J. OPERATOR THEORY
7(1982), 125–137

SOUS-ESPACES INVARIANTS POUR LES CONTRACTIONS DE CLASSE $C_{1\cdot}$, ET VECTEURS CYCLIQUES DANS $C_0(\mathbf{Z})$

B. BEAUZAMY

Soient E un espace de Hilbert complexe et T un opérateur linéaire continu de E dans E, satisfaisant l'hypothèse suivante, notée $(\mathscr{H})$:

$$(\mathscr{H}) \qquad \|T\| = 1 \text{ et } \exists\, x_0 \neq 0 \text{ tel que } T^n x_0 \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0\,.$$

Si l'on s'intéresse à la question (non résolue) de l'existence de sous-espaces invariants non triviaux pour T, on peut supposer que pour tout $z \neq 0$ de E, $T^n z \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. L'opérateur T est alors une contraction de classe $C_{1\cdot}$ (cette terminologie est due à Sz.-Nagy–Foiaş [10]).

Dans [2], nous plaçant dans le cadre plus général des espaces de Banach, nous avons montré l'existence d'un sous-espace invariant non trivial (en abrégé S.I.N.T.) pour un opérateur inversible satisfaisant $(\mathscr{H})$, sous l'hypothèse supplémentaire suivante ("condition de Beurling locale"):

$$1)\begin{cases}\text{Il existe un point } y \neq 0, \text{ une suite de réels } \rho_n \geqslant 1, \text{ vérifiant } \rho_{m+n} \leqslant \rho_m \cdot \rho_n \\ \forall\, m, n \in \mathbf{N},\ \sum\limits_n \dfrac{\log \rho_n}{1+n^2} < +\infty, \text{ tels que } \forall\, n \in \mathbf{N},\ \|T^{-n} y\| \leqslant \rho_n.\end{cases}$$

Le S.I.N.T. obtenu était d'un type particulier, que nous avions baptisé "type fonctionnel" (car issu d'une fonction dont la série de Fourier était absolument convergente). Dans le cas de l'opérateur de multiplication par $e^{i\theta}$ sur $L^2(\mathbf{T})$, dont les sous-espaces invariants sont parfaitement connus (voir par exemple K. Hoffmann [8]), la méthode de notre article [2] donne les sous-espaces de type "spectral", constitués des fonctions de $L^2(\mathbf{T})$ s'annulant identiquement sur un ensemble de mesure positive; elle ne donne pas l'autre genre de S.I.N.T., qui est du type mH^2, où m est une fonction intérieure. C'est précisément une méthode permettant, lorsqu'elle est appliquée à l'opérateur de multiplication par $e^{i\theta}$, de retrouver les sous-espaces mH^2, que nous allons étudier ici.

L'exemple typique de contraction de classe $C_{1.}$ ne satisfaisant pas 1) est celui d'un shift à poids sur $\ell^2(\mathbf{Z})$; c'est un opérateur défini par (notant $(e_n)_{n\in \mathbf{Z}}$ la base canonique):

$$Te_n = w_n e_{n+1},$$

avec:

$$\begin{cases} w_n = 1 & \text{si } n \geqslant 0 \\ w_n = 1/4 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Ce shift vérifie

2) $$\forall x \in E, \quad \|T^{-n}x\| \geqslant C(x)4^n .$$

Pour un opérateur vérifiant $(\mathscr{H})$ et 2), nous avons montré dans [3] une propriété de régularité de la suite des itérés $(T^k z)_{k\in \mathbf{Z}}$, $z \in E$, plus faible que la basicité au sens de Schauder. Cette basicité permettrait de conclure que

3) $$\forall z \neq 0, \quad z \notin \overline{\operatorname{span}}\,\{Tz, T^2 z, \ldots\},$$

ce qui impliquerait évidemment l'existence d'un S.I.N.T.. Nous avons par ailleurs montré ([4]) que l'opérateur de shift à poids ci-dessus défini possédait précisément la propriété 3).

Une propriété voisine de 3) a été obtenue, pour au moins un point $z \neq 0$ de E, par Brown—Chevreau—Pearcy [5], sous des hypothèses de type spectral (par exemple lorsque le spectre de l'opérateur contient une couronne: c'est le cas du shift que nous avons évoqué). Ils ont en effet montré dans ce cas que l'on pouvait trouver x et y dans E tels que

4) $$\langle x, y\rangle = 1, \quad \langle T^k x, y\rangle = 0 \quad \forall k \geqslant 1;$$

le point x ne peut donc être dans $\overline{\operatorname{span}}\{Tx, T^2x, \ldots\}$.

La description d'un S.I.N.T. que nous allons donner peut être considérée comme l'analogue de 4), utilisant, comme nous l'avions fait dans [2], un "calcul fonctionnel asymptotique".

