J. OPERATOR THEORY
7(1982), 307–333

SUR LA NOTION DE VALEUR CARACTÉRISTIQUE

THIERRY FACK

INTRODUCTION

A tout opérateur compact k d'un espace hilbertien, on associe classiquement la suite $(\mu_n(k))_{n\in\mathbf{N}}$ de ses valeurs caractéristiques et on a:

$$(1) \qquad \prod_{i=0}^{n} \mu_i(uv) \leqslant \prod_{i=0}^{n} \mu_i(u) \prod_{i=0}^{n} \mu_i(v)$$

$$(2) \qquad \sum_{i=0}^{n} \mu_i(u+v) \leqslant \sum_{i=0}^{n} \mu_i(u) + \sum_{i=0}^{n} \mu_i(v)$$

cf. [16]). De ces deux inégalités découlent d'autres inégalités comme celles de Hölder et Minkowsky pour opérateurs, ou comme celle de Golden et Thompson (cf. [5], [14]).

L'objet de cet article est de démontrer (1) et (2) et d'en donner des applications, dans le cas d'une algèbre de von Neumann M, munie d'une trace normale semi-finie fidèle Trace_M .

Le paragraphe 1 définit pour tout réel $t \geqslant 0$ et tout $u \in M$ la "t-ième valeur caractéristique" $\mu_t(u)$ de u. Cette notion est dûe à F. J. Murray et J. von Neumann (cf. [10]) dans le cas des facteurs finis. Nous étudions en détail les propriétés de la fonction $u \mapsto \mu_t(u)$ puis nous donnons une caractérisation de certains idéaux de M (qui sont ceux des opérateurs de rang fini, à trace ou compacts quand $M = \mathscr{L}(\mathscr{H})$) à l'aide de la fonction t-ième valeur caractéristique.

Le paragraphe 2 est consacré à la généralisation de (1). Soit $\Lambda_t(k) = \exp\int_0^t \mathrm{Log}\,\mu_s(k)\,\mathrm{d}s$ le produit continu des "t premières" valeurs caractéristiques de k. Soit $\mathfrak{S}$ l'adhérence normique de l'idéal $\mathscr{R} = \{k \in M, \mathrm{Trace}_M(\mathrm{supp}k^*) < +\infty\}$. (Pour $M = \mathscr{L}(\mathscr{H})$) munie de sa trace usuelle, $\mathfrak{S}$ est l'idéal des opérateurs compacts.) Si $u, v \in \mathfrak{S}$, on a:

$$(1') \qquad \Lambda_t(uv) \leqslant \Lambda_t(u)\Lambda_t(v).$$

Le paragraphe 3 généralise l'inégalité (2): si $\Phi_t(k) = \int_0^t \mu_s(k)\,ds$ est la somme continue des "t premières" valeurs caractéristiques de k, on montre que l'application $k \mapsto \Phi_t(k)$ est une norme quand on la restreint à $\mathfrak{S}$.

Le paragraphe 4 démontre, pour u, $v \in \mathfrak{S}$, les inégalités:

$$\int_0^t f[\mu_s(u + v)]\,ds \leqslant \int_0^t f[\mu_s(u) + \mu_s(v)]\,ds \tag{3}$$

si $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ est continue, convexe et croissante,

$$\int_0^t g[\mu_s(uv)]\,ds \leqslant \int_0^t g[\mu_s(u)\mu_s(v)]\,ds \tag{4}$$

si $g : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ est continue croissante, et si $g \circ \exp$ est convexe dans $[-\infty, +\infty[$.

La démonstration repose sur l'analogue "continu" d'un lemme général élémentaire de H. Weyl [16] donnant des inégalités de convexité entre deux suites décroissantes de nombres réels. De (3) et (4), on déduit les inégalités de Minkowsky et Hölder pour opérateurs.

Les paragraphes 5 et 6 sont consacrés à la généralisation de l'inégalité de Golden et Thompson:

$$\mathrm{Trace}(\exp(u + v)) \leqslant \mathrm{Trace}(\exp u \exp v) \tag{5}$$

pour $u, v \in M_n(\mathbf{C})$, $u = u^*$, $v = v^*$ (cf. [5], [14]). Les travaux consacrés à cette question sont nombreux en raison de l'intérêt physique de (5). Soient H_1 l'énergie cinétique d'un système, H_2 son énergie potentielle et $H = H_1 + H_2$ son Hamiltonien; les quantités

$$E = -\,\Theta\ \mathrm{LogTrace}\left(\exp\left(-\frac{H}{\Theta}\right)\right)$$

et

$$E_{cl} = -\,\Theta\ \mathrm{LogTrace}\left(\exp\left(-\frac{H_1}{\Theta}\right)\exp\left(-\frac{H_2}{\Theta}\right)\right)$$

sont respectivement la fonction énergie libre de Helmholtz (cas quantique) et l'évaluation classique de cette quantité pour $\Theta = \Bbbk T$, $\Bbbk$ étant la constante de Boltzmann et T la température absolue. L'équation (5) implique l'inégalité importante:

$$E_{cl} \leqslant E$$

(cf. [5]).

La formule de Golden et Thompson a été successivement généralisée au cas des algèbres de von Neumann à trace par M. B. Ruskai [13] puis à celui des algèbres de von Neumann sans trace par H. Araki [1], la notion d'Hamiltonien relatif remplaçant alors celle de trace. D'un autre côté, A. Lenard [9] puis C. J. Thompson [15] ont montré la validité de la formule (5) pour d'autres fonctions que la trace (par exemple, pour toute norme matricielle unitairement invariante). A cet effet, ils introduisent un ordre partiel $\preccurlyeq$ sur $M_n(\mathbf{C})$ tel que:

$$\exp(u + v) \preccurlyeq \exp(u)\exp(v) \quad \text{pour } u, v \text{ hermitiens}$$

et montrent que certaines fonctions sont croissantes pour l'ordre $\preccurlyeq$. Reprenant cette idée, nous introduisons pour toute algèbre de von Neumann munie d'une trace un ordre $\preccurlyeq$ généralisant celui de Lénard et Thompson. Pour u, v convenablement choisis, on a:

$$\left[\exp\left(\frac{u}{2^p}\right)\exp\left(\frac{v}{2^p}\right)\right]^{2^p} \preccurlyeq \exp(u)\exp(v) \tag{6}$$

ce qui nous permet de démontrer la formule de Golden et Thompson pour les fonctions de la forme

$$k \mapsto \operatorname{Trace}(g(|k|))$$

où $g : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ est continue croissante, $g(0) = 0$ et $g \circ \exp$ est convexe dans $[-\infty, +\infty[$. En particulier, si $N_p(k) = \operatorname{Trace}(|k|^p)^{1/p}$ $(p > 0)$, on a:

$$N_k(\exp(u + v)) \leqslant N_k(\exp u \exp v) .$$

Si $\operatorname{Trace}_M(1) < +\infty$, on a

$$\exp(u + v) \preccurlyeq \exp(u)\exp(v) \tag{7}$$

et l'on démontre alors la formule de Golden et Thompson pour une vaste classe de fonctions considérée par A. Grothendieck dans [6].

1. FONCTION "t-IÈME VALEUR CARACTÉRISTIQUE"

Dans tout ce travail, on supposera donné un couple formé d'une algèbre de von Neumann M et d'une trace normale semi-finie fidèle sur M_+ , notée Trace_M. Notre point de vue sera de considérer le couple $(M, \operatorname{Trace}_M)$ comme l'analogue non commutatif d'un espace mesuré.

On notera P l'ensemble des projecteurs de M et, pour tout réel $t \geqslant 0$, P_t l'ensemble des $e \in P$ tels que $\operatorname{Trace}_M(1 - e) \leqslant t$.

1.1. Définition. Soient $u \in M$ et $t \geqslant 0$. On appelle *"t-ième valeur caractéristique de u"* le nombre

$$\mu_t(u) = \operatorname{Inf}\{\|ue\|, \ e \in P_t\} .$$

La fonction $t \mapsto \mu_t(u)$ est décroissante, positive, et vérifie $\mu_0(u) = \|u\|$. De plus, $\mu_t(\lambda u) = |\lambda|\mu_t(u)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$. La définition 1.1 ne suppose pas que M est représentée dans un espace de Hilbert. Cependant, si M opère dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$, on a la formule du minimax:

$$\mu_t(u) = \operatorname*{Inf}_{e \in P_t} \Big(\operatorname*{Sup}_{\xi \in e(\mathscr{H}),\ \|\xi\|=1} \|u\xi\| \Big).$$

1.2. Exemples

1.2.1. Soient $M = L^\infty(\Omega, \nu)$ l'algèbre des fonctions mesurables bornées sur l'espace mesuré (Ω, ν) et $\mathrm{Trace}_M(u) = \int_\Omega u \, d\nu$. On a:

$$\mu_t(u) = \mathrm{Inf}\{s \geqslant 0,\ \nu(\{\omega \in \Omega,\ |u|(\omega) > s\}) \leqslant t\}$$

de sorte que l'application $t \mapsto \mu_t(u)$ n'est pas autre chose que le réarrangement décroissant de la fonction $|u|$ (cf. [12]).

