $(f \in L^1(\mathbb{R}),\ g \in L^\infty(\mathbb{R}))$. On a $\langle f, g * e_n\rangle = (f * g * e_n)(0) = \langle f * e_n, g\rangle$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ et tout $n \geqslant 1$. Donc $\langle f, g\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle f, g * e_n\rangle$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ et alors

$$||g||_\infty \leqslant \liminf ||g * e_n||_\infty \leqslant \limsup ||g * e_n||_\infty \leqslant ||g||_\infty$$

donc $||g||_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} ||g * e_n||_\infty$.

Si $g \in J^\perp$, $g * e_n \in J^\perp$ et est uniformément continue pour tout n. Donc $g * e_n$ est presque périodique [16] et vérifie $||g * e_n||_\infty = ||(g * e_n)|[-\infty, 0]||_\infty$ pour tout n. Posons $g = g_1 + g_2$ avec $g_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^-)$ et $g_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$. On a $||g * e_n||_\infty \leqslant ||g_1 * e_n||_\infty$ pour tout n donc $||g||_\infty \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} ||g_1 * e_n||_\infty = ||g_1||_\infty$ donc $||g||_\infty = ||g_1||_\infty$ et d'apres [15, p. 187], i est un isomorphisme isométrique.

Preuve du théorème 3.7. Soit $F = \left[\operatorname{Span} \bigcup\limits_{f\in I_0} \pi(f)E\right]^-$, soit $J = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \mathcal{F}f = 0 \text{ sur } (\mathrm{iSp}A) \cap \mathbb{R}\}$ et soit

$$L = \{l \in E^* : \langle \pi(f) \cdot x, l\rangle = 0, \quad (x \in E, f \in I_0)\}.$$

Soit $\varphi : L^1(\mathbb{R}^+) \to \mathcal{L}(L)$, l'application définie par $\varphi(f)(l) = l \circ \pi(f)$. Alors φ est linéaire et $\mathrm{Ker}\varphi \supset I_0$. D'après le lemme précédent, on peut prolonger φ en un homomorphisme continu $\tilde{\varphi} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(L)$ en posant pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\tilde{\varphi}(f) = \varphi(g)$ où $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ est tel que $f - g \in J$. Comme $Z(\pi) \cap \mathrm{i}\mathbb{R}$ est dénombrable et comme

$[(I-(\lambda+1)\pi(u))E]^{-} = E$ pour tout $\lambda \in Z(\pi)\cap \mathrm{i}\mathbb{R}$, on déduit du théorème de Mittag-Leffler [9] que

$$\left[\bigcap_{\lambda\in Z(\pi)\cap \mathrm{i}\mathbb{R}} (I-(\lambda+1)\pi(u))E\right]^{-} = E.$$

Puisque $(I-(\lambda+1)\pi(u))E = E$ pour $\lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R}\backslash Z(\pi)$, on a donc

$$\left[\bigcap_{\lambda\in \mathrm{i}\mathbb{R}} (I-(\lambda+1)\pi(u))E\right]^{-} = E.$$

En vertu de la propriété P_4, il vient que l'ensemble $K = \bigcap\limits_{\lambda\in\mathrm{i}\mathbb{R}} (B-\lambda I)(\mathcal{D}(B))$ est dense dans E. Pour $x \in K$, $l \in L$, soit $[x\otimes l]$ l'élément de $L^\infty(\mathbb{R})$ défini par $\langle f,[x\otimes l]\rangle = \langle x\cdot\tilde{\varphi}(f)\cdot l\rangle$ pour $f\in L^1(\mathbb{R})$. On a alors pour $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$

$$\langle f,[x\otimes l]\rangle = \langle x,\tilde{\varphi}(f)l\rangle = \langle \pi(f)\cdot x, l\rangle =$$

$$= \int_0^\infty f(\xi)\langle a^\xi x, l\rangle \mathrm{d}\xi.$$

Donc $[x\otimes l](-\xi) = \langle a^\xi x, l\rangle$ pour presque tout $\xi \geqslant 0$.

Si $f,h \in L^1(\mathbb{R}^+)$ alors

$$\langle f,[x\otimes l]*h\rangle = \langle f*h,[x\otimes l]\rangle = \langle \pi(f*h)\cdot x, l\rangle =$$

$$= \langle f, [(\pi(h)\cdot x)\otimes l]\rangle.$$

En posant $z = \pi(h)\cdot x$ on obtient $([x\otimes l]*h)(-\xi) = \langle a^\xi z, l\rangle$ pour presque tout $\xi \geqslant 0$. Comme $[x\otimes l]\in J^\perp$, on a $[x\otimes l]*h$ uniformement continue et $[x\otimes l]*h$ est presque périodique d'après [16, ex. 7, p. 169]. Soit $g = [x\otimes l]*h$. Nous allons montrer que g est sans fréquences.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Il existe $y\in\mathcal{D}(B)$ tel que $z = By + \mathrm{i}\lambda y$. On a

$$\int_0^T e^{-\mathrm{i}\lambda\xi} g(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_0^T \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\langle a^\xi z, l\rangle \mathrm{d}\xi =$$

$$= \int_0^T \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\langle a^\xi By, l\rangle\mathrm{d}\xi + \mathrm{i}\lambda\int_0^T \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\langle a^\xi y, l\rangle\mathrm{d}\xi.$$

