

## LE COMPLÉTÉ DES OPÉRATEURS FERMÉS À DOMAINE DENSE POUR LA MÉTRIQUE DU GAP

YAHYA MEZROUI

*Communicated by Florian-Horia Vasilescu*

ABSTRACT. The set  $\mathcal{LR}(H)$  of closed linear relations on a separable Hilbert space  $H$  (i.e. the set of all closed linear subspaces of  $H \oplus H$  of infinite dimension and codimension) contains the set  $\mathcal{G}(H)$  of the graphs of all closed densely defined linear operators on  $H$ . Equipped with the “gap” metric  $g$ ,  $\mathcal{LR}(H)$  is a complete metric space. In this paper we establish a certain number of properties of  $\mathcal{LR}(H)$  and we characterize the closure of  $\mathcal{G}(H)$  in  $\mathcal{LR}(H)$ , providing thus a completion of the set  $\mathcal{C}(H)$  of all closed densely defined linear operators on  $H$ .

KEYWORDS: *Linear relations, closure, operator, gap metric.*

AMS SUBJECT CLASSIFICATION: Primary 47A05; Secondary 47A53.

Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable. Notons  $\mathcal{B}(H)$  l’algèbre des opérateurs linéaire bornés sur  $H$ ,  $\mathcal{C}(H)$  l’ensemble des opérateurs fermés à domaine dense sur  $H$  et  $\mathcal{LR}(H)$  l’ensemble des relations linéaire fermées sur  $H$  (c’est à dire l’ensemble des sous-espace linéaires fermés de  $H \oplus H$  de dimension et codimension infinies). On munit  $\mathcal{LR}(H)$  de la métrique  $g$  (métrique du “gap”): si  $E, F \in \mathcal{LR}(H)$  on pose  $g(E, F) = \|P_E - P_F\|$  où  $P_E, P_F$  sont les projections orthogonales dans  $H \oplus H$  sur  $E$  et  $F$  respectivement. Muni de cette métrique  $\mathcal{LR}(H)$  est un espace complet. Si  $A \in \mathcal{C}(H)$ , notons  $D(A)$  son domaine et  $G(A) = \{(u, Au) \mid u \in D(A)\}$  son graphe. Alors  $\mathcal{C}(H)$  s’injecte naturellement dans  $\mathcal{LR}(H)$  par l’application  $A \mapsto G(A)$ .

La théorie spectrale dans  $\mathcal{C}(H)$  souffre, par rapport à celle dans  $\mathcal{B}(H)$ , du fait que  $\mathcal{C}(H)$  n’est pas complet, d’où des difficultés pour parler du spectre à

l'infini. On peut remédier à ce défaut en considérant le complété dans  $\mathcal{LR}(H)$  de  $\mathcal{C}(H)$ , identifié à son image par l'injection, ce qui permettra de "banaliser" le point à l'infini (par exemple, si  $E \in \mathcal{LR}(H)$ , alors l'espace propre associé à la valeur propre  $\infty$  est  $E \cap H_2$  où  $H_2 = \{0\} \oplus H$ ). Posons:

$$\text{ind}_1(E) = \begin{cases} \dim(E \cap H_1) - \dim(E^\perp \cap H_2) & \text{si } \max\{\dim(E \cap H_1), \dim(E^\perp \cap H_2)\} < +\infty, \\ +\infty & \text{si } \dim(E \cap H_1) = \infty \text{ et } \dim(E^\perp \cap H_2) < +\infty, \\ -\infty & \text{si } \dim(E \cap H_1) < +\infty \text{ et } \dim(E^\perp \cap H_2) = +\infty, \\ 0 & \text{si } \dim(E \cap H_1) = \dim(E^\perp \cap H_2) = +\infty; \end{cases}$$

$$\text{ind}_2(E) = \begin{cases} \dim(E \cap H_2) - \dim(E^\perp \cap H_1) & \text{si } \max\{\dim(E \cap H_2), \dim(E^\perp \cap H_1)\} < +\infty, \\ +\infty & \text{si } \dim(E \cap H_2) = +\infty \text{ et } \dim(E^\perp \cap H_1) < +\infty, \\ -\infty & \text{si } \dim(E \cap H_2) < +\infty \text{ et } \dim(E^\perp \cap H_1) = +\infty, \\ 0 & \text{si } \dim(E \cap H_2) = \dim(E^\perp \cap H_1) = +\infty. \end{cases}$$

Enfin on dira que  $E$  est semi-bornée si:

$$E + H_2 \text{ est fermé et } \min\{\dim(E \cap H_2), \dim(E^\perp \cap H_1)\} < +\infty.$$

On notera  $\mathcal{SB}(H)$  l'ensemble des relations linéaire semi-bornées sur  $H$ . En outre, on dira que  $E \in \mathcal{LR}(H)$  est semi-Fredholm si:

$$E + H_1 \text{ est fermé et } \min\{\dim(E \cap H_1), \dim(E^\perp \cap H_2)\} < +\infty.$$

On notera  $\mathcal{SF}(H)$  l'ensemble des relations semi-Fredholm sur  $H$ . Les principaux résultats de ce travail sont énoncés dans les théorèmes suivants:

**THÉORÈME 33.**  $\mathcal{SF}(H)$  est un ouvert de  $\mathcal{LR}(H)$  et l'application  $E \in \mathcal{SF}(H) \mapsto \text{ind}_1(E)$  est localement constante.

**COROLLAIRE 35.**  $\mathcal{SB}(H)$  est un ouvert de  $\mathcal{LR}(H)$  et l'application  $E \in \mathcal{SB}(H) \mapsto \text{ind}_2(E)$  est localement constante.

Ces deux résultats généralisent des résultats bien connus sur les indices d'opérateurs.

THÉORÈME 36. *Le complété de  $\mathcal{C}(H)$  dans  $\mathcal{LR}(H)$  (qui est aussi le complété de  $\mathcal{B}(H)$ ) est le complémentaire dans  $\mathcal{LR}(H)$  des relations linéaire semi-bornées  $E$  telles que  $\text{ind}_2(E) \neq 0$ .*

THÉORÈME 50 et 38.  *$\mathcal{SB}(H)$  est dense (et ouvert) dans  $\mathcal{LR}(H)$  et  $\mathcal{B}(H)$  est un ouvert dans  $\mathcal{LR}(H)$ , dans lequel  $\text{ind}_2(E) = 0$ .*

DÉFINITION 1. Soit  $E \in \mathcal{LR}(H)$  on pose:

$D(E) = \{x \in H \mid \exists y \in H \text{ et } (x, y) \in E\}$  appelé *domaine de  $E$* .

$R(E) = \{y \in H \mid \exists x \in H \text{ et } (x, y) \in E\}$  appelé *image de  $E$* .

$N(E) = \{x \in H \mid (x, 0) \in E\}$  appelé *noyau de  $E$* .

On dira que  $E$  est *quasi-bornée* si  $D(E)$  est un sous-espace fermé de  $H$ .

$E$  est dite *semi-bornée* si  $E$  est quasi-bornée et  $\min\{\dim(E^\perp \cap H_1), \dim(E \cap H_2)\} < +\infty$  avec  $H_1 = H \oplus \{0\}$  et  $H_2 = \{0\} \oplus H$ . On notera  $P_1$  et  $P_2$  respectivement les projections orthogonales sur  $H_1$  et  $H_2$ .

REMARQUE 2. Soit  $E$  un élément de  $\mathcal{LR}(H)$ . Alors  $E$  est le graphe d'un opérateur fermé  $A$  de  $H$  dans  $H$  à domaine dense si et seulement si:

$$E^\perp \cap H_1 = \{0\} \text{ et } E \cap H_2 = \{0\};$$

$E$  est le graphe d'un opérateur borné défini sur tout  $H$  si et seulement si:

$$g(E, H_1) < 1$$

ce qui est équivalent à:

$$E \cap H_2 = E^\perp \cap H_1 = \{0\} \text{ et } D(E) \text{ est fermé.}$$

LEMME 3. *Soit  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathcal{B}(H)$  avec  $R(A)$  fermé. Alors  $R(AB)$  est fermé si et seulement si  $R(B) + N(A)$  est fermé.*

*Preuve.*  $\Leftarrow$  soit  $\{u_n\} \subseteq H$  une suite telle que  $ABu_n$  converge vers  $w \in H$ . Alors  $v_n = (1 - P_{N(A)})Bu_n$  converge vers  $v \in H$  car  $R(A)$  fermé;  $v_n \in R(B) + N(A)$  et donc  $v \in R(B) + N(A)$ . D'où  $w = Av \in R(AB)$ .

$\Rightarrow$  Soit  $\{v_n\} \subseteq R(B) + N(A)$  une suite qui converge vers  $v \in H$ . Alors  $w_n = Av_n$  converge vers  $Av = w \in R(AB)$  et donc il existe  $u \in H$  telle que  $Av = ABu$  d'où  $v - Bu \in N(A)$ . Donc  $v \in R(B) + N(A)$ . ■

COROLLAIRE 4. Soit  $E \in \mathcal{LR}(H)$ . On note  $P_E$  la projection orthogonale de  $H \oplus H$  sur  $E$ . Alors:

$D(E)$  est fermé si et seulement si  $E + H_2$  est fermé;

$R(E)$  est fermé si et seulement si  $E + H_1$  est fermé.

*Preuve.*  $R(P_1)$ ,  $R(P_2)$  sont fermés. Donc d'après le lemme 3 on voit que  $D(E)$  est fermé si et seulement si  $R(P_1 P_E)$  est fermé, ce qui est équivalent à  $R(P_E) + N(P_1) = E + H_2$  est fermé;  $R(E)$  est fermé si et seulement si  $R(P_2 P_E)$  est fermé, ce qui est équivalent à  $R(P_E) + N(P_2) = E + H_1$  est fermé. ■

DÉFINITION 5. Si  $E, F \in \mathcal{LR}(H)$ , on pose:

$$\delta(E, F) = \|(I - P_F)P_E\|$$

$$\varepsilon(E, F) = \|(P_E - P_F)|_{(X \cap Y)}\|$$

avec  $X = (E \cap F^\perp)^\perp$  et  $Y = (F \cap E^\perp)^\perp$ .