1.2.2. Soit $M = \mathscr{L}(\mathscr{H})$ l'algèbre des endomorphismes d'un espace hilbertien $\mathscr{H}$, munie de la trace valant 1 sur les projecteurs de rang 1. Notons $\mathscr{H}_n$ l'ensemble (éventuellement vide) des sous-espaces fermés de codimension n de $\mathscr{H}$. Pour $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ on a

$$\mu_n(u) = \begin{cases} \operatorname*{Inf}_{H \in \mathscr{H}_n} \Big(\operatorname*{Sup}_{\xi \in H,\ \|\xi\|=1} \|u\xi\| \Big) & \text{si } n < \dim \mathscr{H}, \\ 0 & \text{si } n \geqslant \dim \mathscr{H} \end{cases}$$

et

$$\mu_t(u) = \mu_n(u) \quad \text{si } n \leqslant t < n+1.$$

La fonction $t \mapsto \mu_t(u)$ est une fonction en escalier qui est alors entièrement déterminée par la suite $(\mu_n(u))_{n \in \mathbf{N}}$ des valeurs caractéristiques de u au sens de H. Weyl.

1.3. Proposition. *Soient $u \in M$ et $t \geqslant 0$. Soit $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \mathbf{R}_+}$ l'unique résolution de l'identité continue à droite telle que $|u| = \int_0^{+\infty} \lambda \, de_\lambda$.*

Alors:

$$\mu_t(u) = \mathrm{Min}\{\lambda \geqslant 0,\ \mathrm{Trace}_M(1 - e_\lambda) \leqslant t\}.$$

Preuve. On peut supposer que M opère dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Posons $\nu_t(u) = \mathrm{Inf}\{\lambda \geqslant 0,\ \mathrm{Trace}_M(1 - e_\lambda) \leqslant t\}$; la borne inférieure est atteinte puisque Trace_M est normale. Puisque $u^*u = \int_0^{+\infty} \lambda \, de_{\sqrt{\lambda}}$, on a $\nu_t(u^*u) = \nu_t(u)^2$, et il suffit de prouver que

$$\nu_t(u^*u) = \operatorname*{Inf}_{e\in P_t} [\operatorname*{Sup}_{\xi\in e(\mathscr{H}),\ \|\xi\|=1} (u^*u\xi|\xi)],$$

ou encore que $\nu_t(u)$ est égal à

$$\beta_t(u) = \operatorname*{Inf}_{e\in P_t} [\operatorname*{Sup}_{\xi\in e(\mathscr{H}),\ \|\xi\|=1} (u\xi|\xi)]$$

pour tout $u \geqslant 0$. Posons $e = e_{\nu_t(u)}$. Alors $e \in P_t$ et $e_\lambda\xi = \xi$ pour $\xi \in e(\mathscr{H})$ et $\lambda \geqslant \nu_t(u)$, de sorte que:

$$(u\xi|\xi) = \int_0^{\nu_t(u)} \lambda \, \mathrm{d}(e_\lambda\xi|\xi) \leqslant \nu_t(u)\|\xi\|^2.$$

Ceci prouve que $\beta_t(u) \leqslant \nu_t(u)$. Si $\beta_t(u) \neq \nu_t(u)$, il existerait $e \in P_t$ tel que

$$\operatorname*{Sup}_{\xi\in e(\mathscr{H}),\ \|\xi\|=1} (u\xi|\xi) = \alpha < \nu_t(u).$$

Soit $\lambda \geqslant 0$ tel que $\alpha < \lambda < \nu_t(u)$. On aurait

$$\mathrm{Trace}_M(1 - e) \leqslant t < \mathrm{Trace}_M(1 - e_\lambda)$$

et une démonstration analogue à celle de [10] (lemme 14.22, p. 210) prouverait l'existence d'un vecteur $\xi \in (1 - e_\lambda)(\mathscr{H}) \cap e(\mathscr{H})$, $\|\xi\| = 1$. Alors $e_\mu\xi = 0$ pour $\mu \leqslant \lambda$, d'où

$$(u\xi|\xi) = \int_\lambda^{\|u\|} \mu \, \mathrm{d}(e_\mu\xi|\xi) \geqslant \lambda\|\xi\|^2 = \lambda$$

et on aurait $\alpha \geqslant \lambda$, ce qui est absurde. Q.E.D.

1.4. Remarques

1.4.1. Pour $u \geqslant 0$, il résulte de la démonstration ci-dessus que:

$$\mu_t(u) = \operatorname*{Inf}_{e\in P_t} [\operatorname*{Sup}_{\xi\in e(\mathscr{H}),\ \|\xi\|=1} (u\xi|\xi)].$$

Cela implique en particulier la croissance de la fonction $u \mapsto \mu_t(u)$ sur M_+.

1.4.2. De la formule $\mu_t(u) = \mathrm{Min}\{\lambda \geqslant 0,\ \mathrm{Trace}_M(1 - e_\lambda) \leqslant t\}$, il résulte immédiatement que la fonction $t \mapsto \mu_t(u)$ est continue à droite pour $u \in M$.

Nous allons maintenant étudier le comportement de la fonction $u \mapsto \mu_t(u)$ vis-à-vis des différentes opérations sur M, en commençant par celle de réduction par un projecteur. Si $e \in P$, on note Trace_{M_e} la trace induite sur M_e par Trace_M.

1.5. PROPOSITION. *Soit e un projecteur de M. On note μ_t^e la fonction "t-ième valeur caractéristique" relative à $Trace_{M_e}$.*

(i) *Pour tout $u \in M_+$ et tout réel $t \geqslant 0$, on a*

$$\mu_t^e(u_e) \leqslant \mu_t(u) .$$

(ii) *Soit $u \in M_+$ un élément commutant à e et vérifiant $u_e \geqslant \|u_{1-e}\|e$. Alors, on a*

$$\mu_t(u) = \mu_t^e(u_e) \quad \textit{pour tout réel } t \in [0, \mathrm{Trace}_M(e)[.$$

(iii) *Soit $u \in M_+$. On suppose que* $\mathrm{Supp}(u) \leqslant e$. *Alors, on a*

$$\mu_t(u) = \mu_t^e(u_e) \quad \textit{pour tout réel } t \in [0, \mathrm{Trace}_M(e)[.$$

Preuve. Notons P_t^e l'ensemble des projecteurs $f \in M_e$ tels que $\mathrm{Trace}_M(e - f) \leqslant t$.

(i) Soit $f \in P_t$. Alors $e_1 = e \wedge f$ appartient à P_t^e car $e - e \wedge f$ est équivalent à $e \vee f - f$, lequel est majoré par $1 - f$. De plus:

$$\operatorname*{Sup}_{\xi \in e_1(\mathscr{H}), \|\xi\|=1} \|eue\xi\| \leqslant \operatorname*{Sup}_{\xi \in f(\mathscr{H}), \|\xi\|=1} \|u\xi\| ,$$

donc

$$\mu_t^e(u_e) \leqslant \mu_t(u) .$$

(ii) Le (i) montre que $\mu_t^e(u_e) \leqslant \mu_t(u)$. Soient $\varepsilon > 0$ et $p \in P_t^e$ tels que $\mu_t^e(u_e) + \varepsilon \geqslant \|u_e p\|$. Soit $f = p + 1 - e$. On a $f \in P_t$ et, pour

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 \in f(\mathscr{H}), \quad \xi_1 \in p(\mathscr{H}), \quad \xi_2 \in (1 - e)(\mathscr{H}),$$

on a:

$$(u\xi|\xi) = (u\xi_1|\xi_1) + (u\xi_2|\xi_2) .$$

On a

$$(u\xi_1|\xi_1) \leqslant \|eup\| \, \|\xi_1\|^2 \leqslant (\mu_t^e(u_e) + \varepsilon)\|\xi_1\|^2$$

car $\xi_1 \in p(\mathscr{H})$. L'hypothèse (ii) implique que $\mu_t^e(u_e) \geqslant \|u_{1-e}\|$ pour $0 \leqslant t < \mathrm{Trace}_M(e)$ donc que $(u\xi_2|\xi_2) \leqslant \mu_t^e(u_e)\|\xi_2\|^2$. Il s'ensuit que

$$(u\xi|\xi) \leqslant (\mu_t^e(u_e) + \varepsilon)\|\xi\|^2$$

pour tout $\xi \in f(\mathscr{H})$ et

$$\mu_t(u) \leqslant \mu_t^e(u_e) + \varepsilon$$

pour $0 \leqslant t < \mathrm{Trace}_M(e)$, d'où le résultat.