Utilisant la propriété P_2, on obtient par intégration par parties

$$\int_0^T e^{-i\lambda\xi} g(\xi) d\xi = [-\langle e^{-i\lambda\xi} a^\xi y, l\rangle]_0^T =$$

$$= \langle y, l\rangle - e^{-i\lambda T} \langle a^T y, l\rangle.$$

On voit donc que $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\lambda\xi} g(\xi) d\xi = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Donc g est une fonction presque périodique sans fréquences, donc $g = 0$ et $[x \otimes l] * h = 0$ pour tout $h \in L^1(\mathbb{R}^+)$.

On a $\langle f * h, [x \otimes l]\rangle = 0$ pour $f, h \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Comme $L^1(\mathbb{R}^+)$ a une unité approchée bornée, on a $f \in [f * L^1(\mathbb{R}^+)]^-$, donc $\langle f, [x \otimes l]\rangle = 0$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et $\langle a^\xi \cdot x, l\rangle = 0$ presque partout. Par continuité, on a $\langle a^\xi \cdot x, l\rangle = 0$ partout et en particulier $\langle x, l\rangle = 0$ pour tout $x \in K$ et tout $l \in L$. Comme K est dense dans E, on a $L = \{0\}$ et $F = E$, ce qui achève la preuve du théorème.

4. APPLICATION À L'ÉTUDE DES IDÉAUX FERMÉS DE $L^1(\mathbb{R}^+)$

On considère ici un idéal fermé I de $L^1(\mathbb{R}^+)$. Soit

$$J = \{\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+) : \mu * L^1(\mathbb{R}^+) \subset I\}.$$

J est évidement un idéal fermé de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ et on a $J \cap L^1(\mathbb{R}^+) = I$ car $f \in [f * L^1(\mathbb{R}^+)]^-$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Notons

$$\pi : \mathcal{M}(\mathbb{R}^+) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)/J$$

et par

$$\pi_I : L^1(\mathbb{R}^+) \to L^1(\mathbb{R}^+)/I$$

les application canoniques.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$. On a $\|\pi(f)\| \leqslant \|\pi_I(f)\|$. Soit (μ_n) une suite de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ telle que $f - \mu_n \in J$ pour tout n et $\|\mu_n\|_1 \to \|\pi(f)\|$ $(n \to \infty)$. Soit (e_n) une unité approchée de $L^1(\mathbb{R}^+)$, bornée par 1. On a $f * e_n - \mu_n * e_n \in I$, donc $\|\pi_I(f * e_n)\| \leqslant$ $\leqslant \|\mu_n * e_n\|_1 \leqslant \|\mu_n\|_1$ pour tout n. D'où $\|\pi_I(f)\| = \lim_{n\to\infty} \|\pi_I(f * e_n)\| \leqslant \|f\|$. On a donc $\|\pi(f)\| = \|\pi_I(f)\|$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et l'injection naturelle de $L^1(\mathbb{R}^+)/I$ dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)/J$ est isométrique. On peut donc identifier $L^1(\mathbb{R}^+)/I$ à un idéal fermé de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)/J$, et on écrira π au lieu de π_I.

Posons $Z(I) = \{z \in \overline{P^+} : \mathcal{L}f(z) = 0 \text{ pour tout } f \in I\}$. L'application $z \to \mathcal{X}_z$, où $\mathcal{X}_z(\pi(f)) = \mathcal{L}(f)(z)$ $(f \in L^1(\mathbb{R}^+))$ définit un homéomorphisme de $Z(I)$ sur l'ensemble des caractères de $L^1(\mathbb{R}^+)/I$. Comme $L^1(\mathbb{R}^+)/I$ est un idéal fermé de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)/J$, tout caractère non nul de $L^1(\mathbb{R}^+)/I$ s'étend en un caractère de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)/J$ et on obtient,

$$\mathrm{Sp}(\pi(u)\backslash\{0\} = \{\mathcal{L}(u)(z)\}_{z\in Z(I)} = \left\{\frac{1}{z+1}\right\}_{z\in Z(I)}.$$

Avec les notations du paragraphe II, on en déduit que $Z(I) = Z_1(\pi)$. Il résulte de résultats standards de la théorie des fonctions holomorphes bornées dans P^+ que $Z(I) \cap i\mathbb{R}$ est de mesure nulle si $I \neq \{0\}$. Par conséquent pour $I \neq \{0\}$ on a $Z(I) = Z(\pi) = Z_1(\pi)$ et on peut appliquer les résultats de la section II avec $A = L^1(\mathbb{R}^+)/I$, $B = \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)/J$, $Z(\pi) = Z(I)$. On déduit du corollaire 2.11 le théorème suivant:

THÉORÈME 4.1. *Soit I un idéal fermé de $L^1(\mathbb{R}^+)$ et soit $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ tel que f soit de synthèse spectrale pour $-iZ(I)$. On a les propriétés suivantes:*

1) *L'application $\mu \to \pi(f * \mu)$ est une application compacte de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)/J$.*

2) *L'application $\alpha \to \pi(f)\alpha$ est une application compacte de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)/J$ dans lui-même.*

3) *L'idéal $I(f) = \{\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+) : \mu * f \in I\}$ est un idéal faiblement fermé de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$.*

Preuve. 1) Soit (μ_n) une suite bornée d'éléments de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$.