PROPOSITION 6. La définition de  $\varepsilon$  est équivalente à celle de l'écartement de deux sous-espaces fermés donnée dans la définition 1.2.1 de [8].

*Preuve.* On note  $\langle \cdot; \cdot \rangle$  le produit scalaire dans  $H$ . Il faut montrer que pour  $M$  et  $N$  deux sous-espaces fermés de  $H$ , on a:

$$\delta(\widetilde{M}, N) = \varepsilon(M, N)$$

où  $\widetilde{M} = M \cap (M \cap N^\perp)^\perp$ . Or,  $\delta(\widetilde{M}, N) = \delta(\widetilde{M}, \widetilde{N})$ , en effet  $N = (N \cap M^\perp) + \widetilde{N}$  ce qui entraîne que  $1 - P_N = 1 - P_{N \cap M^\perp} - P_{\widetilde{N}}$ . D'où

$$\delta(\widetilde{M}, N) = \|(P_{\widetilde{M}} - P_{\widetilde{N}} P_{\widetilde{M}} - P_{N \cap M^\perp} P_{\widetilde{M}})\| = \|(P_{\widetilde{M}} - P_{\widetilde{N}} P_{\widetilde{M}})\| = \delta(\widetilde{M}, \widetilde{N})$$

car  $P_{N \cap M^\perp} P_{\widetilde{M}} = 0$ . En outre,  $\widetilde{M} \cap \widetilde{N}^\perp = \{0\}$  car  $\widetilde{N}^\perp = N^\perp + N \cap M^\perp$  et si  $z = x + y \in \widetilde{M} \cap \widetilde{N}^\perp$ , avec  $x \in N^\perp$  et  $y \in N \cap M^\perp$ , on a  $\langle x; y \rangle = 0$  et  $\langle z; y \rangle = \|y\|^2 = 0$ , car  $z \in \widetilde{M}$  et  $y \in M^\perp$ , ce qui entraîne que  $y = 0$ ;  $x \in (N^\perp \cap M) \cap (M \cap N^\perp)^\perp = \{0\}$ . Par conséquent:  $\widetilde{M} \cap \widetilde{N}^\perp = \{0\}$ . Par symétrie entre  $M$  et  $N$ , on montre de la même façon que  $\widetilde{N} \cap \widetilde{M}^\perp = \{0\}$ . On en déduit alors (cf. le corollaire 1.2.4 de [8]) que:

$$\delta(\widetilde{M}, N) = \delta(\widetilde{M}, \widetilde{N}) = g(\widetilde{M}, \widetilde{N}).$$

Montrons maintenant que  $\varepsilon(M, N) = g(\widetilde{M}, \widetilde{N})$ .

$$\|(P_M - P_N)|_{X \cap Y}\| = \|(P_M - P_N)P_{X \cap Y}\| = \|(P_{\widetilde{M}} + P_{M \cap N^\perp} - P_{\widetilde{N}} - P_{N \cap M^\perp})P_{X \cap Y}\|$$

car  $M = \widetilde{M} + M \cap N^\perp$  et  $N = \widetilde{N} + N \cap M^\perp$  et les deux sommes sont orthogonales. Or il est facile de voir que  $\widetilde{M} \subseteq X \cap Y$  et  $\widetilde{N} \subseteq X \cap Y$ , car  $M \subseteq Y$  et  $N \subseteq X$ . On en déduit que  $\varepsilon(M, N) = \|P_{\widetilde{M}} - P_{\widetilde{N}}\|$ . ■

PROPOSITION 7. Si  $E, F \in \mathcal{LR}(H)$  et  $U \in \mathcal{B}(H)$  est un opérateur unitaire, alors:

- (1)  $\varepsilon(E^\perp, F^\perp) = \varepsilon(E, F)$
- (2)  $\varepsilon(U(E), U(F)) = \varepsilon(E, F)$ .

*Preuve.* Posons  $X = (E \cap F^\perp)^\perp$  et  $Y = (F \cap E^\perp)^\perp$ . Il suffit alors de remarquer que lorsqu'on remplace  $E$  par  $E^\perp$  et  $F$  par  $F^\perp$ ,  $X$  est remplacé par  $Y$  et  $Y$  est remplacé par  $X$ :

$$\varepsilon(E^\perp, F^\perp) = \|(1 - P_E) - (1 - P_F)|_{Y \cap X}\| = \|(P_E - P_F)|_{X \cap Y}\| = \varepsilon(E, F).$$

Pour la seconde équation, il suffit de remarquer que  $P_{U(E)} = UP_EU^*$  et que

$$(U(E) \cap U(F)^\perp)^\perp \cap (U(F) \cap U(E)^\perp)^\perp = U(X \cap Y). \quad \blacksquare$$

DÉFINITION 8. Soit  $E \in \mathcal{LR}(H)$ . Posons  $\varepsilon = \varepsilon(E, H_2)$ . On définit

$$c^2(E) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 & \text{si } \varepsilon \neq 0, \\ +\infty & \text{si non;} \end{cases}$$

$c(E)$  est appelée la conorme de  $E$ .

PROPOSITION 9. Si  $E$  est le graphe d'un opérateur  $A$  fermé à domaine dense, alors  $c(E)$  est égale à la conorme de  $A$ , définie par:

$$c(A) = \inf_{\substack{rx \in D(A) \\ x \perp N(A)}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

(cf. la définition IV.1.3 de [4] et le IV.5 de [5]).

*Preuve.*

$$c(P_2P_E) = \inf_{(x,y) \perp N(P_2P_E)} \frac{\|P_2P_E(x,y)\|}{\|(x,y)\|}.$$

Mais  $N(P_2P_E) = E^\perp + (E \cap H_1)$ , donc  $N^\perp(P_2P_E) = E \cap (E \cap H_1)^\perp$  et donc

$$c(P_2P_E) = \inf_{(x,y) \in E \cap (E \cap H_1)^\perp} \frac{\|P_2P_E(x,y)\|}{\|(x,y)\|}.$$

Posons  $c = c(P_2P_E)$ . Alors si  $E$  est le graphe d'un opérateur  $A$ , on a:

$$c^2 = \inf_{\substack{x \in D(A) \\ x \perp N(A)}} \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2 + \|Ax\|^2}.$$

D'où  $c^2 = c^2(A)/(1+c^2(A))$ , il suffit alors d'utiliser l'identité  $c^2(P_N P_M) + \varepsilon^2(M, N) = 1$ . (cf. la proposition 1.2.2 de [8]).  $\blacksquare$

PROPOSITION 10. Soit  $E \in \mathcal{LR}(H)$ ,  $S$  et  $T$  respectivement les projections orthogonales sur  $E \cap H_1$  et sur  $E^\perp \cap H_2$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $c(E) > 0$ ;
- (ii)  $E + H_1$  est fermé ( $R(E)$  est fermé);
- (iii) il existe deux projections  $Q$  et  $R$  respectivement sur  $E \cap (E \cap H_1)^\perp$  et  $(E \cap H_1)^\perp \cap H_1$ , telles que  $I = Q + R + S + T$  et

$$(3) \quad \|Q\| = \|R\| = \frac{\sqrt{1 + c^2(E)}}{c(E)}.$$

*Preuve.* Il suffit de prendre  $M = E$  et  $N = H_2$  dans la proposition 1.3.2 de [8]. ■

COROLLAIRE 11. Soit  $E \in \mathcal{LR}(H)$ . Alors,

$$(4) \quad \|t\| \geq c(E) \|[1 - P_{N(E)}]s\| \quad \forall (s, t) \in E.$$

*Preuve.* Notons  $P_2$  la projection orthogonale sur  $H_2$ ,  $X = (E \cap H_1)^\perp$  et  $Y = (E^\perp \cap H_2)^\perp$ .

$$(s, t) = ([1 - P_{N(E)}]s, t) + (P_{N(E)}s, 0)$$

et il est facile de voir que  $([1 - P_{N(E)}]s, t) \in X \cap Y$ .

$$(P_E - P_2)([1 - P_{N(E)}]s, t) \perp (P_E - P_2)(P_{N(E)}s, 0).$$

En effet:

$$(P_E - P_2)([1 - P_{N(E)}]s, t) = ([1 - P_{N(E)}]s, 0), (P_E - P_2)(P_{N(E)}s, 0) = (P_{N(E)}s, 0)$$

et  $[1 - P_{N(E)}]s \perp P_{N(E)}s$ .

Finalement on obtient:

$$\|(P_E - P_2)(s, t)\|^2 = \|(P_E - P_2)([1 - P_{N(E)}]s, t)\|^2 + \|(P_E - P_2)(P_{N(E)}s, 0)\|^2$$

d'où

$$\|s\|^2 \leq \varepsilon^2 \|[1 - P_{N(E)}]s\|^2 + \varepsilon^2 \|t\|^2 + \|P_{N(E)}s\|^2$$

ce qui entraîne que

$$\frac{1 - \varepsilon^2(E, H_2)}{\varepsilon^2(E, H_2)} \|[1 - P_{N(E)}]s\|^2 \leq \|t\|^2.$$

Or  $c^2(E) = \frac{1 - \varepsilon^2(E, H_2)}{\varepsilon^2(E, H_2)}$ . Par conséquent:

$$c^2(E) \|[1 - P_{N(E)}]s\|^2 \leq \|t\|^2. \quad \blacksquare$$

DÉFINITION 12. Soit  $E, F \in \mathcal{LR}(H)$ . Posons:

$$E \hat{+} F = \{(x, y + z) \text{ tel que } (x, y) \in E \text{ et } (x, z) \in F\}.$$

$$E \check{+} F = \{(x, y - z) \text{ tel que } (x, y) \in E \text{ et } (x, z) \in F\}.$$

$$EF = \{(x, z) \text{ tel que } \exists y \in H, (x, y) \in F \text{ et } (y, z) \in E\}.$$

Notons que si  $E = G(A)$ ,  $F = G(B)$  où  $A, B \in \mathcal{B}(H)$  alors:

$$E \hat{+} F = G(A + B), \quad E \check{+} F = G(A - B), \quad EF = G(AB).$$

PROPOSITION 13. Si  $E \in \mathcal{LR}(H)$  et  $F = G(A)$  où  $A$  est un opérateur borné, alors:

- (i)  $E \hat{+} F, E \check{+} F \in \mathcal{LR}(H)$ ;
- (ii)  $EF$  est un sous-espace vectoriel fermé.