(iii) Résulte trivialement de (ii). Q.E.D.

1.6. PROPOSITION.

(i) *Soient $u \in M$ et $t \geqslant 0$. Alors,*

$$\mu_t(u) = \mu_t(|u|) = \mu_t(u^*) .$$

(ii) *Soient* $u \in M_+$ *et* $t \geqslant 0$. *Alors,*

$$\mu_t(f(u)) = f(\mu_t(u))$$

pour toute fonction croissante continue $f : [0, \|u\|] \to \mathbf{R}_+$ *telle que* $f(0) = 0$.

(iii) *Soient* $u, v \in M$ *et* $s, t \geqslant 0$. *Alors,*

$$\mu_{t+s}(u + v) \leqslant \mu_t(u) + \mu_s(v),$$

$$|\mu_t(u) - \mu_t(v)| \leqslant \|u - v\|.$$

(iv) *Soient* $u, v \in M$ *et* $s, t \geqslant 0$. *Alors,*

$$\mu_{t+s}(uv) \leqslant \mu_t(u)\mu_s(v).$$

Preuve. (i) On peut supposer que M opère dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Comme $\|u\xi\| = \||u|\xi\|$ pour tout $\xi \in \mathscr{H}$, on a $\mu_t(u) = \mu_t(|u|)$. Soit e_1 (resp. e_2) le support de $|u|$ (resp. $|u^*|$). Si $u = v|u|$ est la décomposition polaire de u, l'application $x \mapsto vxv^*$ est un isomorphisme de M_{e_1} sur M_{e_2} qui échange les traces induites et transforme $|u|_{e_1}$ en $|u^*|_{e_2}$. On a donc

$$\mu_t^{e_1}(|u|_{e_1}) = \mu_t^{e_2}(|u^*|_{e_2}) \quad \text{d'où} \quad \mu_t(u) = \mu_t(|u|) = \mu_t(|u^*|) = \mu_t(u^*)$$

en vertu de la proposition 1.5 (iii).

(ii) Si $u = \int_0^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}e_\lambda$ et $f(u) = \int_0^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}p_\lambda$ sont les décompositions spectrales de u et $f(u)$, on a $e_\lambda = \mathbf{1}_{]-\infty,\lambda]}(u) = \mathbf{1}_{]-\infty, f(\lambda)]}(f(u)) = p_{f(\lambda)}$. L'assertion (ii) résulte immédiatement de cette remarque et de 1.3.

(iii) Soient $\alpha > \mu_t(u)$ (resp. $\beta > \mu_s(v)$), $e_1 \in P_t$ (resp. $e_2 \in P_s$) tels que $\|u\xi\| \leqslant \alpha\|\xi\|$ (resp. $\|v\xi\| \leqslant \beta\|\xi\|$) pour tout $\xi \in e_1(\mathscr{H})$ (resp. $\xi \in e_2(\mathscr{H})$). Alors $e_1 \wedge e_2 \in P_{s+t}$ car

$$\mathrm{Trace}_M(1 - e_1 \wedge e_2) = \mathrm{Trace}_M((1 - e_1) \vee (1 - e_2)) \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{Trace}_M(1 - e_1) + \mathrm{Trace}_M(1 - e_2).$$

D'autre part, pour $\xi \in (e_1 \wedge e_2)(\mathscr{H})$, on a:

$$\|(u + v)\xi\| \leqslant (\alpha + \beta)\|\xi\|,$$

de sorte que $\mu_{t+s}(u + v) \leqslant \alpha + \beta$ et donc $\mu_{t+s}(u + v) \leqslant \mu_t(u) + \mu_s(v)$. En faisant $s = 0$, il vient $\mu_t(u + v) \leqslant \mu_t(u) + \|v\|$, d'où la deuxième inégalité.

(iv) Soient α, β, $e_1 \in P_t$ et $e_2 \in P_s$ comme dans la démonstration de (iii). Posons

$$p = e_2 \wedge [1 - \mathrm{Supp}((1 - e_1)v)].$$

On a:

$$\mathrm{Trace}_M(1 - p) \leqslant \mathrm{Trace}_M(1 - e_2) + \mathrm{Trace}_M(\mathrm{Supp}((1 - e_1)v))$$

d'où $\mathrm{Trace}_M(1 - p) \leqslant t + s$, car $\mathrm{Supp}((1 - e_1)v)$ est équivalent à $\mathrm{Supp}(v^*(1 - e_1)) \leqslant$ $\leqslant 1 - e_1$. Par ailleurs, pour $\xi \in p(\mathscr{H})$, on a $\|v\xi\| \leqslant \beta\|\xi\|$ et, puisque ξ est orthogonal à l'image de $v^*(1 - e_1)$, $v\xi \in e_1(\mathscr{H})$ et $\|uv\xi\| \leqslant \alpha\|v\xi\| \leqslant \alpha\beta\|\xi\|$. On en déduit

$$\mu_{t+s}(uv) \leqslant \alpha\beta,$$

donc

$$\mu_{t+s}(uv) \leqslant \mu_t(u)\mu_s(v) \qquad \text{Q.E.D.}$$

1.7. Corollaire. (i) *Soient $u \in M_+$ et e, f deux projecteurs orthogonaux de M, de somme 1. Pour $s, t \geqslant 0$, on a:*

$$\mu_{t+s}(u) \leqslant \mu_t(eue) + \mu_s(fuf).$$

(ii) *Soient $u, v \in M$. Pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $\mu_t(uv) \leqslant \|u\|\mu_t(v)$ et $\mu_t(uv) \leqslant$ $\leqslant \|v\|\mu_t(u)$. En particulier, $\mu_t(uv) = \mu_t(v)$ si u est unitaire.*

Preuve. (i) Posons $u' = eu^{1/2}$. On a $\mu_t(u'u'^*) = \mu_t(u'^*u')$, donc $\mu_t(eue) =$ $= \mu_t(u^{1/2}eu^{1/2})$ pour tout réel $t \geqslant 0$.

D'après 1.6 (iii), on a:

$$\mu_{t+s}(u) \leqslant \mu_t(u^{1/2}eu^{1/2}) + \mu_s(u^{1/2}fu^{1/2}) =$$

$$= \mu_t(eue) + \mu_s(fuf).$$

(ii) Résulte immédiatement de 1.6 (iv). Q.E.D.

1.8. Les idéaux $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$ et $\mathfrak{S}$. Soit $\mathscr{L}$ l'idéal engendré par $\mathscr{L}_+ = \{k \in M_+,$ $\mathrm{Trace}_M(k) < +\infty\}$. Les projecteurs de $\mathscr{L}$ engendrent un idéal $\mathscr{R}$ qui est exactement l'ensemble des $k \in M$ tels que

$$\mathrm{Trace}_M(\mathrm{Supp}\, k^*) < +\infty.$$

Notons $\mathfrak{S}$ l'adhérence normique de $\mathscr{R}$. Les résultats suivants sont bien connus (cf. [3], p. 14, exercice 6):

(i) $\mathscr{R} \subset \mathscr{L} \subset \mathfrak{S}$,

(ii) $\mathscr{R}$ est le plus petit idéal bilatère de M dont l'adhérence uniforme est $\mathfrak{S}$.

Si M est un facteur, $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$ et $\mathfrak{S}$ ne dépendent pas du choix de la trace et sont respectivement l'idéal des éléments de rang fini, l'idéal des éléments à trace et l'idéal des éléments compacts de M. Pour l'algèbre $M = \mathscr{L}(\mathscr{H})$, on retrouve les notions classiques d'opérateurs de rang fini, à trace ou compact. Si M n'est pas un facteur, alors $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$ et $\mathfrak{S}$ dépendent du choix d'une trace. Ainsi, pour $M = L^\infty(\Omega, \nu)$ et

$\mathrm{Trace}_M(u) = \int_\Omega u\,\mathrm{d}\nu$, on a:

$\mathscr{R} = \{k \in L^\infty(\Omega, \nu),\ k$ est à support ν-intégrable$\}$,

$\mathscr{L} = L^\infty(\Omega, \nu) \cap L^1(\Omega, \nu)$,

$\mathfrak{S} = \{k \in L^\infty(\Omega, \nu),\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists A_\varepsilon\ \nu$-intégrable$)$ tel que $|k| \leqslant \varepsilon$ ν-p.p. sur $\Omega \setminus A_\varepsilon\}$.

Donnons maintenant une caractérisation de $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$ et $\mathfrak{S}$ au moyen des fonctions $t \mapsto \mu_t(k)$.