Comme $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+) = (\mathcal{C}_0([0, +\infty[))^*$ et comme $\mathcal{C}_0([0, +\infty[)$ est séparable, on peut extraire de la suite (μ_n) une sous suite (μ_{n_i}) w*-convergente. Il résulte alors du théorème 2.7 que la suite $\pi(f * \mu_{n_i})$ converge en norme.

2) Si (α_n) est une suite bornée d'éléments de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)/J$, il existe une suite bornée d'éléments de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ telle que $\pi(\mu_n) = \alpha_n$, $(n \geqslant 1)$. Il résulte alors de 1) qu'il existe une sous suite (α_{n_i}) de la suite (α_n) telle que la suite $(\pi(f)\alpha_{n_i})$ soit convergente.

3) Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ tel qu'il existe une suite (μ_n) d'éléments de $I(f)$ vérifiant $\mu_n \xrightarrow{w^*} 0$ $(n \to \infty)$. Il résulte du théorème 2.7 que $\|\pi(f*\mu) - \pi(f*\mu_n)\| \to 0$ $(n \to \infty)$, donc $\pi(f * \mu) = 0$ et $\mu \in I(f)$. Ceci prouve que $I(f)$ est w*-séquentiellement fermé, et par conséquent w*-fermé d'après le théorème de Krein-Smulian [21].

Nous abordons maintenant ce qui etait la motivation initiale de cet article, à savoir obtenir une preuve "naturelle" du théorème de Nyman. L'algèbre $\mathcal{A}_0(\overline{P^+})$ introduite au début du paragraphe II est isomorphe à $\mathcal{M}_1 = \{f \in \mathcal{A}(D) : f(1) = 0\}$ où $\mathcal{A}(D)$ est l'algèbre de Banach des fonctions continues sur le disque unité fermé et holomorphes sur le disque unité ouvert.

La théorie de Beurling-Rudin [14] décrit complètment les idéaux fermés de $\mathcal{A}(D)$, et on en déduit par example que si $H \neq \{0\}$ est un idéal de $\mathcal{A}_0(\overline{P^+})$ tel que $Z(H) = \emptyset$ alors $H = e^{-\alpha z}\mathcal{A}_0(\overline{P^+})$ pour un certain $\alpha > 0$. Il est facile de voir que $\mathcal{L}^{-1}(H) = M_\alpha$ où $M_\alpha = \{f \in L^1(\mathbb{R}^+) : f(t) = 0 \text{ p.p. sur } [0,\infty]\}$. Le théorème de Nyman [17] peut s'interpréter de la façon suivante : Tout idéal I de $L^1(\mathbb{R}^+)$ tel que $Z(I) = \emptyset$ est de la forme M_α pour un certain $\alpha > 0$.

On peut donc déduire le théorème de Nyman du théorème de Beurling-Rudin si on sait montrer que tout idéal I de $L^1(\mathbb{R}^+)$ tel que $Z(I) = \emptyset$ est de la forme $\mathcal{L}^{-1}(H)$ où H est un idéal fermé de $\mathcal{A}_0(\overline{P^+})$.

Nous allons obtenir ce résultat en utilisant le lemme suivant, qui est une variante de [23, Lemma 5.9] utilisé par Taylor et Williams dans leur étude des idéaux de $\mathcal{A}^\infty(D)$.

LEMME 4.2. *Soit F une fonction analytique pour* $\mathrm{Im}z > 0$, *continue pour* $\mathrm{Im}z \geqslant 0$. *On suppose qu'il existe des constantes positives k_1, k_2, k_3 et α telles que:*

(1) $|F(z)| \leqslant \dfrac{k_1}{|\mathrm{Re}z|}$ *pour* $\mathrm{Re}z < 0, \mathrm{Im}z \geqslant 0, |z| \geqslant \alpha$

(2) $|F(z)| \leqslant k_2 e^{k_3|z|^2}$ *pour* $\mathrm{Im}z \geqslant 0$, $|z| \geqslant \alpha$.

Alors il existe une constante positive M telle que

(3) $|F(z)| \leqslant M(1+|z|)$ *pour* $\mathrm{Im}z \geqslant 0$, $\mathrm{Re}z \leqslant 0$.