*Preuve.* Montrons (i).  $E \hat{+} G(A)$  est fermé. En effet, si  $\{(x_n, y_n + Ax_n)\} \subseteq E \hat{+} G(A)$  converge vers  $(u, v) \in H \oplus H$ , alors  $\{(x_n, Ax_n)\}$  converge vers  $(u, Au)$ , puisque  $A$  est borné et donc  $\{(x_n, y_n)\}$  converge. Comme  $E$  est fermé, alors on en déduit que  $\{(x_n, y_n)\}$  converge vers  $(u, w) \in E$ . Par conséquent  $(u, v) = (u, Au + w)$  avec  $(u, w) \in E$ . Montrons maintenant que  $\dim(E) = \dim(E^\perp) = +\infty$ . On considère l'isomorphisme suivant entre  $E \hat{+} G(A)$  et  $E$ :

$$(x, y) \xrightarrow{\Phi} \Phi(x, y) = (x, y + Ax).$$

De la bijectivité de  $\Phi$  on en déduit que  $\dim(E \hat{+} F) = +\infty$ . De même on construit l'isomorphisme suivant entre  $(E \hat{+} F)^\perp$  et  $E^\perp$ :

$$(x, y) \xrightarrow{\Psi} \Psi(x, y) = (x + A^*y, y).$$

Cet isomorphisme envoie  $(E \hat{+} F)^\perp$  dans  $E^\perp$ , car si  $(u, v) \in E$  et  $(x, y) \in (E \hat{+} F)^\perp$ :

$$\begin{aligned} \langle (x + A^*y, y); (u, v) \rangle &= \langle x + A^*y; u \rangle + \langle y; v \rangle \\ &= \langle x; u \rangle + \langle y; Au \rangle + \langle y; v \rangle \\ &= \langle (x, y); (u, v + Au) \rangle = 0, \end{aligned}$$

puisque  $(x, y) \in (E \hat{+} F)^\perp$ . En outre, il est facile de voir que  $\Psi$  est linéaire et injective. Montrons que  $\Psi$  est surjective. Soit  $(u, v) \in E^\perp$ . Si  $x = u - A^*v$  et

$y = v$ , on vérifie facilement que  $\Psi(x, y) = (u, v)$ . Il reste à montrer que  $(x, y)$  ainsi défini est un élément de  $(E \hat{+} F)^\perp$ . Soit  $(s, t + As) \in (E \hat{+} F)$ .

$$\langle (u - A^*v, v); (s, t + As) \rangle = \langle u; s \rangle + \langle v; t \rangle = \langle (u, v); (s, t) \rangle = 0,$$

car  $(u, v) \in E^\perp$  et  $(s, t) \in E$ .  $(E \hat{+} F)^\perp$  et  $E^\perp$  sont donc isomorphe et  $\dim(E \hat{+} F)^\perp = +\infty$

Montrons maintenant (ii). Si  $(x, z), (s, r) \in EF$ , alors il existe  $y, t \in H$  tels que  $(x, y) \in F, (y, z) \in E$  et  $(s, t) \in F, (t, r) \in E$ .  $E$  et  $F$  sont deux des espaces vectoriels, donc  $(x + s, y + t) \in F$  et  $(y + t, z + r) \in E$ . Par conséquent  $(x + s, z + r) \in EF$ . De la même façon on montre que si  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $(x, y) \in EF$ , alors  $(\lambda x, \lambda y) \in EF$ , d'où  $EF$  est un sous-espace vectoriel.

Montrons que  $EF$  est fermé. Soit  $\{(u_n, v_n)\}$  une suite de  $EF$  qui converge vers  $(u, v) \in H \oplus H$ . Il existe  $\{w_n\} \subseteq H$  telle que  $(u_n, w_n) \in F$  et  $(w_n, v_n) \in E$ .  $F$  est le graphe d'un opérateur borné  $A$ , donc  $w_n = Au_n$ , d'où la suite  $\{Au_n\}$  est convergente vers  $Au$ . La suite  $\{(u_n, Au_n)\}$  est donc convergente dans  $F$  qui est fermé. Par conséquent elle converge vers  $(u, Au) \in F$ . La suite  $\{(Au_n, v_n)\}$  est donc convergente dans  $E$  qui est fermé, elle converge vers  $(Au, v) \in E$ , d'où  $(u, v) \in EF$ . ■

DÉFINITION 14. On dira qu'une relation linéaire  $E$  est *semi-Fredholm* si et seulement si  $E + H_1$  est fermé et  $\min\{\dim(E \cap H_1), \dim(E^\perp \cap H_2)\} < +\infty$ .

PROPOSITION 15. Si  $E = G(A)$  et  $A \in \mathcal{C}(H)$ , alors  $A$  est *semi-Fredholm* si et seulement si  $E$  est *semi-Fredholm* au sens de la définition 14.

En outre, on a  $\text{ind}(A) = \text{ind}_1(E)$  où  $\text{ind}(A)$  est l'indice de Fredholm de  $A$ .

*Preuve.* Il suffit de voir que  $R(A)$  est fermé si et seulement si  $G(A) + H_1$  est fermé, en utilisant le lemme 3. ■

DÉFINITION 16. Soit  $E \in \mathcal{LR}(H)$  et  $E^{-1} = J(E)$  avec:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

$E^{-1}$  est une relation linéaire appelée *la relation inverse* de  $E$ .

PROPOSITION 17. Soit  $E \in \mathcal{LR}(H)$  et  $F = E^{-1}$ . Alors  $E$  est *semi-bornée* si et seulement si  $F$  est *semi-Fredholm* et on a:

$$\text{ind}_2(E) = \dim(F \cap H_1) - \dim(F^\perp \cap H_2) = \text{ind}_1(F).$$

*Preuve.* Evidente. ■



PROPOSITION 18. *Si  $E, F \in \mathcal{LR}(H)$  telles que  $E$  est semi-Fredholm et  $P_E - P_F$  est compact, alors  $F$  est semi-Fredholm.*

*Preuve.* Supposons que  $\dim(E \cap H_1) < +\infty$  et montrons que  $\dim(F \cap H_1) < +\infty$ . Supposons le contraire. Alors il existe un système orthonormé infini  $\{(u_n, 0)\} \subseteq F \cap H_1 \cap (E \cap H_1)^\perp$  et on a :

$$\begin{aligned} \|(u_n, 0)\|^2 &= \|(1 - P_E)(u_n, 0)\|^2 + \|P_E(u_n, 0)\|^2 \\ &= \|(1 - P_E)(u_n, 0)\|^2 + \|P_E P_1(u_n, 0)\|^2 \\ &= \|(1 - P_E)(u_n, 0)\|^2 + \|P_E P_{H_1}^\sim(u_n, 0)\|^2 \\ &\leq \|(1 - P_E)(u_n, 0)\|^2 + \frac{\|(u_n, 0)\|^2}{1 + c^2(E)}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\|(1 - P_E)(u_n, 0)\|^2 \geq c^2(E) \frac{\|(u_n, 0)\|^2}{1 + c^2(E)}$$

et comme

$$\|(1 - P_E)(u_n, 0)\|^2 = \|(P_E - P_F)(u_n, 0)\|^2,$$

il existe une sous-suite qu'on note  $\{(a_n, 0)\}$  telle que  $\{\|(P_E - P_F)(a_n, 0)\|^2\}$  converge, puisque  $P_E - P_F$  est compact. La suite  $\{(a_n, 0)\}$  est donc convergente. Contradiction. Par conséquent  $\dim[F \cap H_1 \cap (E \cap H_1)^\perp] < +\infty$ , d'où  $\dim(F \cap H_1) < +\infty$ . Posons  $S = F + H_1 \cap (E \cap H_1 + F \cap H_1)^\perp$  et montrons que  $S$  est fermé. Soit  $\{(u_n, v_n)\}$  une suite de  $S$  qui converge vers  $(u, v) \in H \oplus H$ .  $(u_n, v_n)$  se décompose d'une manière unique sous la forme :

$$(u_n, v_n) = (s_n, t_n) + (x_n, 0)$$

avec  $(s_n, t_n) \in F$  et  $(x_n, 0) \in H_1 \cap (E \cap H_1 + F \cap H_1)^\perp$ .

Montrons maintenant que  $\{(x_n, 0)\}$  est bornée. Sinon il existe une sous-suite (qu'on notera encore  $\{(x_n, 0)\}$  sans perte de généralité) telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(x_n, 0)\| = +\infty$ . Or

$$\frac{(1 - P_E)(x_n, 0)}{\|(x_n, 0)\|} = \frac{(1 - P_E)(u_n, v_n)}{\|(x_n, 0)\|} - \frac{(P_F - P_E)(s_n, t_n)}{\|(x_n, 0)\|}.$$

Comme la suite  $\left\{ \frac{(s_n, t_n)}{\|(x_n, 0)\|} \right\}$  est bornée et  $P_E - P_F$  est compact, on en déduit sans perte de généralité que la suite  $\left\{ \frac{(P_F - P_E)(s_n, t_n)}{\|(x_n, 0)\|} \right\}$  est convergente. Donc la suite  $\left\{ \frac{(1 - P_E)(x_n, 0)}{\|(x_n, 0)\|} \right\}$  est convergente. Comme  $(x_n, 0) \in H_1 \cap (E \cap H_1)^\perp$ , on en déduit que  $\left\{ \frac{(x_n, 0)}{\|(x_n, 0)\|} \right\}$  est convergente. (Même raisonnement que pour la suite  $(u_n, 0)$ .) Donc

la suite  $\left\{\frac{(s_n, t_n)}{\|(x_n, 0)\|}\right\} \subseteq (E \cap H_1)^\perp$  est convergente. Notons  $(x, 0)$  et  $(s, t)$  les limites respectives de ces deux suites. On a alors:

$$(x, 0) = -(s, t) \in F \cap H_1 \cap (F \cap H_1)^\perp = \{0\}.$$

On en conclut que  $(x, 0) = (0, 0)$ , contradiction, puisque  $\left\|\frac{(x_n, 0)}{\|(x_n, 0)\|}\right\| = 1$ .