1.9. Proposition. *Soit $k \in M$. Alors, on a:*

(i) *$k \in \mathscr{R} \Leftrightarrow t \mapsto \mu_t(k)$ est à support borné.*

(ii) *$k \in \mathfrak{S} \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} \mu_t(k) = 0$.*

Preuve. (i) Pour $t \geqslant 0$, on a:

$$\mu_t(k) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Trace}_M(1 - e_0) \leqslant t.$$

Comme $1 - e_0 = \mathrm{Supp}(k)$, l'assertion (i) est immédiate.

(ii) Si $k \in \mathfrak{S}$, on a $\lim\limits_{t\to\infty} \mu_t(k) = 0$ en vertu de (i) et de 1.6 (iii). Réciproquement, supposons que $\lim\limits_{t\to\infty} \mu_t(k) = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $t \geqslant 0$ tel que $\mu_t(k) < \varepsilon$. Soit $e_\varepsilon \in P_t$ tel que $\|ke_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$ et posons $k_\varepsilon = k(1 - e_\varepsilon)$. On a $\mathrm{Supp}(k_\varepsilon) \leqslant 1 - e_\varepsilon$ et $\mathrm{Trace}_M(1 - e_\varepsilon) \leqslant t$, donc $k_\varepsilon \in \mathscr{R}$. Comme $\|k - k_\varepsilon\| = \|ke_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$, on a $k \in \mathfrak{S}$. Q.E.D.

1.10. Lemme. *Soient $k \in \mathfrak{S}_+$ et $f :]0, \|k\|] \to \mathbf{C}$ une fonction borélienne bornée à support compact dans $]0, \|k\|]$. Alors: $f(k) \in \mathscr{R}$, la fonction $t \mapsto f(\mu_t(k))$ est borélienne bornée, à support compact sur $\mathbf{R}_+$, et on a:*

$$\mathrm{Trace}_M(f(k)) = \int_0^{+\infty} f(\mu_t(k))\,\mathrm{d}t.$$

Preuve. On peut supposer que f est positive. Soit $\delta > 0$ tel que $\mathrm{Supp}(f) \subset [\delta, \|k\|]$. Si $k = \int_0^{+\infty} \lambda\,\mathrm{d}e_\lambda$ est la décomposition spectrale de k, on a:

$$f(k) \leqslant \|f\|_\infty (1 - e_\delta).$$

Or il existe $t > 0$ tel que $\mu_t(k) < \delta$ (proposition 1.9 (ii)), donc $\mathrm{Trace}_M(1 - e_\delta) \leqslant t < +\infty$. Il s'ensuit que $f(k) \in \mathscr{R}$. Il est clair par ailleurs que la fonction $t \mapsto f(\mu_t(k))$ est borélienne bornée à support compact. Soit ν_1 la mesure sur $]0, \|k\|]$, image de la mesure de Lebesgue par l'application $t \mapsto \mu_t(k)$. Soit ν_2 la mesure sur $]0, \|k\|]$

définie par $\nu_2(f) = \mathrm{Trace}_M(f(k))$ pour f continue à support compact sur $]0, \|k\|]$. Il nous suffit, pour démontrer notre lemme, de prouver que $\nu_1 = \nu_2$. Or, pour tout $a > 0$, on a:

$$\nu_2(]a, \|k\|]) = \mathrm{Trace}_M(1 - e_a) =$$

$$= \mathrm{mesure}\{t > 0,\ \mathrm{Trace}_M(1 - e_a) > t\} =$$

$$= \mathrm{mesure}\{t > 0,\ \mu_t(k) > a\} = \nu_1(]a, \|k\|]),$$

d'où $\nu_1 = \nu_2$ et, finalement:

$$\mathrm{Trace}_M(f(k)) = \int_0^{+\infty} f(\mu_t(k))\,\mathrm{d}t. \qquad \text{Q.E.D.}$$

1.11. Proposition. *Soit $k \in M$. Alors, on a:*

$k \in \mathscr{L} \Leftrightarrow t \mapsto \mu_t(k)$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}_+$.

De plus, si $k \in \mathscr{L}_+$, on a:

$$\mathrm{Trace}_M(k) = \int_0^{+\infty} \mu_t(k)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve. On peut supposer, sans perte de généralité, que $k \in \mathfrak{S}_+$. Pour tout entier $n > \|k\|$, posons

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t < \dfrac{1}{n} \\ t & \text{si } \dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant \|k\|. \end{cases}$$

Alors $\mathrm{Trace}_M(f_n(k)) = \int_0^{+\infty} f_n(\mu_t(k))\,\mathrm{d}t$ d'après le lemme 1.10 d'où, en utilisant la normalité de la trace:

$$\mathrm{Trace}_M(k) = \int_0^{+\infty} \mu_t(k)\,\mathrm{d}t.$$

Le reste est alors immédiat. Q.E.D.

1.12. REMARQUE. Soient $p \in [1, +\infty[$, $k \in M$ et posons

$$N_p(k) = \left(\int_0^{+\infty} \mu_t(k)^p \, dt \right)^{1/p} \in [0, +\infty].$$

Si $p = +\infty$, nous noterons $N_\infty(k) = \mu_0(k) = \|k\|$. Pour $p < +\infty$, on a $\mu_t(k)^p = \mu_t(|k|^p)$ pour tout réel $t \geqslant 0$ et il résulte de la proposition 1.11 que:

$$N_p(k) < +\infty \Leftrightarrow |k|^p \in \mathscr{L}.$$

De plus, on a alors

$$N_p(k) = \mathrm{Trace}_M(|k|^p)^{1/p}.$$

Si $|k|^p \notin \mathscr{L}$, alors $\mathrm{Trace}_M(|k|^p) = +\infty$, de sorte que l'égalité ci-dessus est valable sans restriction.

Nous aurons besoin dans ce qui suit du lemme technique suivant:

1.13. LEMME. *Soient $k \in \mathfrak{S}_+$ et $t > 0$. On suppose que $\mu_s(k) > 0$ pour $s < t$. Alors, il existe un projecteur $e \in M$, $\mathrm{Trace}_M(e) \leqslant t$, qui commute à k et vérifie $\mu_s^e(k_e) = \mu_s(k)$ pour $0 \leqslant s < t$. De plus, si l'algèbre M est diffuse (i.e. sans projecteurs minimaux), on peut choisir e tel que $\mathrm{Trace}_M(e) = t$.*

Preuve. On a (proposition 1.5 (i)) $\mu_s^e(k_e) \leqslant \mu_s(k)$ pour $e \in P$ et $s > 0$. Soit $k = \int_0^{+\infty} \lambda \, de_\lambda$ la décomposition spectrale de k. Deux cas sont à envisager:

1^er^ CAS: $\mu_t(k) = 0$.
Alors $\mathrm{Trace}_M(1 - e_0) \leqslant t$ et on ne peut pas avoir $\mathrm{Trace}_M(1 - e_0) < t$, car sinon on aurait $\mathrm{Trace}_M(1 - e_0) \leqslant t - \varepsilon$ pour $\varepsilon = t - \mathrm{Trace}_M(1 - e_0)$, d'où $\mu_{t-\varepsilon}(k) = \mu_t(k) = 0$, ce qui est absurde.

Posons $e = 1 - e_0 = \mathrm{Supp}(k)$. D'après 1.5 (iii), on a:

$$\mu_s^e(k_e) = \mu_s(k) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant s < t.$$

2^ème^ CAS: $\mu_t(k) > 0$.
Posons $\lambda_0 = \mu_t(k)$. On a $1 - e_{\lambda_0} \leqslant 1 - e_{\lambda_0^-}$, $\mathrm{Trace}_M(1 - e_{\lambda_0}) \leqslant t$ et

$$\mathrm{Trace}_M(1 - e_{\lambda_0^-}) = \mathrm{Trace}_M(\mathbf{1}_{[\lambda_0, \|k\|]}(k)) =$$
$$= \mathrm{mesure}\{s > 0,\ \mu_s(k) \geqslant \lambda_0\} \geqslant t.$$

Si M est diffuse, il existe un projecteur $e \in M$ tel que $1 - e_{\lambda_0} \leqslant e \leqslant 1 - e_{\lambda_0^-}$ et $\mathrm{Trace}_M(e) = t$; sinon on pose $e = 1 - e_{\lambda_0^-}$. Dans tous les cas, e commute à k et il résulte facilement de 1.5 (ii) que $\mu_s(k) = \mu_s^e(k_e)$ pour tout réel s tel que $0 \leqslant s < t$.

Q.E.D.