Preuve. On peut supposer $k_2 = 1$. Il suffit d'etablir (3) dans le domaine $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}z \geqslant 0, \mathrm{Re}z < 0, |z| \leqslant \dfrac{1}{|\mathrm{Re}z|}\}$. La courbe $|z| = \dfrac{1}{|\mathrm{Re}z|}$ est asymptotique à l'axe imaginaire quand $\mathrm{Re}z$ tend vers zéro par valeurs négatives. On pout donc trouver $\beta \geqslant \alpha$ tel que

$$\Omega_1 = \{z \in \Delta : |z| \geqslant \beta\} \subset \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} < \mathrm{Arg}z \leqslant \frac{5\pi}{8}\right\}$$

et il suffit d'établir (3) dans Ω_1.

Soit $\Omega = \Omega_1 \cup \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}z \geqslant 0, |z| \geqslant \beta, \dfrac{3\pi}{8} \leqslant \mathrm{Arg}z \leqslant \dfrac{\pi}{2}\}$.

Posons $\lambda = k\sqrt{2}$ avec $k = \max(k_1, k_3)$, et $H(z) = e^{i\lambda z^2}$. En posant $z = |z|e^{i\theta}$ on obtient

$$|H(z)| = e^{-\lambda|z|^2 \sin 2\theta}. \tag{4}$$

Pour $\varepsilon > 0$, posons $L_\varepsilon(z) = e^{-i\varepsilon z^3}$. On a $|L_\varepsilon(z)| = e^{\varepsilon|z|^3 \sin 3\theta}$ et donc

$$|L_\varepsilon(z)| \leqslant e^{-\varepsilon|z|^3 \sin\frac{\pi}{8}} \tag{5}$$

pour $z \in \Omega$.

Posons $U_\varepsilon(z) = \frac{1}{z}F(z)H(z)L_\varepsilon(z)$ $(z \in \Omega)$.

On déduit de (2), (4) et (5) que $|U_\varepsilon(z)| \to 0$ $(|z| \to \infty)$ dans Ω. Il résulte alors du principe du maximum que l'on a

$$(6) \qquad |U_\varepsilon(z)| \leqslant \sup_{\xi \in Fr(\Omega)} |U_\varepsilon(\xi)|$$

pour tout $z \in \Omega$.

On a $|U_\varepsilon(z)| \leqslant \frac{1}{|z|}|H(z)|\,|F(z)|$ pour tout $z \in \Omega$ et il existe $m_1 > 0$ tel que $|H(z)F(z)| \leqslant m_1$ pour $z \in \Omega$, $|z| = \beta$.

Soit $z \in \Omega$ tel que $\mathrm{Arg} z = \frac{3\pi}{8}$. On a alors $|H(z)F(z)| \leqslant e^{-\lambda|z|^2 \sin\frac{3\pi}{4} + k|z|^2} = 1$.

Soit maintenant $z \in \Omega$ tel que $\mathrm{Re} z < 0$, $|z| = \frac{1}{|\mathrm{Re} z|}$. On a d'après (1) et (4)

$$\frac{1}{|z|}|H(z)F(z)| \leqslant k|H(z)| = ke^{-\lambda\frac{|z|}{|\mathrm{Re} z|}\sin 2\theta} \leqslant ke^{2\lambda|\sin\theta|} \leqslant ke^{2\lambda}.$$

On voit donc qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $\frac{1}{|\xi|}|H(\xi)F(\xi)| \leqslant K$ pour tout $\xi \in \mathrm{Fr}(\Omega)$, donc $|U_\varepsilon(z)| \leqslant K$ pour tout $z \in \Omega$. Comme $|L_\varepsilon(z)| \to 1$ $(\varepsilon \to 0)$ pour tout $z \in \Omega$, il vient

$$(7) \qquad |H(z)F(z)| \leqslant K|z| \text{ pour } z \in \Omega.$$

En particulier, si $z \in \Omega$, $\mathrm{Re} z < 0$ on a $\frac{1}{|H(z)|} \leqslant 1$ donc $|F(z)| \leqslant K|z| \leqslant$ $\leqslant K(|z| + 1)$, et le lemme en résulte.

Le lemme suivant est implicitement contenu dans le travail original de Nyman et peut se déduire de calculs analogues faits dans [5].

LEMME 4.3. *Soit $I \neq \{0\}$, un idéal fermé de $L^1(\mathbb{R}^+)$, soit $g \in I^\perp$ et soit $S \subset Z(I)$, l'ensemble des éléments z de $\mathbb{C}$ tels que $\mathcal{L}(g)$ n'a pas d'extension analytique en z.*

(1) Si $S = \emptyset$, il existe $k > 0$ et $\lambda > 0$ tels que

$$|\mathcal{L}(g)(z)| \leqslant \lambda e^{k|z|^2} \quad (z \in \mathbb{C});$$

(2) Si $S \neq \emptyset$, il existe $k > 0$ tel que

$$|\mathcal{L}(g)(z)| \leqslant e^{[k(1+|z|^4)\frac{1}{[\rho(z)]^2}]} \; (z \in \mathbb{C}\backslash S)$$

ou $\rho(z)$ est la distance de z à S.