Nous reprenons les notations de [2] : si $f \in \mathscr{A}(\mathbf{T})$, $f(\theta) = \sum_{j\in \mathbf{Z}} a_j e^{ij\theta}$, avec $\Sigma|a_j| < +\infty$, on note:

$$\varphi_m(f)(\theta) = \sum_{j\geqslant -m} a_j e^{i(j+m)\theta}, \quad \psi_m(f) = \sum_{j\geqslant -m} a_j T^{j+m}, \quad \forall m \in \mathbf{Z}.$$

1. UNE DESCRIPTION DES SOUS-ESPACES INVARIANTS NON TRIVIAUX

PROPOSITION 1. *Supposons qu'il existe une fonction $f \in \mathscr{A}(\mathbf{T})$ et deux points $x \neq 0$, $y \neq 0$ dans E tels que*

5) $$\psi_m(f)(x) \underset{m\to+\infty}{\not\to} 0$$

et

6) $$\forall\ k \geqslant 0,\quad \langle \psi_m(f)(x),\ T^{k+m}\,y\rangle \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

alors T a un S.I.N.T.

Démonstration. Pour chaque $k \in \mathbf{N}$, considérons:

$$F_k = \{z \in E,\ \langle \psi_m(f)(x),\ T^{m+k}z\rangle \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0\}$$

et

$$F = \bigcap_{k\in\mathbf{N}} F_k\,.$$

Il est clair que F est un sous-espace vectoriel, qu'il est fermé (car $\|\psi_m(f)\|_{\mathrm{Op}} \leqslant \|f\|_{\mathscr{A}(\mathbf{T})}\ \forall\, m$), qu'il n'est pas réduit à $\{0\}$ (car il contient y par hypothèse). Il est évident que F est invariant par T. Reste à voir que ce n'est pas l'espace entier. Il suffit évidemment pour cela de trouver z tel que $\langle \psi_m(f)(x),\ T^m z\rangle \underset{m\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

On vérifie immédiatement que $\lim\limits_{m\to+\infty} \|\psi_m(f)(x)\|$ existe. Notons-la α. Par hypothèse, $\alpha > 0$. Soient

$$\varepsilon < \frac{\alpha^2}{4\|f\|_{\mathscr{A}}\|x\|^2},$$

et m_0 tel que

$$\sum_{j<-m_0} |a_j| < \varepsilon$$

(rappelons que les a_j sont les coefficients de Fourier de f). On a alors, $\forall\ k \geqslant 0$:

$$\|T^k\psi_{m_0}(f) - \psi_{m_0+k}(f)\|_{\mathrm{Op}} \leqslant \sum_{j<-m_0} |a_j| < \varepsilon.$$

Soient $u_0 = \psi_{m_0}(f)(x)$ et z tel que $\|T^{m_0} z - u_0\| < \varepsilon$. On a, pour $m \geqslant m_0$:

$$\langle \psi_m(f)(x),\ T^m z\rangle = \|\psi_m(f)(x)\|^2 + \langle \psi_m(f)(x),\ T^{m-m_0}u_0 - \psi_m(f)x\rangle +$$
$$+ \langle \psi_m(f)(x),\ T^m z - T^{m-m_0}u_0\rangle.$$

Or $\|\psi_m(f)(x)\|^2 \geqslant \alpha^2$,

$$|\langle \psi_m(f)(x), T^{m-m_0}u_0 - \psi_m(f)\rangle| \leqslant \|\psi_m(f)(x)\|\cdot\|T^{m-m_0}u_0 -$$
$$- \psi_m(f)(x)\| \leqslant \varepsilon\|f\|_{\mathscr{A}}\cdot\|x\|^2$$

et

$$|\langle \psi_m(f)(x), T^m z - T^{m-m_0} u_0 \rangle| \leqslant \|f\|_{\mathscr{A}} \cdot \|T^m z - T^{m-m_0} u_0\| \cdot \|x\| \leqslant \varepsilon \|f\|_{\mathscr{A}} \cdot \|x\|,$$

d'où la proposition.

REMARQUE. Pour un shift à poids sur $\ell^2(\mathbf{Z})$, la caractérisation donnée par la proposition est satisfaite, avec, par exemple, $f(\theta) = e^{i\theta}$, $x = e_1$, $y = e_3$.

Puisque T est de norme 1, les quantités $\|T^{m+k}x \pm T^m y\|$ admettent, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, une limite lorsque $m \to +\infty$. Il en résulte que

$$\lim_{m \to +\infty} \langle T^{m+k} x, T^m y \rangle \quad \text{existe } \forall\, k \in \mathbf{Z}.$$

Nous notons $\lambda_k(x, y)$ (ou plus simplement λ_k) cette limite.