2. LES INÉGALITÉS DE WEYL

2.1. Définition. Soit $k \in \mathfrak{S}$. Pour tout réel $t > 0$, on note $\int_0^t \operatorname{Log}\mu_s(k)\,ds$ l'intégrale inférieure (au sens de Daniell) de la fonction $s \mapsto \operatorname{Log}\mu_s(k)$ sur $[0, t]$, et on pose

$$\Lambda_t(k) = \exp \int_0^t \operatorname{Log}\mu_s(k)\,ds.$$

Comme la fonction $s \mapsto \operatorname{Log}\mu_s(k)$ est majorée par $\operatorname{Log}\|k\|$ sur $\mathbf{R}_+$, on a $0 \leqslant \Lambda_t(k) < +\infty$ pour tout réel $t > 0$. De plus, $\Lambda_t(k)$ est strictement positif si et seulement si la fonction $s \mapsto \operatorname{Log}\mu_s(k)$ est intégrable sur $[0, t]$. Notons que, pour $k \geqslant 0$, on a $\Lambda_t(k^n) = \Lambda_t(k)^n$ pour tout entier n en vertu de 1.6 (ii).

2.2. Exemples.

2.2.1. Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et munissons $M = \mathscr{L}(\mathscr{H})$ de sa trace usuelle. On a:

$$\Lambda_{n+1}(k) = \mu_0(k)\mu_1(k) \ldots \mu_n(k)$$

pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout opérateur compact k de $\mathscr{H}$.

2.2.2. Supposons que $\operatorname{Trace}_M(1) = 1$. Pour tout opérateur inversible k de M, on a en appliquant 1.10, sachant que $\mu_s(k)$ est minorée par une constante strictement positive sur $[0, 1[$:

$$\Lambda_1(k) = \exp[\operatorname{Trace}_M(\operatorname{Log}|k|)] = \Delta(k)$$

où Δ est la fonction déterminant associée à Trace_M (cf. [3], chap. I, §6, n° 11). Si $k \in M_+$, les fonctions $f_n(s) = \operatorname{Log}\mu_s\left(k + \frac{1}{n} I\right)$ forment une famille décroissante d'applications de $[0, 1]$ dans $\overline{\mathbf{R}}$, intégrables, de borne inférieure la fonction $s \mapsto \operatorname{Log}\mu_s(k)$, de sorte que

$$\int_0^1 \operatorname{Log}\mu_s(k)\,ds = \inf_n \int_0^1 \operatorname{Log}\mu_s\left(k + \frac{1}{n} I\right) ds,$$

d'où $\Lambda_1(k) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Lambda_1(k + \varepsilon I)$.

Il s'ensuit que Λ_1 coïncide avec l'extension analytique de Δ sur M considérée par B. Fuglede et R. V. Kadison dans [4] (p. 526). Notons que l'on a alors

$$(\forall u, v \in M) \quad \Lambda_1(uv) = \Lambda_1(u)\Lambda_1(v).$$

Plus généralement, si $\operatorname{Trace}_M(1) = t < +\infty$, on a:

$$(\forall u, v \in M) \quad \Lambda_t(uv) = \Lambda_t(u)\Lambda_t(v).$$

2.3. THÉORÈME. *Soient $u, v \in \mathfrak{S}$. Alors, on a:*

$$\Lambda_t(uv) \leqslant \Lambda_t(u)\Lambda_t(v) \quad \textit{pour tout réel } t > 0.$$

Dans le cas considéré en 2.2.1, le théorème ci-dessus redonne les inégalités de Weyl:

$$(\forall n \in \mathbf{N}) \qquad \prod_{i=0}^{n-1} \mu_i(uv) \leqslant \prod_{i=0}^{n-1} \mu_i(u) \prod_{i=0}^{n-1} \mu_i(v) .$$

La méthode classiquement utilisée (cf. [16]) pour démontrer ces inégalités consiste à introduire pour $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, la puissance extérieure $\bar{\Lambda}^n u$ (cf. [2], chap. V, §3, n° 4), et à vérifier que:

$$\|\bar{\Lambda}^n u\| = \mu_0(u)\mu_1(u) \ldots \mu_{n-1}(u)$$

$$\bar{\Lambda}^n(uv) = \bar{\Lambda}^n(u)\bar{\Lambda}^n(v) .$$

Cette méthode ne s'applique plus ici, en raison de la difficulté à définir la puissance extérieure t-ième d'un endomorphisme pour t réel positif. En fait, la démonstration de 2.3 résulte de la multiplicativité de la fonction $u \mapsto \Lambda_t(u)$ pour $\mathrm{Trace}_M(1) = t < +\infty$ et du lemme ci-dessous.

2.4. LEMME. *Soient M une algèbre de von Neumann diffuse, $k \in \mathfrak{S}_+$ et $t \in]0, \mathrm{Trace}_M(1)[$. Alors on a:*

$$\Lambda_t(k) = \mathrm{Sup}\{\Lambda_t^e(k_e),\ e \in P,\ [e, k] = 0 \textit{ et } \mathrm{Trace}_M(e) = t\} =$$

$$= \mathrm{Sup}\{\Lambda_t^e(k_e),\ e \in P\}$$

où Λ_t^e est relative à Trace_{M_e}.

Preuve. Comme $\mu_s^e(k_e) \leqslant \mu_s(k)$ pour tout $e \in P$ et tout $s \in \mathbf{R}_+$, on a par intégration de 0 à t:

$$\Lambda_t^e(k_e) \leqslant \Lambda_t(k)$$

et donc

$$\mathrm{Sup}\{\Lambda_t^e(k_e),\ e \in P\} \leqslant \Lambda_t(k) .$$

Si $\Lambda_t(k) = 0$, tout est trivial. On peut donc supposer que $\Lambda_t(k) \neq 0$, i.e. que $s \mapsto \mathrm{Log}\mu_s(k)$ est intégrable sur $[0, t]$. Ceci implique que $\mu_s(k) > 0$ pour $s < t$ et il existe d'après le lemme 1.13 un projecteur $e \in M$, commutant à k, tel que $\mathrm{Trace}_M(e) = t$ et $\mu_s^e(k_e) = \mu_s(k)$ pour $0 \leqslant s \leqslant t$. On en déduit

$$\Lambda_t(k) \leqslant \mathrm{Sup}\{\Lambda_t^e(k_e),\ e \in P,\ [e, k] = 0 \text{ et } \mathrm{Trace}_M(e) = t\}.$$

Q.E.D

2.5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.3. Quitte à remplacer M par $M \otimes L^\infty([0, 1], dt)$ et Trace_M par son produit tensoriel avec la trace de $L^\infty([0, 1], dt)$ donnée par $\mathrm{Trace}(k) = \int_0^1 k(t)\, dt$, on peut supposer que M est diffuse. Cela résulte du fait que $\mu_t(k \otimes 1) = \mu_t(k)$ pour $k \in \mathfrak{S}$ et $t \geqslant 0$, comme le montre un calcul facile.

Soient $u = x|u|$ et $v = y|v|$ les décompositions polaires de u et v. Soit e un projecteur de M tel que $\mathrm{Trace}_M(e) = t$. Posons $f = \mathrm{Supp}(ev^*)$. Comme f est équivalent au support de ve, lequel est majoré par e, il existe une isométrie partielle $w \in M$ telle que

$$w^* w = f, \quad w w^* \leqslant e.$$

On a:

$$(|uv|^2)_e = (|v| y^* |u|^2 y |v|)_e =$$

$$= (e|v| y^* w^* e)_e (ew|u|^2 w^* e)_e (ewy|v|e)_e$$

(car $fve = ve$, $ev^* f = ev^*$ et $ww^* \leqslant e$). Comme $\mathrm{Trace}_M(e) = t < +\infty$, la multiplicativité de la fonction $k \mapsto \Lambda_t^e(k)$ sur M_e implique:

$$\Lambda_t^e((|uv|^2)_e) = \Lambda_t^e((e|v|y^* w^* e)_e) \Lambda_t^e((ew|u|^2 w^* e)_e) \Lambda_t^e((ewy|v|e)_e) =$$

$$= \Lambda_t^e((e|v|y^* w^* ewy|v|e)_e) \Lambda_t^e((w|u|^2 w^*)_e) =$$

$$= \Lambda_t^e((|v|^2)_e) \Lambda_t^e((w|u|^2 w^*)_e)$$

car $e|v|y^* w^* ewy|v|e = e|v|y^* fy|v|e = ev^* fve = e|v|^2 e$. D'après le lemme 2.4, on a:

$$\Lambda_t^e((|uv|^2)_e) \leqslant \Lambda_t(|v|^2) \Lambda_t(w|u|(w|u|)^*) =$$

$$= \Lambda_t(|v|^2) \Lambda_t(|u| w^* w |u|) \leqslant$$

$$\leqslant \Lambda_t(|v|^2) \Lambda_t(|u|^2) .$$

Il s'ensuit (lemme 2.4) que:

$$\Lambda_t(|uv|^2) \leqslant \Lambda_t(|v|^2) \Lambda_t(|u|^2) .$$

Comme $\mu_t(|k|^2) = \mu_t(k)^2$, on a $\Lambda_t(|k|^2) = \Lambda_t(k)^2$, d'où finalement:

$$\Lambda_t(uv) \leqslant \Lambda_t(u) \Lambda_t(v) .$$

Q.E.D.