Preuve. Soit f un élément non nul de I. On a pour $h \in L^1(\mathbb{R}^+)$, $\langle h, g \circ f \rangle =$ $= \langle h * f, g \rangle = 0$. Donc $g \circ f = 0$. Il résulte alors du théorème 2.5 qu'on a

$$\mathcal{L}(g)(z)\mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(g \square f)(z)$$

pour $\mathrm{Re}z > 0$, $z \notin Z(I)$. Posons

$$F(u) = \mathcal{L}(f)\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$

pour $|u| < 1$. Comme $\mathrm{Re}\left(\frac{1+u}{1-u}\right) > 0$ pour $|u| < 1$, F est analytique et bornée sur le disque unité ouvert D, donc appartient à la classe de Nevanlinna. On a donc

$$\sup_{0 \leqslant r \leqslant 1} \int_0^{2\pi} \left|\log |F(re^{i\theta})|\right| d\theta < +\infty$$

et en particulier $\displaystyle\iint_D \log^+ |\frac{1}{F(x+iy)}| dxdy < +\infty$.

D'autre part $\mathcal{L}(f)(z) = F\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ pour $\mathrm{Re}z > 0$, d'où l'on déduit aisément par changement de variables (voir [19] ou [5])

$$\iint_{P+} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2} \log^+ \left|\frac{1}{\mathcal{L}(f)(x+iy)}\right| dxdy < +\infty.$$

D'autre part on a $|\mathcal{L}(g \square f)(z)| \leqslant \frac{\|g\|_\infty \|f\|_1}{\mathrm{Re}z}$ pour $z \in P^+$ et $|\mathcal{L}(g)(z)| \leqslant \frac{\|g\|_\infty}{\mathrm{Re}z}$ pour $z \in P^-$. On en déduit par un calcul immédiat que

$$\iint_{P^-} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^{3/2}} \log^+ |\mathcal{L}(g)(x+iy)| dxdy < +\infty$$

et

$$\iint_{P+} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^{3/2}} \log^+ |\mathcal{L}(g \square f)(x+iy)| dxdy < +\infty$$

d'où finalement

$$M = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2} \log^+ |\mathcal{L}(g)(x+iy)| dxdy < +\infty.$$

La fonction $z \to \log^+ |\mathcal{L}(g)(z)|$ est sous harmonique sur $\mathbb{C}\backslash S$. Donc

$$\log^+ |\mathcal{L}(g)(z)| \leqslant \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B(z,r)} \log^+ |\mathcal{L}(g)(x+iy)| dxdy$$

pour $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $B(z,r)$ boule ouverte de centre z de rayon r tels que $B(z,r) \subset \mathbb{C}\backslash S$. On a $\displaystyle\iint_{B(z,r)} \log^+ |\mathcal{L}(g)(x+iy)| dxdy \leqslant M(1+(|z|+r)^4)$, d'où $\log^+ |\mathcal{L}(g)(z)| \leqslant$ $\leqslant \frac{M}{\pi r^2}[1+(|z|+r)^4]$.

($*$) Si $S = \emptyset$, on obtient le résultat en posant $r = 1 + |z|$ et en remarquant qu'il suffit d'établir l'inégalité pour $|z| \geqslant 1$.

($*$) Si $S \neq \emptyset$, on a $\limsup\limits_{|z|\to\infty} \dfrac{\rho(z)}{|z|} \leqslant 1$ donc $\rho(z) \leqslant 2|z|$ pour $|z|$ assez grand. Comme $\rho(z)$ est borné quand $|z|$ reste borné, on obtient l'inégalité cherchée en posant $r = \dfrac{\rho(z)}{2}$.

Corollaire 4.4. *Soit I un idéal fermé de $L^1(\mathbb{R}^+)$ tel que $Z(I) \subset \{0\}$. Pour $g \in I^\perp$, il existe $k > 0$ tel que l'on ait $|\mathcal{L}(g)(z)| \leqslant k\left(|z| + \dfrac{1}{|z|^3}\right)$ pour* $\mathrm{Re} z \leqslant 0$, $z \neq 0$.

Preuve. Il résulte du lemme 4.3 que $|\mathcal{L}(g)(z)| \leqslant \mathrm{e}^{k_1(\frac{1}{|z|^2}+|z|^2}$ pour $z \neq 0$. Posons $F(z) = \mathcal{L}(g)(z+\mathrm{i})$. On a $|F(z)| \leqslant \dfrac{\|g\|_\infty}{|\mathrm{Re} z|}$ pour $\mathrm{Re} z < 0$, $\mathrm{Im} z \geqslant 0$ et $|F(z)| \leqslant \mathrm{e}^{k_1}\mathrm{e}^{k_1|z|^2}$ pour $\mathrm{Im} z \geqslant 0$. Il résulte alors du lemme 4.2 qu'il existe $M_1 > 0$ tel que $|\mathcal{L}(g)(z)| \leqslant M_1(2 + |z|)$ pour $\mathrm{Re} z \leqslant 0$, $\mathrm{Im} z \geqslant 1$.