Donc la suite  $\{(x_n, 0)\}$  est bornée, ce qui entraîne que la suite  $\{(s_n, t_n)\}$  est elle aussi bornée.

On a l'égalité suivante:

$$(1 - P_E)(x_n, 0) = (1 - P_E)(u_n, v_n) - (P_F - P_E)(s_n, t_n).$$

La suite  $\{(P_F - P_E)(s_n, t_n)\}$  admet une sous-suite convergente, encore notée  $\{(P_F - P_E)(s_n, t_n)\}$ , sans perte de généralité. Donc la suite  $\{(1 - P_E)(x_n, 0)\}$  est convergente et comme plus haut, la suite  $\{(x_n, 0)\}$  est convergente (notons  $(x, 0)$  sa limite,  $(x, 0) \in H_1 \cap (E \cap H_1 + F \cap H_1)^\perp$ ) et par conséquent la suite  $\{(s_n, t_n)\}$  est convergente. Soit  $(s, t) \in F$  sa limite.  $(u, v) = (s, t) + (x, 0) \in S$ , d'où  $S$  est fermé et comme  $\dim(E \cap H_1 + F \cap H_1) < +\infty$ ,  $F + H_1$  est fermé. Alors  $\dim(F \cap H_1) < +\infty$  entraîne que  $F$  est semi-Fredholm.

Si, par contre,  $\dim(E \cap H_1) = +\infty$ , on travaille avec  $E^\perp$  au lieu de  $E$ , et  $H_2$  au lieu de  $H_1$ . ■

**COROLLAIRE 19.** *Si  $E, F \in \mathcal{LR}(H)$  telles que  $E$  est semi-bornée et  $P_E - P_F$  est compact, alors  $F$  est semi-bornée.*

*Preuve.* Conséquence immédiate de la proposition 18. ■

**PROPOSITION 20.** *Soit  $E \in \mathcal{LR}(H)$  et  $F = G(A)$  le graphe d'un élément de  $\mathcal{B}(H)$  on a:*

$$g(E \hat{+} F, E) \leq \|A\|.$$

*Preuve.* D'après la proposition 13,  $E \hat{+} F$  est une relation linéaire. Soit  $(x, y) \in H \oplus H$ ,  $\|(x, y)\| \leq 1$ . Posons  $P_{E \hat{+} F}(x, y) = (u, w + Au)$  et  $P_E(x, y) = (a, c)$  avec  $(u, w) \in E$  et  $(a, c) \in E$ . On a alors  $(u - a, w - c) \in E$ ;  $(u - a, w - c + A(u - a)) \in E \hat{+} F$ . Si  $M$  est un sous-espace vectoriel fermé et  $x \in H$  on a  $\forall y \in M$ ,  $\langle P_M x - x; y \rangle = 0$ , d'où,

$$\begin{cases} \langle x - u; u - a \rangle + \langle y - w - Au; w - c + A(u - a) \rangle = 0; \\ \langle x - a; u - a \rangle + \langle y - c; w - c \rangle = 0. \end{cases}$$

Par conséquent:

$$-\|u - a\|^2 + \langle c - w - Au; w - c \rangle + \langle y - w - Au; A(u - a) \rangle = 0$$

d'où on en déduit que:

$$\begin{aligned}
& \|u - a\|^2 + \|c - w - Au\|^2 \\
&= \langle y - w - Au; A(u - a) \rangle - \langle c - w - Au; Au \rangle \\
&\leq \|y - w - Au\| \|u - a\| \|A\| + \|c - w - Au\| \|u\| \|A\| \\
&\leq \|A\| \sqrt{\|c - w - Au\|^2 + \|u - a\|^2} \sqrt{\|y - w - Au\|^2 + \|u\|^2}.
\end{aligned}$$

Or

$$\|y - w - Au\|^2 + \|u\|^2 = \|(P_{E \hat{+} F} - P_2)(x, y)\| \leq 1$$

car  $g(E \hat{+} F, H_2) \leq 1$ . Par conséquent  $g(E \hat{+} F, E) \leq \|A\|$ . ■

DÉFINITION 21. Soit  $E \in \mathcal{LR}(H)$ . Posons:

$$E^* = \{(x, y) \mid \forall s, t \text{ avec } (s, t) \in E, \langle x; y \rangle = \langle t; x \rangle\}.$$

$E^*$  est une relation linéaire, appelée *adjointe* de  $E$ , et si on pose

$$K = \begin{pmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix}$$

on a

$$E^* = K(E^\perp) = K(E)^\perp.$$

PROPOSITION 22. Soit  $E$  et  $F$  deux sous-espaces vectoriels de  $H \oplus H$ . Alors,

$$(5) \quad E^* \hat{+} F^* \subseteq (E \hat{+} F)^*.$$

En outre si  $D(E) \subseteq D(F)$  et  $D\{(E \hat{+} F)^*\} \subseteq D(F^*)$  alors  $E^* \hat{+} F^* = (E \hat{+} F)^*$

$$(6) \quad E^* F^* \subseteq (FE)^*.$$

En outre si  $R(E) \subseteq D(F)$  et  $D((FE)^*) \subseteq D(F^*)$  alors  $E^* F^* = (FE)^*$ .

*Preuve.* Soit  $(x, m) \in E^*$ . Alors  $\forall u \in D(E + F)$ ,  $\forall s$  tel que  $(u, s) \in E$ , on a

$$\langle u; m \rangle = \langle s; x \rangle.$$

Si  $(x, n) \in F^*$  alors  $\forall (u, t) \in F$ ,  $\langle u; n \rangle = \langle t; x \rangle$ . Donc  $\langle u; m + n \rangle = \langle s + t; x \rangle$  et par conséquent  $(x, m + n) \in (E \hat{+} F)^*$ , d'où (5). Si maintenant,  $D(E) \subseteq D(F)$  alors on a  $E \subseteq (E \hat{+} F) \check{+} F$  d'où  $(E \hat{+} F)^* \check{+} F^* \subseteq ((E \hat{+} F) \check{+} F)^* \subseteq E^*$ . Et si  $D((E \hat{+} F)^*) \subseteq D(F^*)$ , alors  $(E \hat{+} F)^* \subseteq \{(E \hat{+} F)^* \check{+} F^*\} \hat{+} F^* \subseteq E^* \hat{+} F^*$ , d'où  $(E \hat{+} F)^* = E^* \hat{+} F^*$ .

Soit  $(x, y) \in E^*F^*$ . Alors  $\exists z \in H$  tel que  $(x, z) \in F^*$  et  $(z, y) \in E^*$ . En outre  $\forall (s, t) \in FE$ ,  $\exists u \in H$  tel que  $(s, u) \in E$  et  $(u, t) \in F$ . Donc  $\langle u; z \rangle = \langle t; x \rangle$  et  $\langle u; z \rangle = \langle s; y \rangle$  et on a:

$$\langle s; y \rangle = \langle t; x \rangle \quad \forall (s, t) \in FE.$$

Par conséquent,  $(x, y) \in (FE)^*$  ce qui entraîne (6).

Si maintenant,  $D\{(FE)^*\} \subseteq D(F^*)$ . Soit  $(x, y) \in (FE)^*$  alors il existe  $z \in H$  tel que  $(x, z) \in F^*$  et  $(z, y) \in (FE)^*(F^*)^{-1}$ . Donc  $(z, y) \in (F^{-1}FE)^* \subseteq E^*$  car  $R(E) \subseteq D(F)$ . D'où  $E \subseteq F^{-1}FE$  et par conséquent  $(FE)^* \subseteq E^*F^*$  et  $E^*F^* = (FE)^*$ . ■

PROPOSITION 23. Soit  $E \in \mathcal{LR}(H)$ . Alors,

$$\begin{aligned} \varepsilon(E^*, H_2) &= \varepsilon(E, H_2) \\ c(E^*) &= c(E). \end{aligned}$$

*Preuve.*

$$\varepsilon(E^*, H_2) = \varepsilon(K(E^\perp), H_2) = \varepsilon(E^\perp, H_1) = \varepsilon(E, H_2)$$

en utilisant la proposition 7. ■

PROPOSITION 24. Soit  $E, F \in \mathcal{LR}(H)$  et posons  $N_1(E) = N(E) \oplus \{0\}$  et  $N_1(F) = E \cap H_1$ . Alors:

$$(7) \quad \delta^2(N_1(E), N_1(F)) \frac{c^2(F)}{1 + c^2(F)} \leq \delta^2(E, F).$$

*Preuve.* Comme  $N_1(E) = E \cap H_1$  et  $N_1(F) = F \cap H_1$ , alors il suffit de prendre  $M = E$ ,  $M' = F$  et  $N = H_2$  dans la proposition 1.3.4 de [8]. ■

PROPOSITION 25. Soit  $E \in \mathcal{LR}(H)$  telle que  $\dim(E \cap H_2) = \dim(E^\perp \cap H_1)$ . On pose:

$$\begin{aligned} X &= (E \cap H_2)^\perp \cap E, \\ Y \oplus \{0\} &= E^\perp \cap H_1 \end{aligned}$$

et

$$\{0\} \oplus Z = E \cap H_2.$$

Si on note  $Q = P_{E^\perp \cap H_1 + E \cap H_2}$  et  $W$  une isométrie partielle de noyau  $Y^\perp$ , qui envoie  $Y$  sur  $Z$ , alors  $P_t = P_X + P_{G(W/t)}Q$  est une projection orthogonale sur le graphe d'un élément  $A_t \in \mathcal{C}(H)$ .