3. LES INÉGALITÉS DE VON NEUMANN

3.1. DÉFINITION. Soit $k \in \mathfrak{S}$. Pour tout réel $t > 0$, on pose

$$\Phi_t(k) = \int_0^t \mu_s(k)\,ds .$$

Si k est un opérateur compact de l'algèbre $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, munie de sa trace usuelle, on a:

$$\Phi_{n+1}(k) = \mu_0(k) + \mu_1(k) + \ldots + \mu_n(k) \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Il est bien connu (cf. [11]) que, si u et v sont compacts, on a:

$$\Phi_{n+1}(u + v) \leqslant \Phi_{n+1}(u) + \Phi_{n+1}(v) .$$

En fait, on a plus généralement:

3.2. THÉORÈME. *Pour tout réel $t > 0$, la fonction $k \mapsto \Phi_t(k)$ est une norme sur $\mathfrak{S}$.*

Cela résulte du lemme suivant:

3.3. LEMME. *Soit M une algèbre de von Neumann. Pour tout réel $t \geqslant 0$, posons*

$$\mathscr{R}_t = \{x \in M,\ \|x\| \leqslant 1 \ \textit{et}\ \mathrm{Trace}_M(\mathrm{Supp}\,x^*) \leqslant t\}.$$

Alors, pour tout $k \in \mathfrak{S}$, on a:

$$\int_0^t \mu_s(k)\,ds = \mathrm{Sup}\{|\mathrm{Trace}(xk)|,\ x \in \mathscr{R}_t\} .$$

Preuve. Soit $x \in \mathscr{R}_t$. Alors $|xk| \in \mathscr{R}_t$ donc $\mu_s(|xk|) = 0$ pour $s > t$, et, par application de 1.11:

$$|\mathrm{Trace}_M(xk)| \leqslant \mathrm{Trace}_M(|xk|) = \int_0^t \mu_s(xk)\,ds .$$

Or $\mu_s(xk) \leqslant \|x\|\mu_s(k) \leqslant \mu_s(k)$ d'après 1.7 (ii), d'où finalement

$$|\mathrm{Trace}_M(xk)| \leqslant \int_0^t \mu_s(k)\,ds .$$

Pour établir la réciproque, on peut supposer que $\mu_s(k) > 0$ pour $s < t$, $\mu_t(k)$ pouvant être éventuellement nul. Soit $k = u|k|$ la décomposition polaire de k. D'après le lemme 1.13, il existe un projecteur $e \in M$, commutant à $|k|$ et vérifiant $\mathrm{Trace}_M(e) \leqslant t$, $\mu_s(k) = \mu_s(|k|_e)$ pour $s < t$. Posons $x = eu^*$. On a $\mathrm{supp}(x^*) \leqslant e$, donc $x \in \mathscr{R}_t$.

D'autre part:

$$\mathrm{Trace}_M(xk) = \mathrm{Trace}_M(eu^*k) = \mathrm{Trace}_M(e|k|) =$$

$$= \int_0^t \mu_s^e(|k|_e)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \mu_s(k)\,\mathrm{d}s\,.$$

Q.E.D.

4. EXTENSION DES INÉGALITÉS DE WEYL ET VON NEUMANN

Nous utilisons ci-dessous un lemme de convexité pour étendre les inégalités de Weyl et von Neumann. Comme application, on retrouve les inégalités de Hölder et Minkowsky pour opérateurs.

4.1. LEMME. *Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe croissante (donc continue). Soient $\varphi, \psi\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ deux fonctions décroissantes bornées supérieurement. Soit $a > 0$. On suppose que*

$$\int_0^s \varphi(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^s \psi(t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{pour tout } s \in [0, a].$$

Alors on a:

$$\int_0^a f[\varphi(t)]\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^a f[\psi(t)]\,\mathrm{d}t\,.$$

Preuve. Ce lemme résulte d'un résultat de Hardy-Littlewood-Pólya (cf. [7]) démontrant la même inégalité en supposant f seulement convexe, mais avec l'hypothèse supplémentaire

$$\int_0^a \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a \psi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

En effet, soient $b > a$, $\delta = \int_0^a \psi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^a \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ tels que $\alpha \leqslant$ $\leqslant \inf\left\{\varphi(a),\, \psi(a) + \dfrac{\delta}{b-a}\right\}$. Soit φ_1 (resp. ψ_1) la fonction de $[0, b]$ dans $\mathbf{R}$ obtenue en prolongeant $\varphi|_{[0,a]}$ (resp. $\psi|_{[0,a]}$) par α $\left(\text{resp. } \alpha - \dfrac{\delta}{b-a}\right)$ sur $]a, b]$. D'après

[7] (théorème 10, p. 152), on a $\int_0^b f[\varphi_1(t)]\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^b f[\psi_1(t)]\,\mathrm{d}t$, soit

$$\int_0^a f[\varphi(t)]\,\mathrm{d}t + f(\alpha)(b-a) \leqslant \int_0^a f[\psi(t)]\,\mathrm{d}t + f\left(\alpha - \frac{\delta}{b-a}\right)(b-a) \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^a f[\psi(t)]\,\mathrm{d}t + f(\alpha)(b-a)$$

la dernière inégalité résultant de la croissance de f. Notre lemme s'ensuit. Q.E.D.

4.2. COROLLAIRE. *Soit $g: [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction croissante continue telle que la fonction $t \mapsto g\,(\exp t)$ soit convexe dans $[-\infty, +\infty[$. Soient $\varphi, \psi: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ deux fonctions décroissantes continues à droite et bornées. Soit $a > 0$. On suppose que*

$$\forall s \in [0, a], \quad \int_0^s \operatorname{Log}\varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^s \operatorname{Log}\psi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors, on a:

$$\int_0^a g[\varphi(t)]\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^a g[\psi(t)]\,\mathrm{d}t.$$

Preuve. Il suffit de prouver que $\int_0^b g[\varphi(t)]\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^b g[\psi(t)]\,\mathrm{d}t$ pour tout $b < a$. Comme g est croissante, on peut supposer $\varphi(b) > 0$, et alors $\psi(b) > 0$ en vertu de la continuité à droite de φ et de l'hypothèse:

$$\int_0^s \operatorname{Log}\varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^s \operatorname{Log}\psi(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour tout } s \in [0, a].$$

Posons $f(t) = g(\exp t)$ pour $t \in [-\infty, +\infty[$. D'après le lemme 4.1, on a:

$$\int_0^b g[\varphi(t)]\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^b g[\psi(t)]\,\mathrm{d}t \quad \text{pour tout } b < a. \qquad \text{Q.E.D.}$$

4.3. PROPOSITION. *Soient $u, v \in \mathfrak{S}$ et $t > 0$.*

(i) *Pour toute fonction f: $[0, +\infty[\to \mathbf{R}$, continue, convexe et croissante, on a:*

$$\int_0^t f[\mu_s(u+v)]\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^t f[\mu_s(u) + \mu_s(v)]\,\mathrm{d}s.$$

(ii) *Pour toute fonction* $g\colon [0, +\infty[\to \mathbf{R}$, *continue croissante telle que* $g \circ \exp$ *soit convexe dans* $[-\infty, +\infty[$, *on a:*

$$\int_0^t g[\mu_s(uv)]\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^t g[\mu_s(u)\mu_s(v)]\,\mathrm{d}s.$$

Preuve. (i): résulte immédiatement du théorème 3.2 et du lemme 4.1.
(ii): résulte immédiatement du théorème 2.3 et du corollaire 4.2. Q.E.D.

4.4. Corollaire. *Soient* $u, v \in \mathfrak{S}$ *et* $t > 0$.
(i) *Pour tout* $p \in [1, +\infty[$, *on a:*

$$\left(\int_0^t \mu_s(u+v)^p\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_0^t \mu_s(u)^p\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^t \mu_s(v)^p\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) *Pour tout* $p \in \mathbf{R}_+^*$, *on a:*

$$\int_0^t \mu_s(uv)^p\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^t \mu_s(u)^p \mu_s(v)^p\,\mathrm{d}s.$$

(iii) *Soient* $p, q, r \in \mathbf{R}_+^*$ *avec* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. *Alors:*

$$\left(\int_0^t \mu_s(uv)^r\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\int_0^t \mu_s(u)^p\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^t \mu_s(v)^q\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Preuve. (i) La proposition 4.3 (i) appliquée à $f(x) = x^p$ donne:

$$\left(\int_0^t \mu_s(u+v)^p\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_0^t (\mu_s(u) + \mu_s(v))^p\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}$$

et le second membre est majoré par $\left(\int_0^t \mu_s(u)^p\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^t \mu_s(v)^p\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}$ en vertu de l'inégalité de Minkowsky classique.