On voit de la même façon qu'il existe en fait $M_2 > 0$ tel que $|\mathcal{L}(g)(z)| \leqslant M_2(2+ +|z|) \leqslant 3M_2|z|$ pour $\mathrm{Re} z \leqslant 0$, $|\mathrm{Im} z| \geqslant 1$. Posons maintenant $G(z) = \mathcal{L}(z)\left(\dfrac{4}{z+2i}\right)$ pour $\mathrm{Im} z \geqslant 0$. $\dfrac{G(z)}{(z+2\mathrm{i})^2}$ satisfait les conditions du lemme 4.2 donc il existe $M_3 > 0$ tel que $|G(z)| \leqslant M_3(1 + |z|)^3$ pour $\mathrm{Re} z \leqslant 0$, $\mathrm{Im} z \geqslant 0$.

Soit $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| < 1\}$ et $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| < 1\}$. Si $z \in D_1$, $\mathrm{Re} z \leqslant 0$ alors $\mathrm{Im}(\frac{4}{z} - 2\mathrm{i}) \geqslant 0$ et il existe $M_4 > 0$ tel que $|\mathcal{L}(g)(z)| = |G(\frac{4}{z} - 2\mathrm{i})| \leqslant \dfrac{M_4}{|z|^3}$. On voit de la même façon qu'en fait il existe $M_5 > 0$ tel que $|\mathcal{L}(g)(z)| \leqslant \dfrac{M_5}{|z|^3}$ pour $z \in \overline{D_1} \cup \overline{D_2}$, $z \neq 0$, $\mathrm{Re} z \leqslant 0$.

Si $\mathrm{Re} z \in [-1, 0]$, $|\mathrm{Im} z| \leqslant 1$, $z \notin D_1 \cup D_2$ on a $\mathrm{Arg} z \in \left[\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right]$ donc $|\mathcal{L}(g)(z) \leqslant \leqslant \dfrac{\sqrt{2}\|g\|_\infty}{|z|}$.

Le corollaire résulte alors immédiatement de ces diverses estimations.

On se servira par la suite du lemme suivant, où u désigne comme plus haut la fonction $x \to \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0, \infty[$.

Lemme 4.5. *Soit $I(0) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^+) : \mathcal{L}(f)(0) = 0\}$. On a les propriétés suivantes:*

(1) *$u * L^1(\mathbb{R}^+)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^+)$;*

(2) *$(u - u^{*2}) * L^1(\mathbb{R}^+)$ est dense dans $I(0)$;*

(3) *La suite $(f_n(x)) = \left((\delta_0 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x/n}) * (n\mathrm{e}^{-nx})\right)$ est une unité approchée bornée de $I(0)$.*

Preuve. La propriété (1) est bien connue et résulte immédiatement du fait que

$$\frac{1}{n!}\mathcal{L}(g)^{(n)}(-1) = \langle u^{*(n+1)}, g\rangle \quad (n \geqslant 0, g \in L^\infty(\mathbb{R}^-)).$$

Comme $L^1(\mathbb{R}^+)$ a une unité approchée bornée, on a $(u-u^{*2})*u^n \in [(u-u^{*2})*L^1(\mathbb{R}^+)]^-$ donc si $g \perp ((u-u^{*2}) * L^1(\mathbb{R}^+))$ on a $\langle u, g\rangle = \langle u^{*n}, g\rangle$ $(n \geqslant 1)$. On en déduit en développant $\mathcal{L}(g)$ en -1 que $z \to z\mathcal{L}(g)(z)$ est constante, donc g est constante et appartient à $[I(0)]^\perp$, ce qui prouve (2). Il est clair que $\|f_n\|_1 \leqslant 2$. La vérification de (3) est laissée au lecteur.

On a alors le théorème suivant, dont on peut déduire à la fois le théorème de Nyman et le théorème de Gurarii [11] sur les idéaux primaires de $L^1(\mathbb{R}^+)$.

THÉORÈME 4.6. *Soit I un idéal fermé de $L^1(\mathbb{R}^+)$. Si $Z(I) = \emptyset$ ou si $Z(I) = \{\mathrm{i}\alpha\}$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $I = \mathcal{L}^{-1}([\mathcal{L}(I)]^-)$.*

Preuve. L'application θ définie par $\theta(f)(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha t}f(t)$ $(t \geqslant 0, f \in L^1(\mathbb{R}^+))$ est un automorphisme de $L^1(\mathbb{R}^+)$ et il est clair que $Z(\theta(I)) \subset \{0\}$. Il suffit donc de se limiter au cas $\alpha = 0$.

Soit $g \in I^\perp$. $\mathcal{L}(g)$ est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ et il résulte du corollaire 4.4 qu'il existe $k > 0$ tel que $|\mathcal{L}(g)(z)| \leqslant k(|z| + \frac{1}{|z|^3})$ pour $\mathrm{Re} z \leqslant 0$, $z \neq 0$. Soit $v = (u-u^{*2})^3$. Pour $n \geqslant 1$, $t \leqslant 0$ soit $g_n(t) = g(t)\mathrm{e}^{t/n}$.