PROPOSITION 2. *Pour $f \in \mathscr{A}(\mathbf{T})$, $x, y \in E$, la condition* 6) *équivaut à*

7) $$\sum_{j \in \mathbf{Z}} a_j \lambda_{j-n} = 0, \quad \forall\, n \geqslant 0.$$

Démonstration. — On a:

$$\langle \psi_m(f)(x), T^{k+m} y \rangle = \sum_{j \geqslant -m} a_j \langle T^{m+j} x, T^{m+k} y \rangle.$$

Mais, pour chaque $j, k \in \mathbf{Z}$, $\langle T^{m+j}x, T^{m+k} y\rangle \xrightarrow[m \to +\infty]{} \lambda_{j-k}$. Comme la suite (a_j) est sommable, il est immédiat que 6) implique 7). La réciproque s'établit en remarquant que:

$$\Big|\sum_{j \geqslant -m} a_j \langle T^{m+j} x, T^{m+k} y \rangle - \sum a_j \lambda_{j-k}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j \geqslant -m} |a_j| \, |\langle T^{m+j} x, T^{m+k} y \rangle - \lambda_{j-k}| + \sum_{j < -m} |a_j| \, |\lambda_{j-k}|.$$

Définissons un opérateur U, de E dans E, par la formule

$$\langle x_1, U x_2 \rangle = \lim_{m \to +\infty} \langle T^m x_1, T^m x_2 \rangle, \quad \forall\, x_1, x_2 \in E.$$

On vérifie immédiatement que U est un opérateur de norme 1, autoadjoint, injectif et d'image dense (car, puisque T est $C_{1\cdot}$, $\langle Ux, x \rangle > 0$, $\forall\, x \in E$). On a:

$$\lambda_j = \langle T^j x, U y \rangle \quad \text{si } j \geqslant 0$$

et

$$\lambda_j = \langle x, U(T^{-j} y) \rangle = \langle Ux, T^{-j} y \rangle \quad \text{si } j \leqslant 0$$

(et $\lambda_j = \langle T^j x, Uy \rangle$ $\forall\, j \in \mathbf{Z}$ si T est inversible).

Il en résulte que l'on peut supposer que $\forall\, x, y \in E$, $\lambda_j(x, y) \xrightarrow[|j| \to +\infty]{} 0$. En effet, si $\lambda_j(x, y) \underset{j \to +\infty}{\not\to} 0$ ou si $\lambda_j(x, y) \underset{j \to -\infty}{\not\to} 0$, alors $T^j x \not\to 0$ faiblement ou $T^j y \not\to 0$ faiblement, lorsque $j \to +\infty$, et on peut alors conclure à l'existence d'un S.I.N.T. pour T.

En effet, T est alors de classe C_{11} ($\forall\, x \in E$, $x \neq 0$, $T^n x \not\to 0$ et $T_x^{*n} \not\to 0$) et l'existence d'un S.I.N.T. a été démontrée par Sz.-Nagy – Foiaş [10]. Nous supposerons donc désormais que la suite $(\lambda_j)_{j \in \mathbf{Z}}$ appartient à $c_0(\mathbf{Z})$.

Soit S le shift usuel de $c_0(\mathbf{Z})$: c'est l'opérateur défini par $Se_n = e_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbf{Z}$.

PROPOSITION 3. *Les conditions* 7) *signifient que* $\lambda = (\lambda_j)_{j \in \mathbf{Z}}$ *n'est pas un élément cyclique pour le shift* S *de* $c_0(\mathbf{Z})$.

Démonstration. Notons $a = (a_j)_{j \in \mathbf{Z}}$. On a $a \in \ell^1(\mathbf{Z})$, et les équations 7) signifient exactement que, dans la dualité c_0, ℓ^1 :

$$\langle a, S^n \lambda \rangle_{(\ell^1, c_0)} = 0 \quad \forall\, n \geqslant 0, \tag{8}$$

ce qui est trivialement équivalent au fait que les $(S^n \lambda)_{n \geqslant 0}$ n'engendrent pas $c_0(\mathbf{Z})$.

Nous avons donc obtenu le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit* T *une contraction de classe* $C_{1\cdot}$ *sur un espace de Hilbert. L'une des trois conclusions suivantes est vraie:*

a) *Il existe une fonction* $f \in \mathscr{A}(\mathbf{T})$, *non identiquement nulle, telle que*

$$\psi_m(f)(x) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0 \quad \forall\, x \in E.$$

b) *Pour tous points* $x, y \in E$ ($x \neq 0$, $y \neq 0$), *la suite* $(\lambda_k(x, y))_{k \in \mathbf{Z}}$ *est dans* $c_0(\mathbf{Z})$ *et est un vecteur cyclique pour le shift usuel de* $c_0(\mathbf{Z})$.

c) T *a un sous-espace invariant non trivial.*

Si le cas a) se produit, nous dirons que T vérifie une équation fonctionnelle asymptotique (en abrégé E.F.A.), de fonction f.

2. EQUATIONS FONCTIONNELLES ASYMPTOTIQUES

L'exemple le plus évident d'opérateur vérifiant une E.F.A. est celui de la projection sur un sous-espace fermé: pour la fonction $f = 1 - e^{i\theta}$, on a $\psi_m(f)(x) = 0$ $\forall\, x$, si $m \geqslant 0$.

A l'opposé, le shift usuel sur $\ell^2(\mathbf{Z})$ ne vérifie aucune E.F.A. : soit $f = \sum_{j \in \mathbf{Z}} a_j e^{ij\theta}$; supposons que $\psi_m(f)(e_0) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$, on aurait alors $\sum_{j \geqslant -m} a_j e_{j+m} \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$, donc $\sum_{j \geqslant -m} |a_j|^2 \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$ et $a_j = 0$ $\forall\, j \in \mathbf{Z}$.