*Preuve.* On rappelle que si  $A$  est un opérateur alors la projection orthogonale sur le graphe de  $A$  est donnée par la matrice de Stone (cf. le lemme 3.14 de [2]):

$$P_{G(A)} = \begin{pmatrix} R_A & A^*R_{A^*} \\ AR_A & 1 - R_{A^*} \end{pmatrix}$$

avec  $R(A) = (1 + A^*A)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$ . Donc si  $W$  est une isométrie partielle, la projection orthogonale sur le graphe de  $W/t$  est donnée par:

$$(8) \quad P_{G(W/t)} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{1+t^2}W^*W & \frac{t}{1+t^2}W^* \\ \frac{t}{1+t^2}W & \frac{1}{1+t^2}WW^* \end{pmatrix}.$$

Montrons que  $R(P_{G(W/t)}Q) \subseteq R(Q)$ . En effet,  $WW^* = P_Z$  et  $W^*W = P_Y$ .  $\forall (x, y) \in H \oplus H$ , soit  $(a, b) = Q(x, y)$ . Alors  $(a, 0) \in E^\perp \cap H_1$  et  $(0, b) \in E \cap H_2$  et:

$$P_{G(W/t)}(a, b) = \left( a - \frac{1}{1+t^2}W^*Wa + \frac{t}{1+t^2}W^*b; \frac{t}{1+t^2}Wa + \frac{1}{1+t^2}WW^*b \right)$$

et on a  $(W^*b, 0) \in E^\perp \cap H_1$ ,  $(0, Wa) \in E \cap H_2$ ,  $W^*Wa = a$  et  $WW^*b = b$ . Alors  $P_{G(W/t)}Q = QP_{G(W/t)}Q$  est un opérateur auto-adjoint et:

$$P_{G(W/t)}QP_{G(W/t)}Q = P_{G(W/t)}Q.$$

Donc  $P_{G(W/t)}Q$  est une projection orthogonale.

Enfin  $R(P_X)$  et  $R(P_{G(W/t)}Q)$  sont orthogonaux, ce qui entraîne que  $P_t$  est une projection orthogonale.

Par ailleurs  $R(P_t)$  est le graphe d'un opérateur fermé à domaine dense. En effet,  $R(P_t) \cap H_2 = \{0\}$  car si  $\exists y$  tel que  $(0, y) \in R(P_t) \cap H_2$  et:

$$(0, y) = P_X(0, y) + P_{G(W/t)}Q(0, y).$$

Si on pose  $P_X(0, y) = (a, b)$  et  $P_{G(W/t)}Q(0, y) = (c, Wc/t)$ , alors  $c = -a$  et  $\langle (a, b); (-a, -Wa/t) \rangle = 0$ , ce qui entraîne que  $\|a\|^2 + \langle b; Wa/t \rangle = 0$ . En outre  $(0, Wa/t) \in (E \cap H_2)$  et  $(a, b) \in X$ . Par conséquent  $\langle (0, Wa/t); (a, b) \rangle = 0$ , d'où  $\langle Wa/t; b \rangle = 0$  et donc  $\|a\|^2 = 0$ , c'est à dire que  $a = 0$ .

On en déduit alors que  $b = y$  et  $P_X(0, y) = (0, y)$ , d'où  $(0, y) \in X$  et  $y = 0$ .  $D(R(P_t))$  est dense dans  $H$ . En effet,  $D(R(P_t)) = D(E) + Y$  où  $Y = D(E)^\perp$ . ■

**PROPOSITION 26.** *Soit  $E \in \mathcal{LR}(H)$  semi-bornée telle que  $\text{ind}_2(E) = k$ . Alors  $E^*$  est une relation semi-bornée et  $\text{ind}_2(E^*) = -k$ .*

*Preuve.* Il suffit d'écrire la définition de  $E^*$  et de calculer  $\text{ind}_2(E^*)$ . ■

PROPOSITION 27. Soit  $E \in \mathcal{LR}(H)$  telle que  $\dim(E \cap H_2) = \dim(E^\perp \cap H_1)$ . Alors, il existe une application continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathcal{C}(H)$  ( $t \mapsto \{A_t\}$ ) telle que:

$$(9) \quad \lim_{t \rightarrow 1} g(G(A_t), E) = 0.$$

*Preuve.* Soit  $\{A_t\}$  donnée par la proposition 25. Alors si  $t$  et  $r$  sont différents de zéro on a:

$$\begin{aligned} g(E_t, E_r) &= \|P_{G(W/t)}Q - P_{G(W/r)}Q\| \leq \|P_{G(W/t)} - P_{G(W/r)}\| \\ &\leq \|P_{G(tW^*)} - P_{G(rW^*)}\| \leq \|tW^* - rW^*\| \leq |t - r|\|W^*\| \end{aligned}$$

car  $g(A, B) \leq \|A - B\|$ , dans le cas où  $A$  et  $B$  sont deux opérateurs bornés, (cf. le corollaire 5.2 de [6] et la proposition 20) et l'inverse de Moore-Penrose de  $tW^*$  est  $W/t$ . Il suffit alors d'utiliser le (3) du corollaire 3.5 de [9].

Si  $t = 0$ ,

$$g(E, E_t) = \|P_X + P_{E \cap H_2} - P_X - P_{G(W/t)}Q\| = \|P_{E \cap H_2} - P_{G(W/t)}Q\|.$$

Or  $P_{E \cap H_2}Q = P_2Q = P_{E \cap H_2}$ . Soit  $(x, y) \in H \oplus H$ , tel que  $\|(x, y)\| \leq 1$ . Alors  $\|P_2Q(x, y) - P_{G(W/t)}Q(x, y)\| = \|(0, y_2) - (a, Wa/t)\|$  avec  $Q(x, y) = (x_2, y_2)$  et d'après la définition 21,

$$(x_2, y_2) = \left(a, \frac{Wa}{t}\right) + \left(\frac{1}{t}W^*c, -c\right) = \left(a, \frac{Wa}{t}\right) + (b, -tWb).$$

On a alors:

$$\begin{cases} \|a\|^2 + \frac{\|a\|^2}{t^2} + \|b\|^2 + t^2\|b\|^2 = \|x_2\|^2 + \|y_2\|^2 \leq 1; \\ x_2 = a + b, \quad y_2 = \frac{Wa}{t} - tWb. \end{cases}$$

De la première équation, on tire que  $\|a\|^2 \leq t^2$  et donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|a\| = 0$ . De la seconde équation, on tire que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Wa/t - y_2\| = 0$ . ■

PROPOSITION 28. Soit  $E \in \mathcal{LR}(H)$  semi-bornée telle que  $0 \leq \text{ind}_2(E)$ . Alors, il existe une application  $\Phi$  qui satisfait les propriétés suivantes:

- (i)  $t \in [0, 1] \xrightarrow{\Phi} \Phi(t) \in \mathcal{LR}(H)$  est continue;
- (ii)  $\Phi(t)$  est semi-bornée pour tout  $t \in [0, 1]$ ;
- (iii)  $\forall t > 0, D(\Phi(t))^\perp \cap H_1 = \{0\}$  (i.e.  $D(\Phi(t)) = H$ ).

*Preuve.* Posons  $E^\perp \cap H_1 = X \oplus \{0\}$ ,  $E \cap H_2 = \{0\} \oplus Y$ . Soit  $M$  un sous-espace de  $Y$  tel que  $\dim(M) = \dim(X)$  ( $M$  existe car  $\text{ind}_2(E) \geq 0$ ) et  $W$  une

isométrie partielle de noyau  $X^\perp$  qui envoie  $X$  sur  $M$ . Posons  $Z = \{0\} \oplus M^\perp \cap Y$ ,  $Q_1 = P_{E^\perp \cap H_1 + \{0\} \oplus M}$  et enfin:

$$(10) \quad P_t = P_{(E \cap H_2)^\perp \cap E} + P_{G(W/t)}Q_1 + P_Z.$$

$P_t$  est une projection orthogonale sur une relation linéaire  $E_t$ . En effet, il suffit de remarquer que les trois termes qui interviennent dans l'expression de  $P_t$  sont des projections orthogonales sur des espaces deux à deux orthogonaux.  $(E \cap H_2)^\perp \cap E$  est orthogonal à  $Z$  puisque  $Z \subseteq (E \cap H_2)$  et en utilisant la formule de Stone on montre que  $R(P_{G(W/t)}Q_1) \subseteq R(Q_1)$ , d'où  $Z \perp R(P_{G(W/t)}Q_1)$ ,  $(E \cap H_2)^\perp \cap E \perp R(P_{G(W/t)}Q_1)$  et  $P_{G(W/t)}Q_1$  est une projection orthogonale.

Posons  $\Phi(t) = E_t$  et montrons que  $\Phi$  est continue.

Continuité de  $\Phi$  au point  $t = 0$ .  $P_E = P_{(E \cap H_2)^\perp \cap E} + P_{(E \cap H_2)}$  d'où  $g(E, E_t) = \|P_{\{0\} \oplus M}Q_1 - P_{G(W/t)}Q_1\|$ .

En outre  $P_{\{0\} \oplus M}Q_1 = P_2Q_1 = P_{\{0\} \oplus M}$  donc  $g(E, E_t) = \|P_2Q_1 - P_{G(W/t)}Q_1\|$ . Si  $(x, y) \in H \oplus H$  avec  $\|(x, y)\| \leq 1$ , posons  $Q_1(x, y) = (x_2, y_2)$ . Alors:

$$\begin{aligned} & \|(0, y_2) - P_{G(W/t)}(x_2, y_2)\|^2 \\ &= \left\| \left( x_2 - \frac{1}{1+t^2}W^*Wx_2 + \frac{t}{1+t^2}W^*y_2, \frac{t}{1+t^2}Wx_2 + \frac{1}{1+t^2}W^*Wy_2 - y_2 \right) \right\|^2. \end{aligned}$$

Par ailleurs  $W^*W = P_X$  et  $WW^* = P_M$  ce qui entraîne que:

$$\begin{aligned} & \left\| \left( x_2 - \frac{1}{1+t^2}W^*Wx_2 + \frac{t}{1+t^2}W^*y_2, \frac{t}{1+t^2}Wx_2 + \frac{1}{1+t^2}W^*Wy_2 - y_2 \right) \right\|^2 \\ &= \left( \frac{t}{1+t^2} \right)^2 \left[ \|tx_2 + W^*y_2\|^2 + \|Wx_2 - ty_2\|^2 \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent:

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(E, E_t) = 0.$$

Continuité de  $\Phi$  au  $t \neq 0$ . On procède de la même façon que dans la proposition 27 ce qui achève la démonstration de (i).