(ii) résulte de la proposition 4.3 (ii) appliquée à $g(x) = x^p$.

(iii) sous les hypothèses de (iii), on a d'après (ii):

$$\left(\int_0^t \mu_s(uv)^r\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\int_0^t \mu_s(u)^r \mu_s(v)^r\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{r}}$$

et l'inégalité de Hölder classique donne le résultat désiré. Q.E.D.

Du corollaire ci-dessus, on déduit immédiatement les inégalités bien connues:

(1) $N_p(u+v) \leqslant N_p(u) + N_p(v)$ pour $u, v \in M$ et $p \in [1, +\infty]$ (Minkowsky)

(2) $N_r(uv) \leqslant N_p(u) N_q(v)$ pour $u, v \in M$ et $p, q, r \in \mathbf{R}_+^*$ avec $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ (Hölder).

4.5. Remarque. Soit (Ω, ν) un espace mesuré intégrable. Si u, v sont des fonctions positives de $L^\infty(\Omega, \nu)$, les propositions 1.10 et 4.3 (ii) (avec $g(x) = x$) entraînent l'inégalité bien connue pour les réarrangements décroissants de fonctions:

$$\int_\Omega uv \, d\nu \leqslant \int_0^{\nu(\Omega)} \mu_s(u) \mu_s(v) \, ds .$$

5. GÉNÉRALISATION DE L'INÉGALITÉ DE GOLDEN ET THOMPSON

Soient u, v deux éléments hermitiens de $M_n(\mathbf{C})$; on a:

$$\operatorname{Trace}(\exp(u+v)) \leqslant \operatorname{Trace}(\exp(u)\exp(v)). \tag{1}$$

En introduisant un ordre partiel $\preccurlyeq$ sur $M_n(\mathbf{C})$ pour lequel

$$\exp(u+v) \preccurlyeq \exp(u)\exp(v),$$

A. Lenard [9] puis C. J. Thompson [15] ont montré la validité de la formule (1) pour d'autres fonctions que la trace. Nous allons étendre ce travail au cas d'une algèbre de von Neumann M, munie d'une trace normale semi-finie fidèle, en nous appuyant sur les inégalités de Weyl.

5.1. Définition. Soient $u, v \in \mathfrak{S}$. On dira que $u \preccurlyeq v$ si, pour tout $t \in]0, \operatorname{Trace}_M(1)]$, on a

$$\Lambda_t(u) \leqslant \Lambda_t(v)$$

avec égalité pour $t = \operatorname{Trace}_M(1)$.

Si $\operatorname{Trace}_M(1) = +\infty$, la condition d'égalité est automatiquement vérifiée, car $u, v \in \mathfrak{S}$. Si $M = M_n(\mathbf{C})$ est l'algèbre des matrices $n \times n$, munie de sa trace usuelle, la relation de préordre $\preccurlyeq$ est exactement celle considérée par C. J. Thompson ([15], p. 470) à la suite de A. Lenard ([9], p. 457).

5.2. Théorème. *Soient u, v deux opérateurs autoadjoints (non partout définis) affiliés à M. On suppose que u, v sont bornés supérieurement et que* $\exp(u) \in \mathfrak{S}$ *ou* $\exp(v) \in \mathfrak{S}$. *Alors, on a pour tout entier $p \geqslant 1$:*

$$\left[\exp\left(\frac{u}{2^p}\right)\exp\left(\frac{v}{2^p}\right)\right]^{2^p} \preccurlyeq \exp(u)\exp(v).$$

Preuve.

1^er^ pas: Montrons que, pour $U \in M_+$ et $V \in \mathfrak{S}_+$, on a:

(1) $$(\forall t > 0) \quad \Lambda_t(|UV|^2) \leqslant \Lambda_t(U^2V^2)\,.$$

Soit l un entier $\geqslant 0$. On a:

$$(|UV|^2)^{2^l} = V(U^2V^2)^{2^l-1}U^2V$$

d'où, en vertu du théorème 2.3,

$$\Lambda_t(|UV|^2)^{2^l} \leqslant \Lambda_t(V)\Lambda_t(U^2\Lambda^2)^{2^l-1}\Lambda_t(U^2V)$$

soit

$$\Lambda_t(|UV|^2) \leqslant \Lambda_t(V)^{\frac{1}{2^l}}\Lambda_t(U^2V^2)^{1-\frac{1}{2^l}}\Lambda_t(U^2V)^{\frac{1}{2^l}}\,.$$

Si $\Lambda_t(V)$, $\Lambda_t(U^2V^2)$ et $\Lambda_t(U^2V)$ sont non nuls, il vient en faisant tendre l vers $+\infty$:

$$\Lambda_t(|\Lambda V|^2) \leqslant \Lambda_t(U^2V^2).$$

Cette inégalité reste valable dans tous les cas puisque:

$$\Lambda_t(|UV|^2)^2 \leqslant \Lambda_t(V)\Lambda_t(U^2V^2)\Lambda_t(U^2V).$$

2^ème^ pas: Montrons que, pour $U \in M_+$, $V \in \mathfrak{S}_+$ et $p \in \mathbf{N}$, on a:

(2) $$\forall t \in \,]0, \operatorname{Trace}_M(1)] \quad \Lambda_t((UV)^{2^p}) \leqslant \Lambda_t(|UV|^{2^p}) \leqslant \Lambda_t(U^{2^p}V^{2^p})$$

avec égalité pour $t = \operatorname{Trace}_M(1)$.

Tout d'abord, l'égalité est claire pour $t = \operatorname{Trace}_M(1)$ (cf. 2.2.2). Pour $p = 1$, on a en vertu du théorème 2.3

$$\Lambda_t((UV)^2) \leqslant \Lambda_t(UV)^2 = \Lambda_t(|UV|)^2\,,$$

soit $\Lambda_t((UV)^2) \leqslant \Lambda_t(|UV|^2)$ et (2) résulte du 1^er^ pas. Supposons que (2) soit vraie à l'ordre $p-1$. Alors on a

$$\begin{aligned} \Lambda_t((UV)^{2^p}) &\leqslant \Lambda_t(|UV|)^{2^p} = && \text{(théorème 2.3)}\\ &= \Lambda_t(|UV|^2)^{2^{p-1}} \leqslant \\ &\leqslant \Lambda_t(U^2V^2)^{2^{p-1}} = && \text{(1}^{\text{er}}\text{ pas)}\\ &= \Lambda_t(|U^2V^2|^{2^{p-1}}) \leqslant \\ &\leqslant \Lambda_t(U^{2^p}V^{2^p}) && \text{(hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

ce qui prouve (2).

Fin de la démonstration. Supposons par exemple que $\exp(v) \in \mathfrak{S}$ et posons

$$U = \exp\left(\frac{u}{2^p}\right), \qquad V = \exp\left(\frac{v}{2^p}\right).$$

Le 2ème pas montre alors que

$$\left[\exp\left(\frac{u}{2^p}\right)\exp\left(\frac{v}{2^p}\right)\right]^{2^p} \leqslant \exp(u)\exp(v).$$

Q.E.D.

5.3. Proposition. *Soit* $g\colon [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ *une fonction continue croissante telle que* $g \circ \exp$ *soit convexe dans* $[-\infty, +\infty[$ *et* $g(0) = 0$. *Soient* u, v *deux opérateurs autoadjoints (non partout définis) affiliés à* M *et bornés supérieurement. On suppose que* $u + v$ *est essentiellement autoadjoint et que* $\exp(u) \in \mathfrak{S}$ *ou* $\exp(v) \in \mathfrak{S}$.

Alors, on a:

$$\mathrm{Trace}_M[g(\exp(u + v))] \leqslant \mathrm{Trace}_M[g(|\exp(u)\exp(v)|)].$$

Preuve. Posons, pour tout entier $p \geqslant 1$ et tout réel $t > 0$:

$$A_p = \left[\exp\left(\frac{u}{2^p}\right)\exp\left(\frac{v}{2^p}\right)\right]^{2^p}$$

$$\varphi_p(t) = \mu_t(A_p), \qquad \varphi(t) = \mu_t(\exp(u)\exp(v)).$$

Il résulte du théorème 5.2 que l'on a pour tout réel $a > 0$:

$$\int_0^t \mathrm{Log}\varphi_p(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^t \mathrm{Log}\varphi(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{quel que soit } t \in [0, a].$$

Le corollaire 4.2 implique alors

$$\int_0^a g(\mu_s(A_p))\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^a g(\mu_s(\exp(u)\exp(v)))\,\mathrm{d}s$$

pour tout réel $a > 0$. Comme $g(\mu_s(u)) = \mu_s(g(u))$ pour $u \in M_+$ et $s > 0$ en vertu de 1.6 (ii), on a

$$\int_0^{+\infty} \mu_s(g(|A_p|))\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^{+\infty} \mu_s(g(|\exp(u)\exp(v)|))\,\mathrm{d}s$$

et la proposition 1.11 entraîne:

$$\mathrm{Trace}_M[g(|A_p|)] \leqslant \mathrm{Trace}_M[g(|\exp(u)\exp(v)|)].$$

Or A_p converge fortement vers $\exp(u+v)$ en restant majoré par $\|\exp u\| \|\exp v\|$ d'après [13] (p. 109), de sorte que $g(|A_p|)$ converge fortement vers $g(\exp(u+v))$. Comme Trace_M est semi-continue inférieurement pour la topologie faible, on a finalement:

$$\mathrm{Trace}_M[g(\exp(u+v))] \leqslant \mathrm{Trace}_M[g(|\exp(u)\exp(v)|)].$$

Q.E.D.