On a $g_n \in L^1(\mathbb{R}^-) \cap L^\infty(\mathbb{R}^-)$ et pour $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$,

$$\langle f * v, g\rangle = \int_0^\infty (f*v)(t)g(-t)\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty (f*v)(t)g(-t)\mathrm{e}^{-t/n}\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\langle f*v, g_n\rangle.$$

Posons $h_n(t) = \bar{g}_n(-t)$. On a

$$\overline{\mathcal{F}(h_n)}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(-t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ty}dy = \int_{-\infty}^{0} g_n(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ty}dy = \mathcal{L}(g_n)(\mathrm{i}y).$$

Or, $h_n \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+)$ et $f * v \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+)$, on obtient d'après l'égalité de Parseval

$$\langle f*v, g_n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f*v)(y)\overline{\mathcal{F}(h_n)}(y)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(f)(\mathrm{i}y)\mathcal{L}(v)(\mathrm{i}y)\mathcal{L}(g_n)(\mathrm{i}y)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(f)(\mathrm{i}y)\mathcal{L}(v)(\mathrm{i}y)\mathcal{L}(g)(\mathrm{i}y - \frac{1}{n})\mathrm{d}y.$$

La fonction $\mathcal{L}(f)$ est bornée sur $\mathrm{i}\mathbb{R}$ et on a

$$\mathcal{L}(v)(\mathrm{i}y) = \frac{-\mathrm{i}y^3}{(1+\mathrm{i}y)^6}.$$

On obtient pour $n \geqslant 1$, $|\mathcal{L}(v)(\mathrm{i}y)\mathcal{L}(g_n)(\mathrm{i}y)| \leqslant \dfrac{k(1+(1+y^2)^2)}{(1+y^2)^3}$. Comme $\mathcal{L}(g)$ est continue sur $P^-\backslash\{0\}$, il résulte du théorème de convergence dominée que l'on a

$$|\langle f * v, g\rangle| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(f)(\mathrm{i}y)\mathcal{L}(v)(\mathrm{i}y)\mathcal{L}(g)(\mathrm{i}y)\mathrm{d}y\right| \leqslant c\|\mathcal{L}(f)\|_\infty$$

où $c = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{L}(v)(\mathrm{i}y)|\ |\mathcal{L}(g)(\mathrm{i}y)|\mathrm{d}y < +\infty$. Soit maintenant $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ tel que $\mathcal{L}(f) \in [\mathcal{L}(I)]^-$. (L'adhérence étant considérée dans $\mathcal{A}_0(\overline{P^+})$ munie de la norme de la convergence uniforme). Il vient

$$\lim_{n\to\infty} \langle (f - f_n) * v, g\rangle = 0,$$

d'où $\langle f * v, g\rangle = 0$ car $f_n * v \in I$ pour tout n et $g \in I^\perp$. On a donc $\langle f * v, g\rangle = 0$ pour tout $g \in I^\perp$, donc $f * v = 0$.

Si $Z(I) = \emptyset$ alors $1 \notin \mathrm{Sp}(\pi(u))$ donc $\pi((\delta_0 - u)^3)$ est inversible dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)/J$. Donc $f * u^3 \in I$ et

$$f \in [f * L^1(\mathbb{R}^+)]^- = [f * u * L^1(\mathbb{R}^+)]^- = [f * u^3 * L^1(\mathbb{R}^+)]^- \subset I.$$

Si $Z(I) = \{0\}$ alors $f \in I(0)$. Utilisant le lemme 4.5 on a

$$f \in [f * I(0)]^- = [f * (u - u^{*2}) * L^1(\mathbb{R}^+)]^- =$$

$$= [f * (u - u^{*2})^3 * L^1(\mathbb{R}^+)]^- \subset I,$$

ce qui termine la preuve du théorème.

On voit evidemment à posteriori que puisque $I = \mathcal{L}^{-1}(\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathcal{A}_0(\overline{P^+}))$ pour un certain $\alpha > 0$ si $Z(I) = \emptyset$, $I = M_\alpha = \{f \in L^1(\mathbb{R}^+) : f = 0$ p.p. sur $[0, \alpha]\}$ et par conséquent pour $g \in I^\perp$ on a supp$g \subset [-\alpha, 0]$, ce qui prouve en particulier que $\mathcal{L}(g)$ est bornée sur $\mathrm{i}\mathbb{R}$.

L'interprétation des idéaux primaires de $L^1(\mathbb{R}^+)$ contenus dans $I(0)$ qui sont de la forme $\mathcal{L}^{-1}(e^{-\frac{\alpha}{z}}\mathcal{A}_0(\overline{P^+}))$, qui est moins évidente est donnée par Gurarii [11] à qui est due leur caractérisation.