On voit que  $\Phi(t)$  est semi-bornée à l'aide du corollaire 19, puisque  $P_E - P_{E_t}$  est compact et (ii) est démontré.

(iii) découle directement de la définition de  $\Phi(t)$ . ■

**COROLLAIRE 29.** *Si  $E \in \mathcal{LR}(H)$  telle que  $\text{ind}_2(E) \geq 0$ , alors il existe une application  $\Phi$  qui satisfait les propriétés suivantes:*

- (i)  $\Phi$  est continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathcal{LR}(H)$ ;
- (ii)  $\Phi(0) = E$  et  $\Phi(1)$  est une relation linéaire à domaine dense dans  $H$ .

*Preuve.* Il suffit de reprendre la construction de la proposition 28. ■

PROPOSITION 30. Soit  $E \in \mathcal{LR}(H)$  à domaine dense non fermé  $D(E)$  dans  $H$ . Alors  $\exists \{A_n\} \subseteq \mathcal{C}(H)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(G(A_n), E) = 0$ .

*Preuve.*  $D(E)$  admet un complément algébrique de dimension infinie. En effet,  $D(E) \oplus \{0\} = R(P_1(E))$  et donc  $D(E)$  est un espace paracomplet (cf. la définition 2.1.1 de [8]) ou “range space” si l’on adopte la terminologie de [3]. Supposons que  $D(E)$  admette un complément algébrique  $D^*$  de dimension  $m < +\infty$ . Alors  $D(E)$  et  $D^*$  étant paracomplets,  $D(E) \cap D^* = \{0\}$  et  $D(E) + D^* = H$  étant fermés,  $D(E)$  serait fermé d’après le lemme de Neubauer, (cf. [12] et [8]). Contradiction.

1<sup>er</sup> cas.  $\dim(E \cap H_2) = n = \dim(Y) < +\infty$  où  $\{0\} \oplus Y = E \cap H_2$ . Soit  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  un système orthonormé et  $D^*$  l’espace vectoriel engendré par les  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  tel que  $D^* \cap D(E) = \{0\}$ . Posons  $X = E \cap (E \cap H_2)^\perp$ . Alors  $X$  est le graphe d’un opérateur  $A$  fermé de domaine dense  $D(A) = D(E)$ . On définit la suite d’opérateurs  $\{A_m\}$  sur  $D(A) + D^*$  par: pour  $x \in D(A)$  et  $y \in D^*$ ,  $A_m\{x + y\} = Ax + mUy$  où  $U$  est une matrice unitaire qui envoie  $D^*$  sur  $Y$ . Il est clair que  $A_m$  est fermé car  $G(A_m) = G(A) + G(U)$  et  $\dim Y = \dim D^* < +\infty$ , d’où  $\dim(G(U)) < +\infty$ .

La suite  $\{G(A_m)\}$  converge vers  $E$ . En effet, posons  $t = 1/m$ . Si  $(x, Ax) + (ty, Uy) \in G(A_m)$  et  $(x, Ax) + (0, Uy) \in E$ , alors:

$$\|((x, Ax) + (ty, Uy)) - ((x, Ax) + (0, Uy))\|^2 = \|ty\|^2 \leq t^2 \|U^{-1}\|^2 \|Uy\|^2.$$

Comme  $\|Uy\|^2 \leq \|(x, Ax) + (ty, Uy)\|^2$ , alors  $\delta(G(A_m), E) \leq t \|U^{-1}\|$ . Par conséquent:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \delta(G(A_m), E) = 0.$$

De même on montre que:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \delta(E, G(A_m)) = 0,$$

ce qui entraîne que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} g(E, G(A_m)) = 0.$$

2<sup>eme</sup> cas.  $\dim(E \cap H_2) = +\infty$ . Posons  $\{0\} \oplus Y = E \cap H_2 \Rightarrow \dim Y = +\infty$ .  $D(E)$  est dense non fermé et paracomplet. Il existe donc un sous-espace vectoriel dense non fermé  $D^*$  tel que  $D(E) \cap D^* = \{0\}$  (cf. l’introduction de [7] et [13]).  $D^*$  est le domaine d’un opérateur fermé non borné  $B$ . On peut donc construire un opérateur borné bijectif de  $Y$  sur  $D^*$ , puisque  $\dim(Y) = +\infty$  et  $H$  est séparable. Soit  $T$  cet opérateur et  $C = T^{-1}$ .  $C$  est alors un opérateur fermé de domaine dense



égale à  $D^*$ . En fait  $D^* = R(S_B)$  où  $S_B = \sqrt{(1 + B^*B)^{-1}}$  (cf. la proposition 1.2 de [10]) et on a  $\|T\| < +\infty$ .

On définit comme précédemment une suite d'opérateurs  $\{A_m\}$  de domaine  $D(E) + D^*$  de la façon suivante. Pour  $x \in D$ ,  $y \in D^*$ ,  $A_m(x + y) = Ax + mCy$ .

On montre dans un premier temps que les  $A_m$  sont des opérateurs fermés. Soit  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  telles que:

$$\begin{cases} x_n + y_n \rightarrow x, \\ A_m(x_n + y_n) \rightarrow y. \end{cases}$$

$A_m(x_n + y_n) = A(x_n) + mCy_n$  et  $Ax_n \perp Cy_n$  donc  $\{Ax_n\}$  et  $\{mCy_n\}$  sont deux suites convergentes.  $T$  est borné donc  $\{T(mCy_n)\} (= \{my_n\})$  est convergente, d'où  $\{y_n\}$  est convergente. Par conséquent  $\{x_n\}$  converge vers un élément  $u \in H$ .  $A$  est fermé donc  $\{Ax_n\}$  converge vers un élément  $v = Au \in H$ . D'où  $u \in D(A) = D(E)$  et  $v = Au$  et  $\{y_n\}$  converge vers un élément  $r \in H$  et  $\{Cy_n\}$  converge vers un élément  $s \in H$ . Comme l'opérateur  $C$  est fermé,  $r \in D^*$  et  $s = Cr$ .

Par conséquent,  $x = u + r \in D(E) + D^*$  et  $y = A_mx$ .

Enfin de la même manière que dans le premier cas, on montre que:

$$\begin{aligned} \delta(G(A_m), E) &\leq \frac{1}{m} \|T\|, \\ \delta(E, G(A_m)) &\leq \frac{1}{m} \|T\|. \end{aligned}$$

Donc  $\lim_{m \rightarrow +\infty} g(E, G(A_m)) = 0$ . ■

**PROPOSITION 31.** *Soit  $E, F \in \mathcal{LR}(H)$  avec  $E + H_1$  fermé et  $N(E) = \{0\}$ . Si  $F$  est telle que  $\delta^2 = \delta^2(F, E) < c^2(E)/(1 + c^2(E))$  alors  $F + H_1$  est fermé et  $N(F) = \{0\}$ .*

*Preuve.* C'est une conséquence immédiate de la proposition 1.3.5 de [8]. ■

**COROLLAIRE 32.** *Soit  $E \in \mathcal{LR}(H)$  semi-Fredholm avec,  $\dim N(E) < +\infty$ . Si  $F \in \mathcal{LR}(H)$  est telle que  $\delta^2 = \delta^2(F, E) < c^2(E)/(1 + c^2(E))$ , alors  $F + H_1$  est fermé et  $\dim N(F) \leq \dim N(E)$ .*

*Preuve.* Conséquence immédiate du corollaire 1.3.2 de [8]. ■

**THÉORÈME 33.** *Soit  $E \in \mathcal{LR}(H)$  semi-Fredholm et  $F \in \mathcal{LR}(H)$  telle que*

$$(11) \quad g^2(E, F) < \frac{c^2(E)}{1 + c^2(E)}.$$

*Alors  $F$  est semi-Fredholm, et  $\text{ind}_1(F) = \text{ind}_1(E)$ .*

*Preuve.*  $E$  est semi-Fredholm donc  $E + H_1$  est fermé et  $\min\{\dim N_1(E), \dim N_1(E^*)\} < +\infty$ .

Distinguons deux cas:

(1) Supposons d'abord que  $\dim N_1(E) < +\infty$ . D'après la proposition 24 on a  $\dim N_1(F) \leq \dim N_1(E) < +\infty$ . Posons  $m = \dim N_1(E) - \dim N_1(F)$ . Il existe alors un sous-espace vectoriel  $X$  de dimension  $m$  tel que  $X \subseteq N_1(E) \cap [F^\perp + H_2]$ . On reprend les notations de la proposition 10 en échangeant les rôles de  $F^\perp$  et  $E$  d'une part et  $H_2$  et  $H_1$  d'autre part. Alors  $R$  est la projection d'image  $H_2 \cap (F^\perp \cap H_2)^\perp$  et  $N(R) \cap X = \{0\}$ . En effet, si  $x \in N(R) \cap X$ , alors  $x \in F^\perp \cap X \subseteq F^\perp \cap E$  car  $N(R) = F^\perp + F \cap H_1$  et  $X \subseteq (F \cap H_1)^\perp \cap E$ . En outre  $g(E, F) < 1$  donc  $F^\perp \cap E = \{0\}$  d'où  $x = \{0\}$ . Donc si on pose  $Y = R(X)$  alors  $\dim Y = m$ . Posons  $Z = Y + K(N_1(F^*)) \subseteq H_2$ . Alors  $\dim Z = m + \dim N_1(F^*)$ . En effet, si  $u \in Y \cap K(N_1(F^*))$ , alors  $u \in H_2 \cap (H_2 \cap F^\perp)^\perp \cap F^\perp = \{0\}$ . Supposons que  $\dim Z > \dim N_1(E^*)$ . Alors,

$$\dim Z > \dim K(N_1(E^*)) = \dim E^\perp \cap H_2.$$

Donc il existe  $z \in Z \cap (E + H_1)$  tel que  $z \neq 0$  et  $z = y + w$ , avec  $y \in Y$ ,  $w \in K(N_1(F^*))$  et  $y = R(v)$  où  $v \in X$ . Comme  $F^\perp + H_2 = F^\perp + H_2 \cap (H_2 \cap F^\perp)^\perp$  alors  $z - v = y - v + w \in F^\perp$ , d'où,

$$\|z - v\|^2 = \|(1 - P_E)(z - v)\|^2 + \|P_E(z - v)\|^2 \leq \frac{\|z\|^2}{1 + c^2(E)} + \delta^2(F, E)\|z - v\|^2,$$

puisque  $z \perp (K(N_1(E^*)) + (F \cap H_1))$  et  $z - v \perp F$ .