La notion d'E.F.A. doit être rapprochée de l'étude, faite par A. Atzmon [1] des opérateurs qui sont annihilés par une fonction analytique: il y a des analogies entre ces deux questions.

PROPOSITION 4. *L'ensemble des fonctions f pour lesquelles T satisfait une* E.F.A. *de fonction f constitue un idéal fermé propre de $\mathcal{A}(\mathbf{T})$.*

Démonstration. Cet ensemble ne contient pas $f(\theta) = e^{i\theta}$, puisque T est $C_{1\cdot}$. Il est clairement fermé. Le fait que ce soit un idéal résulte du lemme qui suit:

LEMME. *Si u et v sont deux fonctions de $\mathcal{A}(\mathbf{T})$,*

$$\|\varphi_{m+m'}(uv) - \varphi_m(u)\,\varphi_{m'}(v)\|_{\mathcal{A}} \to 0$$

lorsque m et $m' \to +\infty$.

Démonstration du lemme. Soient $u = \sum_k u_k e^{ik\theta}$, $v = \sum_j v_j e^{ij\theta}$, $w = uv = \sum_l w_l e^{il\theta}$. On a :

$$(\varphi_m(u) + \sum_{k<-m} u_k e^{i(k+m)\theta})v = e^{im\theta}\, uv = \varphi_m(uv) + \sum_{l<-m} w_l e^{i(l+m)\theta}.$$

D'où:

$$\varphi_m(u)\cdot v - \varphi_m(uv) = \sum_{k<-m} u_k e^{i(k+m)\theta} v + \sum_{l<-m} w_l e^{i(l+m)\theta}$$

et donc:

$$\varphi_m(u) e^{im'\theta} v - e^{im'\theta}\varphi_m(uv) = \sum_{k<-m} u_k\, e^{i(k+m+m')\theta} v + \sum_{l<-m} w_l\, e^{i(l+m+m')\theta}.$$

Or

$$e^{im'\theta} v - \varphi_{m'}(v) = \sum_{j<-m'} v_j\, e^{i(j+m')\theta}$$

et

$$e^{im'\theta}\varphi_m(uv) = \varphi_{m+m'}(uv) - \sum_{-(m+m')\leqslant l\leqslant -m} w_l e^{i(l+m+m')\theta}$$

et l'on obtient donc:

$$\|\varphi_m(u)\,\varphi_{m'}(v) - \varphi_{m+m'}(uv)\|_{\mathcal{A}} \leqslant \|u\|_{\mathcal{A}}\cdot \sum_{j<-m'} |v_j| + 2\sum_{l<-m} |w_l| + \|v\|_{\mathcal{A}} \sum_{k<-m} |u_k|,$$

d'où le lemme découle immédiatement.

Nous ne savons pas si toute contraction de classe $C_{1\cdot}$ vérifiant une E.F.A. possède nécessairement un S.I.N.T. . Si la fonction f intervenant dans l'E.F.A. vérifie, pour un certain $m \geqslant 0$, $e^{im\theta} f \in H^\infty$, alors T a un vecteur propre. Plus généralement, si T est complètement non unitaire, la fonction f ne peut être quelconque:

THÉORÈME 2. *Soit $f \in \mathscr{A}(T)$ telle que l'idéal fermé engendré par f contienne une fonction de $\mathscr{A}_+$ non identiquement nulle.*

*Si T est complètement non unitaire, T ne peut satisfaire d'*E.F.A. *de fonction f.*

Démonstration. Rappelons que l'idéal fermé engendré par f est l'adhérence de l'ensemble $\{f \cdot g, g \in \mathscr{A}\}$. On suppose donc qu'il existe $h \in \mathscr{A}_+$, non identiquement nulle, et une suite $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions de $\mathscr{A}$, telles que $fg_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} h$ dans $\mathscr{A}$.

Deux cas peuvent se produire :

— ou bien $\forall\, x, \psi_m(h)(x) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$. Mais comme $h \in \mathscr{A}_+$, $\psi_m(h)(x) = T^m(\sum_{j \geqslant 0} h_j T^j x)$. On sait que $\forall\, z \neq 0$, $T^m z \underset{m \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$: il en résulte que $\forall\, x \in E$, $\sum_{j \geqslant 0} h_j T^j x = 0$. Ceci signifie que $h(T) = 0$, et T est une contraction de classe C_0; si T est complètement non unitaire, ceci contredit $T^m z \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$ [8].

— ou bien, et c'est ce que nous supposerons désormais, il existe un point x_0 tel que $\psi_m(h)(x_0) \not\longrightarrow 0$. On peut alors trouver $\alpha > 0$ tel que $\|\psi_m(h)(x_0)\| \geqslant \alpha \;\; \forall\, m$.