On peut montrer plus généralement (voir [11]) que si $Z(I)$ est dénombrable alors $I = \mathcal{L}^{-1}([\mathcal{L}(I)]^-)$. Ceci est à notre connaissance le résultat le plus général connu à ce jour sur les idéaux fermés de $L^1(\mathbb{R}^+)$. Notons pour conclure que l'on peut en utilisant des techniques dues à Domar [6] remplacer $\frac{1}{[\rho(z)]^2}$ par $\frac{1}{\rho(z)}$ dans le lemme 4.3 au moins dans le cas où $Z(I) \subset i\mathbb{R}$, (voir [23]).

RÉFÉRENCES

1. ALLAN, G.R.; O'FARRELL, A.G.; RANSFORD, T.J., A tauberian theorem arising in operator theory, *Bull. London Math. Soc.*, **19**(1987), 537–545.
2. ARENDT, W.; BATTY, C.J.K., Tauberian theorems and stability of one parameter semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **306**(1988), 837–852.
3. BOHR, H., *Almost periodic functions*, Chelsea Publishing company, 1947, New York.
4. COHEN, P.J., Factorisation in group algebras, *Duke Math. J.*, **26**(1959), 199-206.
5. DALES, H.G., Convolution algebras on the real line, in *Proceedings of the Long Beach conference on radical Banach algebras and automatic continuity*, Lecture Notes, **975**(1983), 180–209, Springer Verlag, Berlin.
6. DOMAR, Y., On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function, *Ark. Mat.*, **3**(1957), 429–440.
7. DOMAR, Y., On the analytic transform of bounded linear functionals on certain Banach algebras, *Studia Math.*, **T.LIII**(1975), 203–224.
8. ESTERLE, J., Quasimultipliers, representations of H^∞, and the closed ideal problem for commutative Banach algebra, *Proceedings of the Long Beach conference on radical Banach algebras and automatic continuity*, Lecture Notes, **975**(1983), 66–162, Springer Verlag, Berlin.
9. ESTERLE, J., Mittag Leffler methods in the theory of Banach algebras and a new approach to Michael's problem, *Proceedings of the conference on Banach algebras and several complex variables*, Contemp. Math., **32**(1984), 107–129, A.M.S., Providence.
10. ESTERLE, J.; STROUSE, E.; ZOUAKIA, F., Theorems of Katznelson-Tzafriri type for contractions, *J. Func. Anal.*, **(2)94**(1990), 273–287.
11. GURARII, V.P., Harmonic analysis in spaces with weight, *Trans. Moscow Math.Soc.*, **35**(1979), 21–75.
12. HEDENMALM, H., Translates of functions of two variables, *Duke Math. J.*, (1) **58**(1989), 251–297.
13. HILLE, E.; PHILLIPS, R.S., *Functional analysis and semigroups*, Revised ed., American Math. Soc., R.I, 1965, Providence.
14. HOFFMAN, K., *Banach spaces of analytic functions*, Prentice Hall, 1962, Englewood Cliffs, New Jersey.
15. KAHANE, J.P.; KATZNELSON, Y., Sur les algèbres de restrictions des séries de Taylor absolument convergentes à un fermé du cercle, *J. Analyse Math.*, **23**(1970), 185–197.
16. KATZNELSON, Y., *An introduction to harmonic analysis*, Wiley, New York, 1968.

17. KATZNELSON, Y.; TZAFRIRI, L., On power bounded operators, *J. Funct. Anal.*, **68** (1986), 313–328.
18. LYUBICH, Y.L.; PHONG, V.Q., Asymptotic stability of linear differential equations in Banach spaces, *Studia Math.*, **T LXXXVIII**(1988), 37–42.
19. NYMAN, B., On the one dimensional translation group and semigroup in certain function spaces, Thesis, Uppsala, 1950.
20. RAJOELINA, M., Éléments de Cohen de $L^1(\mathbb{R}^+)$, *Math. Ann.*, **276**(1987), 303–310.
21. RUDIN, W., *Functional analysis*, Mc Gray Hill, New York.
22. STROUSE, E., Closed ideals in convolution algebras and the Laplace transform, *Michigan Math. J.*, **35**(1988), 185–196.
23. TAYLOR, B.A.; WILLIAMS, D.L., Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values, *Can. J. Math.*, **XXII**(1970), 1266–1283.

J. ESTERLE
UER de Mathématiques
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 Talence
France.

E. STROUSE
Mathematics and Computer Science
Macalester College
St. Paul, MN 55105,
U.S.A.

F. ZOUAKIA
Département de Mathématiques
E.N.S. Takaddoum B.P. 5118
Rabat
Morocco.

Received April 20, 1989.

Added in proof. After this paper was submitted, the authors obtained several results concerning closed ideals of A^+, the algebra of absolutely convergent Taylor series (detailed references can be found in "Closed ideals of the algebra of absolutely convergent Taylor series" by J. Esterle, E. Strouse and F. Zouakia, *Bull. A.M.S.*, to appear). By using transfer methods due to Domar and Hedenmalm, O. El Fallah deduced from these results a lot of new information about closed ideals of $L^1(\mathbb{R}^+)$ (see "Ideaux fermés de $L^1(\mathbb{R}^+)$" by O. El Fallah, *Math. Scand.*, (1) **72**(1973), 120–130).