En outre  $z \in H_2$  et  $v \in H_1$ , ce qui nous permet d'écrire:

$$\|z - v\|^2 \leq \left\{ \frac{1}{1 + c^2(E)} + g^2(E, F) \right\} \|z - v\|^2$$

et comme  $g^2(E, F) < \frac{c^2(E)}{1 + c^2(E)}$ , on obtient alors  $z - v = 0$  d'où  $z = 0$ , contradiction. Donc  $\dim Z \leq \dim N_1(E^*)$ , d'où

$$\dim N_1(E) - \dim N_1(F) \leq \dim N_1(E^*) - \dim N_1(F^*).$$

Enfin, en échangeant les rôles de  $E$  et  $E^*$ , de  $F$  et  $F^*$ , on obtient l'inégalité contraire, puisque  $g(E, F) = g(E^*, F^*)$ ,  $c(E^*) = c(E)$  et si  $\dim N_1(E^*) < +\infty$  alors  $\dim N_1(F^*) < +\infty$ . Par contre si  $\dim N_1(E^*) = +\infty$  alors  $\dim N_1(F^*) = +\infty$  d'après la proposition 24.

(2) Si, par contre  $\dim N_1(E) = +\infty$ , alors  $\dim N_1(E^*) < +\infty$ . On reprend le même raisonnement que celui du cas (1) en remplaçant  $E$  par  $E^*$  et  $H_1$  par  $H_2$ . ■

REMARQUE 34. Ce théorème peut être obtenu directement en utilisant le théorème 2.2 de [1]. Toutefois par cette méthode on n'obtient pas d'estimation de la boule optimale dans laquelle, le résultat reste vrai (on se contente de le démontrer pour des perturbations "suffisamment petites"). Par ailleurs la constante donnée par le théorème 33 est optimale (cf. l'exemple donné ci-dessous).

EXEMPLE 35. Soit  $A = I$  l'identité sur  $H$ . Alors  $c(A)/\sqrt{1+c^2(A)} = 1/\sqrt{2}$ . On vérifie facilement que  $g(A, 0) = 1/\sqrt{2}$ , mais l'opérateur nul n'est pas semi-Fredholm.

COROLLAIRE 36. Posons  $B_k = \{E \in \mathcal{LR}(H) \mid E \text{ semi-bornée et } \text{ind}_2(E) = k\}$ . Alors  $B_k$  est un ouvert de  $\mathcal{LR}(H)$ .

*Preuve.*  $F = E^{-1}$  étant semi-Fredholm, il suffit d'appliquer le théorème 33. ■

THÉORÈME 37. L'adhérence de  $\mathcal{C}(H)$  dans  $\mathcal{LR}(H)$  est le complémentaire dans  $\mathcal{LR}(H)$  des relations linéaires semi-bornées  $E$  telles que  $\text{ind}_2(E) \neq 0$ .

*Preuve.* Soit  $E \in \mathcal{LR}(H)$  semi-bornée d' $\text{ind}_2$  non nul. Alors  $E \notin \overline{\mathcal{C}(H)}$ . Il suffit d'utiliser le corollaire 36 pour s'en persuader. Si  $E \in \mathcal{LR}(H)$  est non semi-bornée, alors on a deux cas:

1<sup>er</sup> cas.  $\dim(E^\perp \cap H_1) = \dim(E \cap H_2) = +\infty$ . Dans ce cas  $E \in \overline{\mathcal{C}(H)}$  (cf. la proposition 27).

2<sup>ème</sup> cas.  $D(E)$  est non fermé, on peut toujours supposer que  $\dim(E^\perp \cap H_1) < \dim(E \cap H_2)$  quitte à prendre  $E^*$  à la place de  $E$ , puisque  $\text{ind}_2(E^*) = -\text{ind}_2(E)$ . On peut donc supposer que  $D(E)$  est dense dans  $H$  (cf. le corollaire 29) et on conclut alors à l'aide de la proposition 30 que  $E$  est la limite de graphes d'opérateurs fermés à domaine dense. ■

THÉORÈME 38.  $\mathcal{B}(H)$  est un ouvert de  $\mathcal{LR}(H)$  dans lequel l' $\text{ind}_2$  est nul.

*Preuve.* Soit  $E = G(A)$  telle que  $A \in \mathcal{B}(H)$ . Alors  $E^{-1}$  est semi-Fredholm,  $\text{ind}_1(E^{-1}) = 0$  et  $N(E^{-1}) = \{0\}$ . Soit  $F \in \mathcal{LR}(H)$  telle que  $g(E, F) = g(E^{-1}, F^{-1}) < \frac{c^2(E^{-1})}{1+c^2(E^{-1})}$ . Alors, d'après la proposition 31,  $F^{-1}$  est semi-Fredholm et  $N(F^{-1}) = \{0\}$ . Par ailleurs  $\text{ind}_1(F^{-1}) = 0$  (cf. le théorème 33), ce qui entraîne que  $(F^{-1})^\perp \cap H_2 = \{0\}$ . D'où,

$$F \cap H_2 = F^\perp \cap H_1 = \{0\}$$

et  $D(E)$  est fermé.  $F$  est donc le graphe d'un opérateur borné (cf. la remarque 2). ■

PROPOSITION 39. *On reprend les notations de la proposition 30 et on pose  $R_{A_n^*} = (1 + A_n A_n^*)^{-1}$ . On a alors:*

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_{A_n^*}(y)\| = 0 \quad \forall y \in Y$$

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n^* R_{A_n^*}(y)\| = 0 \quad \forall y \in Y.$$

*Preuve.* Pour établir (12), soit  $(x, y) \in H \oplus H$  tel que  $\|(x, y)\| \leq 1$ . Posons  $P_{G(A_n)}(x, y) = (x_n + y_n, Ax_n + nCy_n)$  et  $P_{(G(A)+\{0\}) \oplus Y}(x, y) = (u, Au + P_Y y)$ .

En outre  $(x_n - u + y_n, A(x_n - u) + nCy_n) \in G(A_n)$  et  $(x_n - u, A(x_n - u) - P_Y y) \in G(A) + \{0\} \oplus Y$ . D'où,

$$\begin{cases} \langle x - x_n - y_n; x_n - u + y_n \rangle + \langle y - Ax_n - nCy_n; A(x_n - u) + nCy_n \rangle = 0 \\ \langle x - u; x_n - u \rangle + \langle y - Au - P_Y y; A(x_n - u) - P_Y y \rangle = 0. \end{cases}$$

On retranche la seconde équation de la première, on obtient:

$$\begin{aligned} \langle x - u; y_n \rangle + \langle u - x_n - y_n; x_n - u + y_n \rangle + \langle y - Ax_n - nCy_n; A(x_n - u) + nCy_n \rangle \\ - \langle y - Au - P_Y y; A(x_n - u) - P_Y y \rangle = 0. \end{aligned}$$

En outre  $Au \perp Y$  et  $Ax_n \perp Y$ , on peut donc écrire cette dernière égalité de la façon suivante:

$$\langle x - u; y_n \rangle + \langle P_Y y - nCy_n; P_Y y \rangle = \|u - x_n - y_n\|^2 + \|Au + P_Y y - Ax_n - nCy_n\|^2.$$

Avec  $\|x_n + y_n\|^2 + \|Ax_n\|^2 + n^2 \|Cy_n\|^2 \leq 1$  d'où  $\|Cy_n\| \leq 1/n$ .  $T = C^{-1}$  est borné, par conséquent  $\|y_n\| = \|TCy_n\| \leq \|T\| \|Cy_n\|$ . D'où,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n\| = 0$ .

(1) Si  $y \perp Y$  on obtient:  $\langle x - u; y_n \rangle = \|u - x_n - y_n\|^2 + \|Au - Ax_n - nUy_n\|^2$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u - x_n - y_n\|^2 = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Au - Ax_n - nUy_n\|^2 = 0$ .

(2) Si  $y$  n'est pas orthogonal à  $Y$ , on écrit  $y = P_Y y + (1 - P_Y)y$ .  $(1 - P_Y)y \perp Y$ . Par conséquent d'après le (1) l'expression  $\|P_{G(A_n)}(x, (1 - P_Y)y) - P_{(G(A)+\{0\}) \oplus Y}(1 - P_Y)y)\|$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini et si on pose  $y_1 = P_Y y$ , alors seul le terme  $P_{G(A_n)}(0, P_Y y) - (0, P_Y y)$  reste et vaut:

$$(A_n^* R_{A_n^*} y_1, (1 - R_{A_n^*})(y_1)) - (0, y_1) = (A_n^* R_{A_n^*}(y_1), -R_{A_n^*}(y_1)).$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(G(A_n, E)) = 0$ , on en déduit que  $\|A_n^* R_{A_n^*} y_1\|$  et  $\|R_{A_n^*} y_1\|$  tendent vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini. (12) entraîne (13) (cf. le (iii) du corollaire 4.1 de [6]).

DÉFINITION 40. (cf. [6]) Soient  $H$  et  $K$  deux espaces de Hilbert. Si  $A \in \mathcal{C}(H, K)$ . Posons:

$$\tilde{A} = AS_A(1 + S_A)^{-1} : H \rightarrow K$$

avec  $S_A = \sqrt{(1 + A^*A)^{-1}}$ .  $\tilde{A}$  est appelé *le bissecteur de A* et on a  $N(A) = N(\tilde{A})$ ,  $R(A) = R(\tilde{A})$ .