Soit n_0 tel que $\|fg_{n_0} - h\|_{\mathscr{A}} < \alpha/4$. D'après le lemme, il existe $m_0 > 0$ tel que $\forall\, m, m' \geqslant m_0$,

$$\|\varphi_m(f) \cdot \varphi_{m'}(g_{n_0}) - \varphi_{m+m'}(fg_{n_0})\|_{\mathscr{A}} \leqslant \alpha/4$$

et donc

$$\|\varphi_m(f) \cdot \varphi_{m'}(g_{n_0}) - \varphi_{m+m'}(h)\|_{\mathscr{A}} < \alpha/2\,.$$

Il en résulte que:

$$\|\psi_{m'}(g_{n_0}) \circ \psi_m(f)(x_0) - \psi_{m+m'}(h)(x_0)\| < \alpha/2\,,$$

et donc

$$\|\psi_{m'}(g_{n_0}) \circ \psi_m(f)(x_0)\| \geqslant \alpha/2\,,$$

d'où $\|\psi_m(f)(x_0)\| \geqslant \alpha/2\, \|g_{n_0}\|_{\mathscr{A}}$, ce qui contredit $\psi_m(f)(x) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0 \;\; \forall\, x \in E$; ce second cas doit donc être éliminé.

Le fait que l'idéal fermé engendré par f contienne une fonction de $\mathscr{A}_+$ non identiquement nulle est lié aux propriétés géométriques de l'ensemble des zéros de f:

COROLLAIRE. *Soit $Z(f)$ l'ensemble des zéros de la fonction f. Si $Z(f)$ est un ensemble de synthèse harmonique de type ZA_+, et si T est complètement non unitaire, T ne satisfait pas d'*E.F.A. *de fonction f.*

Démonstration. Si $Z(f)$ est un ensemble de synthèse, l'idéal fermé engendré par f coïncide avec $I_{Z(f)}$, l'idéal des fonctions qui s'annulent sur $Z(f)$ (voir W. Rudin, [12]). Si $Z(f)$ est de plus de type ZA_+, on peut (par définition) trouver une fonction de $\mathscr{A}_+$, non identiquement nulle, qui s'annule sur $Z(f)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème.

3. VECTEURS CYCLIQUES POUR LE SHIFT USUEL DE $c_0(\mathbf{Z})$

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans le cas où T ne vérifie pas d'E.F.A., et nous examinons dans quelles conditions on peut trouver x et y tels que $(\langle T^k x, Uy\rangle)_{k\in\mathbf{Z}}$ ne soit pas un élément cyclique pour le shift usuel de $c_0(\mathbf{Z})$.

Par commodité d'écriture, nous supposerons T inversible.

On peut introduire sur E la norme:

$$[[x]] = \lim_{m\to+\infty} \|T^m x\|,$$

qui provient du produit scalaire

$$[x, y] = \langle x, Uy\rangle = \lim_{m\to+\infty} \langle T^m x, T^m y\rangle.$$

T devient une isométrie, mais E n'est pas complet pour cette norme. Avec ces notations, on peut écrire $\lambda_k(x, y) = [T^k x, y]$, $k \in \mathbf{Z}$.

A un élément quelconque $(\xi_k)_{k\in\mathbf{Z}} \in c_0(\mathbf{Z})$, on associe la série de Fourier $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \xi_k e^{ik\theta}$, qui converge au sens des distributions. La somme de cette série, que nous notons ξ, est une pseudo-fonction (voir J. P. Kahane [9]). On note PF l'ensemble des pseudo-fonctions et PF_+ l'ensemble de celles dont les coefficients de Fourier d'indices négatifs sont nuls.

On peut caractériser très simplement sur la pseudo-fonction ξ le fait que la suite $(\xi_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ soit un élément cyclique de $c_0(\mathbf{Z})$ pour le shift usuel.

PROPOSITION 5. *La suite $(\xi_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ n'est pas cyclique pour le shift usuel de $c_0(\mathbf{Z})$ si et seulement si il existe une fonction $\psi \in \mathscr{A}(\mathbf{T})$ non identiquement nulle telle que $\psi\xi$ appartienne à* PF_+.

Démonstration. Supposons que (ξ_k) ne soit pas cyclique: les itérés par S sont alors contenus dans un hyperplan, noyau d'une forme linéaire continue: il existe une suite $(a_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ de ℓ^1 telle que:

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} a_j \xi_{j-n} = 0 \qquad \forall n \geqslant 0. \tag{9}$$

Posons $f_1(\theta) = \sum a_{-j} e^{ij\theta}$; le produit $f_1 \cdot \xi$ s'écrit:

$$f_1\xi \sim \Big(\sum_j a_{-j} e^{ij\theta}\Big)\Big(\sum_l \xi_l e^{il\theta}\Big) \sim \sum_n \Big(\sum_j a_{-j}\xi_{n-j}\Big) e^{in}$$

et la formule 9) signifie que les coefficients de Fourier d'indices négatifs de $f_1 \cdot \xi$ sont nuls. Donc $f_1 \cdot \xi \in PF_+$. Inversement si $f_1 \cdot \xi \in PF_+$, on obtient 9), et $(\xi_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ n'est pas cyclique.

Le fait que les itérés négatifs $(T^{-k} x_0)_{k \in \mathbf{N}}$ aient des normes rapidement croissantes peut être caractérisé par l'hypothèse suivante:

(*) | Si $\varphi(\theta) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \gamma_j e^{ij\theta}$ est une fonction de $\mathscr{A}(\mathbf{T})$ telle que la série $\sum_{j \in \mathbf{Z}} \gamma_j T^j x_0$ soit absolument convergente en un point $x_0 \neq 0$, alors les zéros de φ sont de mesure nulle.

En particulier, s'il existe une suite $(\rho_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres réels vérifiant $\rho_n \geqslant 1$, $\forall n$, $\rho_{m+n} \leqslant \rho_m \cdot \rho_n$ $\forall m, n$, $\sum_{n \geqslant 0} \frac{\log \rho_n}{1 + n^2} = +\infty$ et $\|T^{-n} x_0\| \geqslant \rho_n$ $\forall n \geqslant 0$, chaque fonction φ pour laquelle la série est absolument convergente a l'ensemble de ses zéros de mesure nulle (voir Y. Domar [6]). C'est le cas, par exemple, d'un opérateur satisfaisant $\|T^{-n} x\| \geqslant C(x) 4^n$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

PROPOSITION 6. *On suppose que T vérifie (*). Soient $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$. Soient $x = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \alpha_j T^j x_0$, $y = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \beta_l T^l y_0$ deux séries normalement convergentes dans E, de sommes $x \neq 0$, $y \neq 0$. Posons:*

$$\lambda^0 = (\lambda_k^0)_{k \in \mathbf{Z}} = ([T^k x_0, y_0])_{k \in \mathbf{Z}}$$

$$\lambda = (\lambda_k)_{k \in \mathbf{Z}} = ([T^k x, y])_{k \in \mathbf{Z}} .$$

Si λ^0 est cyclique pour le shift usuel de $c_0(\mathbf{Z})$, il en est de même de λ.

Démonstration. Puisque les séries sont normalement convergentes, on a a fortiori $\sum |\alpha_j| < +\infty$ et $\sum |\beta_l| < +\infty$. Par ailleurs :

$$[T^k x, y] = \sum_{j, l \in \mathbf{Z}} \alpha_j \bar{\beta}_l [T^{k+j} x_0, \ T^l y_0] = \sum_{j, l \in \mathbf{Z}} \alpha_j \bar{\beta}_l \lambda_{k+j-l}^0 .$$

Posons $\varphi_1(\theta) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \alpha_{-j} e^{ij\theta}$, $\varphi_2(\theta) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \bar{\beta}_l e^{il\theta}$. Ce sont des fonctions de $\mathscr{A}(\mathbf{T})$. Si Λ^0, Λ désignent les pseudo-fonctions associées à λ^0, λ, le produit $\varphi_1 \cdot \Lambda^0 \cdot \varphi_2$ est une pseudo-fonction dont le $k^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier ($k \in \mathbf{Z}$) vaut

$$\sum_{j, l \in \mathbf{Z}} \alpha_{-j} \bar{\beta}_l \lambda_{k-j-l}^0 = \sum_{j, l \in \mathbf{Z}} \alpha_j \bar{\beta}_l \lambda_{k+j-l}^0 = [T^k x, y]$$

et donc $\Lambda = \varphi_1 \cdot \Lambda^0 \cdot \varphi_2$.

Si maintenant Λ n'est pas cyclique, on peut trouver $\psi \in \mathscr{A}(\mathbf{T})$ non identiquement nulle, telle que $\psi\Lambda \in \mathrm{PF}_+$. Mais alors $\psi\varphi_1\varphi_2\Lambda^0 \in \mathrm{PF}^+$. L'ensemble des zéros de $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ est de mesure nulle, donc $\psi\varphi_1\varphi_2$ n'est pas identiquement nulle. Ceci prouve la proposition.

Cette proposition montre qu'on ne peut rien "gagner", dans le cas qui nous intéresse, en partant d'un couple (x_0, y_0) arbitraire et cherchant des points convenables x et y sous la forme de séries normalement convergentes des $T^k x_0$, $T^k y_0$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Nous allons maintenant nous intéresser à la structure de l'ensemble des $([T^k x, y])_{k\in\mathbf{Z}}$, dans $c_0(\mathbf{Z})$.

PROPOSITION 7. *Si T ne vérifie aucune* E.F.A., *pour chaque $y \neq 0$, l'ensemble $\{([T^k x, y])_{k\in\mathbf{Z}}, x \in E\}$ est dense dans $c_0(\mathbf{Z})$.*

Démonstration. Supposons au contraire que, pour un $y_0 \neq 0$, cet ensemble ne soit pas dense. Comme c'est un s.e.v. il est alors contenu dans un hyperplan fermé: on peut trouver une suite $(a_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ dans $\ell^1(\mathbf{Z})$ telle que

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} a_j[T^j x, y_0] = 0 \qquad \forall x \in E,$$

et donc

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} \bar{a}_j[T^{-j} y_0, x] = 0.$$

En posant $b_j = a_{-j}$, on obtient :

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} b_j[T^j y_0, x] = 0.$$

Si on pose $f(\theta) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} b_j e^{ij\theta}$, on obtient, d'après la proposition 2 $\langle\psi_m(f)(y_0), T^m x\rangle \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$, pour tout $x \in E$.