PROPOSITION 41. Soit  $A \in \mathcal{C}(H)$  alors:

$$(14) \quad (\tilde{A})^* = \tilde{A}^*$$

$$(15) \quad R_{\tilde{A}} = \frac{1 + S_A}{2}$$

$$(16) \quad \tilde{A}^* R_{\tilde{A}} = \frac{1}{2} AS_A.$$

*Preuve.* Pour la preuve de cette proposition, voir par exemple [6] et [11]. ■

DÉFINITION 42. Soient  $A, B \in \mathcal{C}(H)$ . Posons:

$$s^2(A, B) = \|S_A - S_B\|^2 + \|AS_A - BS_B\|^2 + \|S_{A^*} - S_{B^*}\|^2 + \|A^*S_{A^*} - B^*S_{B^*}\|^2.$$

Alors  $s$  est une métrique sur  $\mathcal{C}(H)$  (cf. [6]) et on notera  $\mathcal{S}(H)$  l'espace  $\mathcal{C}(H)$  muni de cette métrique.

PROPOSITION 43. Si  $A, B \in \mathcal{C}(H)$  on pose:

$$p^2(A, B) = \|R_A - R_B\|^2 + \|AR_A - BR_B\|^2 + \|R_{A^*} - R_{B^*}\|^2 + \|A^*R_{A^*} - B^*R_{B^*}\|^2.$$

$p$  est une métrique sur  $\mathcal{C}(H)$  et on a:

$$g(A, B) \leq p(A, B) \leq 2g(A, B) \quad \forall A, B \in \mathcal{C}(H).$$

*Preuve.* (i)  $g(A, B) \leq p(A, B)$ . Soit  $(u, v) \in H \oplus K$ .

$$\begin{aligned} & \| (P_{G(A)} - P_{G(B)})(u, v) \|^2 \\ &= \| (R_A - R_B)u + (A^*R_{A^*} - B^*R_{B^*})v \|^2 + \| (AR_A - BR_B)u + (R_{B^*} - R_{A^*})v \|^2 \\ &\leq (\|R_A - R_B\|^2 + \|A^*R_{A^*} - B^*R_{B^*}\|^2)(\|u\|^2 + \|v\|^2) \\ &\quad + (\|AR_A - BR_B\|^2 + \|R_{B^*} - R_{A^*}\|^2)(\|u\|^2 + \|v\|^2). \end{aligned}$$

Donc:

$$g^2(A, B) \leq p^2(A, B).$$

(ii)  $p(A, B) \leq 2g(A, B)$ . On prend successivement  $v = 0$  et  $u = 0$  dans l'égalité de (i) et on obtient alors:

$$\begin{aligned} & \| (R_A - R_B)u \|^2 + \| (AR_A - BR_B)u \|^2 \leq g^2(A, B) \\ & \| (A^*R_{A^*} - B^*R_{B^*})v \|^2 + \| (R_{A^*} - R_{B^*})v \|^2 \leq g^2(A, B). \end{aligned}$$

Donc:

$$\|R_A - R_B\|^2 \leq g^2(A, B);$$

$$\|AR_A - BR_B\|^2 = \|A^*R_{A^*} - B^*R_{B^*}\|^2 \leq g^2(A, B)$$

et

$$\|R_{A^*} - R_{B^*}\|^2 \leq g^2(A, B),$$

d'où  $p^2(A, B) \leq g^2(A, B)$ . ■

REMARQUE 44. Si  $A, B \in \mathcal{C}(H)$ , alors  $s(A, B) = 2p(\tilde{A}, \tilde{B})$  et  $l(A, B) = 2g(\tilde{A}, \tilde{B}) = \|M_A - M_B\| \leq s(A, B) \leq 2l(A, B)$ .

PROPOSITION 45. (cf. [6]) On note  $M_A$  l'isométrie de  $H \oplus K$ :

$$M_A = \begin{pmatrix} S_A & A^*S_{A^*} \\ AS_A & -S_{A^*} \end{pmatrix}.$$

$M_A$  est une réflexion sur le graphe de  $\tilde{A}$  qui envoie  $G(A)$  sur  $H \oplus \{0\}$ .

PROPOSITION 46. Soit  $A, B \in \mathcal{C}(H)$ . Alors  $g(A, B) \leq l(A, B) \leq s(A, B)$ .

*Preuve.* (cf. la proposition 6.4 de [6])

$$\begin{aligned} P_{G(A)} - P_{G(B)} &= \begin{pmatrix} R_A - R_B & A^*R_{A^*} - B^*R_{B^*} \\ AR_A - BR_B & R_{B^*} - R_{A^*} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_A & A^*S_{A^*} \\ AS_A & -S_{A^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_A & A^*S_{A^*} \\ -AS_A & S_{A^*} \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_B & B^*S_{B^*} \\ BS_B & -S_{B^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_B & B^*S_{B^*} \\ -BS_B & S_{B^*} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(M_A - M_B) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M_A + \frac{1}{2}M_B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (M_A - M_B). \end{aligned}$$

Donc

$$g(A, B) = \|P_{G(A)} - P_{G(B)}\| \leq \frac{1}{2}\|M_A - M_B\| \|M_A\| + \frac{1}{2}\|M_B\| \|M_A - M_B\| = l(A, B). \quad \blacksquare$$

NOTATION 47. On note  $\mathcal{BC}(H, K)$  l'ensemble de tous les  $A \in \mathcal{B}(H, K)$  tels que  $\|A\| \leq 1$  et  $\ker\{I - A^*A\} = \{0\}$ , muni de la topologie uniforme.

PROPOSITION 48. (cf. [6]) L'application bissecteur:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(H, K) &\rightarrow \mathcal{BC}(H, K) \\ A &\mapsto \tilde{A} \end{aligned}$$

est un homéomorphisme et on a  $\|\tilde{A}\| < 1$  si et seulement si  $A$  est borné.

Dans ce cas on a  $A = 2\tilde{A}[I - (\tilde{A})^* \tilde{A}]$ .

PROPOSITION 49.  $\mathcal{B}(H, K)$  est un ouvert dense dans  $\mathcal{C}(H, K)$  pour la métrique du gap  $g$ .

*Preuve.* Soit  $A \in \mathcal{B}(H)$  et  $\tilde{A}$  son bissecteur. Si  $t < 1$  on pose  $C_t = 2t\tilde{A}(1 - t^2\tilde{A}^*\tilde{A})^{-1}$ . Par conséquent  $C_t \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$  et  $\tilde{C}_t = t\tilde{A}$ . En outre (cf. la proposition 6.4 de [6]),  $g(C_t, A) \leq 2g(\tilde{C}_t, \tilde{A}) \leq 2|1 - t|\|\tilde{A}\|$ . Donc  $\lim_{t \rightarrow 1} g(C_t, A) = 0$ . ■

THÉORÈME 50. L'ensemble des relations semi-bornées est un ouvert dense dans  $\mathcal{LR}(H)$ .

*Preuve.* Soit  $E \in \mathcal{LR}(H)$ . Posons  $F = E \cap (E \cap H_2)^\perp$  et  $K = \overline{R(F)}$ . Sans perte de généralité on peut supposer que  $D(E)$  est dense (cf. la proposition 10). Donc  $F$  est le graphe d'un opérateur de  $\mathcal{C}(H, K)$ . D'après la proposition 49, il existe une suite  $\{A_n\} \subseteq \mathcal{B}(H, K)$  telle que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(A_n, F) = 0.$$

On pose  $F_n = G(A_n) + (E \cap H_2)$ . Comme  $D(F_n) = H$ ,  $F_n$  est semi-bornée et  $g(F_n, E) = g(G(A_n) + E \cap H_2, G(A) + E \cap H_2) = g(G(A_n), G(A))$ , d'où,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(F_n, E) = 0. \quad \blacksquare$$

#### BIBLIOGRAPHIE

1. E. ALBRECHT, F.-H. VASILESCU, Stability of the index of Semi-Fredholm complex of Banach spaces, *J. Funct. Anal.* **66**(1986), 141–172.
2. H.O. CORDES, J.P. LABROUSSE, The invariance of the index in the metric space of closed operators, *J. Math. Mech.* **12**(1963), 693–719.
3. P. FILLMORE, J. WILLIAMS, On operators ranges, *Adv. Math.* **7**(1971), 254–282.
4. S. GOLDBERG, *Unbounded Linear Operators*, McGraw Hill, New York 1966.
5. T. KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin 1966.
6. J.P. LABROUSSE, *Quelques topologies sur des espaces d'opérateurs dans des espaces de Hilbert et leurs application*. I, Faculté des Sciences de Nice (Math.), 1970.
7. J.P. LABROUSSE, Opérateurs unitaires tempérés, *Bull. Sci. Math. (2)* **96**(1972), 209–223.
8. J.P. LABROUSSE, Les opérateurs quasi-Fredholm: une généralisation des opérateurs semi-Fredholm, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **29**(1980), 161–258.
9. J.P. LABROUSSE, M. MBEKHTA, Les opérateurs points de continuité pour la conorme et l'inverse de Moore-Penrose, *Houston J. Math.* **18**(1992), 723.

10. J.P. LABROUSSE, B. MERCIER, Equivalence compacte entre deux opérateurs fermés sur un espace de Hilbert, *Math. Nachr.* **133**(1987), 91–105.
11. J.P. LABROUSSE, B. MERCIER, Extension du théorème de Brown-Douglas-Fillmore au cas des opérateurs non-bornés, *J. Operator Theory* **24**(1990), 137–154.
12. G. NEUBAUER, *Espaces paracomplets*, Conférence à Nice, juin 1974.
13. J.V. NEUMANN, Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen, *J. Reine Angew. Math.* **161**(1929), 208–236.

YAHYA MEZROUI  
*Laboratoire J.A. Dieudonné*  
*Université de Nice - Sophia - Antipolis*  
*UMR n° 6621 du CNRS*  
*06108 NICE Cedex 2*  
*FRANCE*  
*E-mail: mezroui@math.unice.fr*

Received May 13, 1997; revised July 15, 1997 and December 12, 1997.