Mais on a vu (prop. 1) que si $\psi_m(f)y_0 \underset{m\to+\infty}{\not\to} 0$, on pouvait trouver x tel que $\langle\psi_m(f)y_0, T^m x\rangle \underset{m\to+\infty}{\not\to} 0$. Ceci prouve la proposition.

La caractérisation donnée par la proposition 1 permet d'obtenir du même coup des S.I.N.T. pour T^{-1}:

PROPOSITION 8. *Si T ne vérifie pas d'*E.F.A. *et si on peut trouver x_0 et y_0 tels que $([T^k x_0, y_0])_{k\in\mathbf{Z}}$ ne soit pas cyclique pour le shift usuel de $c_0(\mathbf{Z})$, alors T^{-1} a un* S.I.N.T..

Démonstration. Supposons que T^{-1} n'ait pas de S.I.N.T.. Soient $\mu = (\mu_k)_{k\in\mathbf{Z}} \in c_0(\mathbf{Z})$, et $\varepsilon > 0$. Soient $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 0$. Puisque $\{([T^k x, y_0])_{k\in\mathbf{Z}}, x \in E\}$ est dense dans $c_0(\mathbf{Z})$, on peut trouver $z_0 \in E$ tel que $\forall k \in \mathbf{Z}$: $|\mu_k - [T^k z_0, y_0]| < \varepsilon/2$.

Si T^{-1} n'a pas de S.I.N.T., on peut trouver des scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_N$ tels que

$$\|\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_N T^{-N} x_0 - z_0\| < \varepsilon/2\|y_0\| .$$

On a alors, $\forall j \geqslant 0$:

$$|[T^j(\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_N T^{-N} x_0),\ y_0] - [T^j z_0, y_0]| \leqslant$$

$$\leqslant \| T^j(\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_N T^{-N} x_0 - z_0)\| \, \|y_0\| \leqslant \varepsilon/2$$

et si $j \leqslant 0$:

$$|[T^j(\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_N T^{-N} x_0),\ y_0] - [T^j z_0, y_0]| =$$

$$= |[\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_N T^{-N} x_0, T^{-j} y_0] - [z_0, T^{-j} y_0]| \leqslant \varepsilon/2$$

et donc $\forall j \in \mathbf{Z}$,

$$|[T^j(\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_N T^{-N} x_0), y_0] - \mu_j| < \varepsilon$$

ou encore:

$$|\alpha_0 \lambda_j + \ldots + \alpha_N \lambda_{j-N} - \mu_j| < \varepsilon \qquad \forall j \in \mathbf{Z}$$

ce qui s'écrit

$$\Big\| \sum_{k=0}^{N} \alpha_k S^k \lambda - \mu \Big\|_{c_0(\mathbf{Z})} < \varepsilon$$

et prouve que λ est cyclique pour le shift S de $c_0(\mathbf{Z})$.

Il résulte de cette proposition que si T ne vérifie pas d'E.F.A. et si l'on trouve $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$ tels que $([T^k x_0, y_0])_{k \in \mathbf{Z}}$ ne soit pas cyclique pour S, on aura des S.I.N.T. pour T et T^{-1} (mais pas un sous-espace invariant à la fois pour T et T^{-1}; il ne s'agit pas de sous-espaces hyperinvariants).

La proposition qui suit, due à M. Rome, montre que Λ est en fait une fonction de $L^1(\mathbf{T})$ (voir aussi [11]):

PROPOSITION 9. *Si T est complètement non unitaire, pour tous $x, y \in E$, la suite des coefficients $(\lambda_k(x, y))_{k \in \mathbf{Z}}$ est dans $\mathscr{F}L^1$; Λ est donc une fonction de L^1, et on a dans L^1:*

$$\Lambda(\theta) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \lambda_k(x, y)\, e^{ik\theta} .$$

Démonstration. Comme Sz.-Nagy—Foiaş [10], notons R_*, $\mathscr{R}_*$ la partie $*$-résiduelle de la dilatation unitaire de T, $\mathscr{E}$ sa résolution spectrale, et u l'application canonique de E dans $\mathscr{R}_*$. Si T est complètement non unitaire, $\mathscr{E}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. On a donc:

$$\lambda_k(x, y) = \langle R_*^k u(x), u(y)\rangle = \int e^{ik\theta}\langle \mathscr{E}(d\theta)u(x), u(y)\rangle = \int e^{ik\theta}\varphi_{x,y}(\theta)d\theta,$$

où $\varphi_{x,y} \in L^1$.

Les coefficients $(\lambda_k)_{k\in \mathbf{Z}}$ s'interprètent donc comme les coefficients de Fourier d'une fonction de L^1, d'où la proposition.

Il ne semble pas que l'on connaisse de description des éléments non cycliques, dans $c_0(\mathbf{Z})$, pour le shift usuel (ou, ce qui revient au même, des pseudo-fonctions Λ telles qu'il existe $f \in \mathscr{A}$, non nulle avec $f\cdot\Lambda \in PF_+$). Si $\Lambda \in L^2$, une condition nécessaire est que Λ ne soit pas cyclique dans L^2, c'est-à-dire ou bien que Λ s'annule sur un ensemble de mesure positive, ou bien que $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Log}|\Lambda(\theta)|\, d\theta > -\infty$, voir par exemple H. Helson ([7], p. 21). Mais ce n'est pas nécessaire si Λ n'est pas dans L^2, et ce n'est suffisant en aucun cas. Nous ne pouvons donc donner qu'un certain nombre de cas particuliers.

Dans ce qui suit, nous supposons que T ne satisfait pas d'E.F.A. . Comme précédemment, nous notons $\lambda_k(x, y) = \lim_{m\to+\infty} \langle T^{k+m}x, T^m y\rangle$ et $\Lambda(x, y) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \lambda_k(x, y)e^{ik\theta}$. Dans chacun des cas suivants, T et T^{-1} ont des S.I.N.T. :

— S'il existe $x \neq 0$ et $y \neq 0$ tels que le support de la fonction $\Lambda(x, y)(\theta)$ ne soit pas le tore tout entier (il suffit de choisir $f \in \mathscr{A}$ à support contenu dans le complémentaire du support de Λ).

— S'il existe x et y tels que $\forall k < 0$, $\lambda_k(x, y) = 2^k$.

— S'il existe $x \neq 0$, $y \neq 0$, $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\forall k \in \mathbf{Z}$,

$$|\lambda_k(x, y)| \leqslant C/(1+\varepsilon)^{k}.$$

Montrons ce dernier point: la fonction $\tilde{\Lambda}(z) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \lambda_k z^k$ est analytique pour, $\frac{1}{1+\varepsilon} < |z| < 1+\varepsilon$; elle n'a qu'un nombre fini de zéros sur le cercle unité. On peut donc l'écrire: $\tilde{\Lambda}(z) = \prod_{l=1,\dots,L} (z - z_l)\, B(z)$, où B est analytique dans la même couronne et ne s'annule pas sur le cercle unité. Si on pose $h(\theta) = 1/B(e^{i\theta})$, $h \in \mathscr{A}(\mathbf{T})$, et donc

$$h(\theta)\Lambda(\theta) = \prod_{l=1,\dots,L} (e^{i\theta} - e^{i\theta_l}) \in \mathscr{A}_+ .$$

— S'il existe x, y tels que $\Lambda \in \mathscr{A}(\mathbf{T})$ et ne s'annule pas. En effet, dans ce cas $\frac{1}{\Lambda} \in \mathscr{A}$ (Wiener-Lévy) et $\frac{1}{\Lambda}\cdot\Lambda = 1 \in \mathscr{A}_+$.

BIBLIOGRAPHIE

1. ATZMON, A., Operators which are annihilated by analytic functions, *Acta Math.*, **144**(1980), 27–64.
2. BEAUZAMY, B., Sous -espaces invariants de type fonctionnel, *Acta Math.*, **144**(1980), 65–82.
3. BEAUZAMY, B., Une propriété de régularité pour les itérés inverses des contractions de classe $C_{1\cdot}$, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A.*, **290**(1980), 467–469.
4. BEAUZAMY, B., A weighted bilateral shift with no cyclic vector, *J. Operator Theory*, **4**(1980), 285–286.
5. BROWN, S.; CHEVREAU, B.; PEARCY, C., Contractions with rich spectrum have invariant subspaces, *J. Operator Theory*, **1**(1979), 123–136.
6. DOMAR, Y., Harmonic analysis based on certain commutative Banach algebras, *Acta Math.*, **96**(1956), 1–66.
7. HELSON, H., *Lectures on invariant subspaces*, Academic Press, New York, 1969.
8. HOFFMANN, K., *Banach spaces of analytic functions*, Prentice Hall, 1962.
9. KAHANE, J. P., *Séries de Fourier absolument convergentes*, Springer-Verlag, 1970.
10. SZ.-NAGY, B.; FOIAŞ, C., *Analyse harmonique des opérateurs sur l'espace de Hilbert*, Masson et Akademiai Kiado-Budapest, 1967.
11. ROME, M., Dilatations isométriques d'opérateurs et le problème des sous-espaces invariants, *J. Operator Theory*, **6**(1980), 39–50.
12. RUDIN, W., *Fourier analysis on groups*, Interscience Publishers, New York, 1962.

B. BEAUZAMY
Département de Mathématiques,
Université de Lyon 1,
43, bd du 11 novembre 1918,
69622 Villeurbanne Cedex,
France.

Received November 26, 1980; revised June 9, 1981.