5.4. Corollaire. *Soient* $p \in [1, +\infty[$ *et* u, v *deux opérateurs autoadjoints affiliés à* M *et bornés supérieurement. On suppose que* $u+v$ *est essentiellement autoadjoint et que* $\exp(u) \in \mathfrak{S}$ *ou* $\exp(v) \in \mathfrak{S}$.

Alors, on a:

$$N_p(\exp(u+v)) \leqslant N_p(\exp(u)\exp(v)).$$

Pour $p = 1$, on retrouve l'inégalité de Golden et Thompson mentionnée au début de ce paragraphe.

6. L'INÉGALITÉ DE GOLDEN ET THOMPSON DANS LE CAS D'UNE TRACE FINIE

Dans ce qui suit, M désigne une algèbre de von Neumann munie d'une trace finie Trace_M.

6.1. Proposition. *Soient* u, v *deux éléments hermitiens de* M. *Alors, on a:*

$$\exp(u+v) \preccurlyeq \exp(u)\exp(v).$$

Preuve. D'après la formule de Trotter, $\exp(u+v)$ est la limite normique de $\left[\exp\left(\frac{u}{2^p}\right)\exp\left(\frac{v}{2^p}\right)\right]^{2^p}$ quand $p \to \infty$. D'après le théorème 5.2, il nous suffit de prouver que la fonction $k \mapsto \Lambda_t(k)$ (avec t réel > 0) est normiquement continue sur le groupe des éléments inversibles de M.

Soient u, v deux éléments inversibles de M; on a:

$$\Lambda_t(u) - \Lambda_t(v) \leqslant \Lambda_t(v)[\Lambda_t(v^{-1}u) - 1].$$

Or $\Lambda_t(v) \leqslant \|v\|^t$ et

$$\begin{aligned}\Lambda_t(v^{-1}u) - 1 &\leqslant \|v^{-1}u\|^t - 1 \leqslant \\ &\leqslant (1 + \|v^{-1}u - 1\|)^t - 1 \leqslant \\ &\leqslant t\,\mathrm{Log}(1 + \|v^{-1}u - 1\|)(1 + \|v^{-1}u - 1\|)^t \leqslant \\ &\leqslant t\|v^{-1}u - 1\|(1 + \|v^{-1}u - 1\|)^t \leqslant \\ &\leqslant t\|u - v\|\,\|v^{-1}\|(1 + \|v^{-1}u - 1\|)^t.\end{aligned}$$

Posons $\rho_t(u, v) = \|v\|^t \|v^{-1}\|(1 + \|v^{-1}u - 1\|)^t$. On a:

$$A_t(u) - A_t(v) \leqslant t\|u - v\|\rho_t(u, v)$$

d'où, par symétrie,

$$|A_t(u) - A_t(v)| \leqslant t\|u - v\| \mathrm{Max}\{\rho_t(u, v), \rho_t(v, u)\}.$$

Il s'ensuit que $k \mapsto A_t(k)$ est normiquement continue sur le groupe des éléments inversibles de M. Q.E.D.

De nombreuses fonctions vérifiant l'inégalité de Golden et Thompson sont fournies par les fonctions de Weyl, introduites et étudiées par A. Grothendieck dans [6]. Nous rappelons ci-dessous, en détaillant les démonstrations, les résultats concernant ces fonctions.

6.2. DÉFINITION (cf. [6], p. 4). Soit $a > 0$. On appelle *fonction de Weyl sur* $[0, a]$ toute application $\Phi: L^\infty([0, a])_+ \to \mathbf{R}$ vérifiant les conditions suivantes:

(i) Si $\varphi, \psi \in L^\infty([0, a])_+$ ont même réarrangement décroissant, alors $\Phi(\varphi) = \Phi(\psi)$,

(ii) la fonction $\varphi \mapsto \Phi(\exp\varphi)$ est convexe sur $L^\infty_{\mathbf{R}}([0, a])$,

(iii) Φ est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de $L^\infty_{\mathbf{R}}([0, a])$.

Pour $\varphi \in L^\infty_{\mathbf{R}}([0, a])$, notons φ^* le réarrangement décroissant de φ. On a:

6.3. LEMME (cf. [6], p. 3). *Soit Φ une fonction de Weyl sur $[0, a]$. Il existe une famille $(\xi_i)_{i\in I}$ de réels et une famille $(g_i)_{i\in I}$ de fonctions réelles décroissantes sommables sur $[0, a]$ telles que*

$$\Phi(\exp\varphi) = \mathrm{Sup}\left\{\xi_i + \int_0^a g_i(s)\varphi^*(s)\,\mathrm{d}s, \quad i \in I\right\}$$

pour toute $\varphi \in L^\infty_{\mathbf{R}}([0, a])$.

Preuve. La fonction $\Psi: L^\infty_{\mathbf{R}}([0, a]) \to \mathbf{R}$ défine par $\Psi(\varphi) = \Phi(\exp\varphi)$ est convexe et s.c.i. pour la topologie faible. Il existe donc des fonctions réelles sommables

$$h_i: [0, a] \to \mathbf{R}$$

et des réels ξ_i $(i \in I)$ tels que:

$$\Psi(\varphi) = \mathrm{Sup}\left\{\xi_i + \int_0^a h_i(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s, \quad i \in I\right\}.$$

Posons $g_i = h_i^*$. Pour tout $i \in I$, g_i est sommable sur $[0, a]$ et on a

$$\int_0^a h_i(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^a g_i(s)\varphi^*(s)\,\mathrm{d}s.$$

Il s'ensuit que

$$\Psi(\varphi) \leqslant \operatorname{Sup}\left\{ \xi_i + \int_0^a g_i(s)\varphi^*(s)\,ds, \quad i \in I \right\}$$

pour toute $\varphi \in L^\infty_{\mathbf{R}}([0, a])$. Il est clair que, si $\varphi, \psi \in L^\infty_{\mathbf{R}}([0, a])$ ont même réarrangement décroissant, il en va de même de $\exp\varphi$ et $\exp\psi$, donc $\Psi(\varphi) = \Psi(\psi)$. Soit $\varphi \in L^\infty_{\mathbf{R}}([0, a])$. Pour tout $i \in I$, il n'est pas difficile de prouver l'existence d'une fonction $k_i \in L^\infty_{\mathbf{R}}([0, a])$, ayant même réarrangement décroissant que φ et vérifiant

$$\int_0^a h_i(s)k_i(s)\,ds = \int_0^a g_i(s)\varphi^*(s)\,ds.$$

On a donc

$$\xi_i + \int_0^a g_i(s)\varphi^*(s)\,ds = \xi_i + \int_0^a h_i(s)k_i(s)\,ds \leqslant \Psi(k_i) = \Psi(\varphi)$$

d'où

$$\Psi(\varphi) = \operatorname{Sup}\left\{ \xi_i + \int_0^a g_i(s)\varphi^*(s)\,ds, \quad i \in I \right\}.$$

Q.E.D.

6.4. EXEMPLES.

6.4.1. $\Phi(\varphi) = \|\varphi\|_\infty$ $(\varphi \in L^\infty([0, a])_+)$ est une fonction de Weyl sur $[0, a]$.

6.4.2. Soit $g\colon [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction continue (non nécessairement croissante) telle que $g \circ \exp$ soit convexe dans $[-\infty, +\infty[$. Alors, pour tout réel $t \in [0, a]$, la fonction $\Phi(\varphi) = \int_0^t g(\mu_s(\varphi))\,ds$ est une fonction de Weyl sur $[0, a]$. Pour le prouver, on peut supposer que $g(0) = 0$ et alors $g(\mu_s(\varphi)) = \mu_s(g(|\varphi|))$. D'après [12] (théorème 5.4.7, p. 252), on a dans ce cas:

$$\Phi(\varphi) = \int_0^t g(\mu_s(\varphi))\,ds = \int_0^t \mu_s(g(|\varphi|))\,ds =$$

$$= \operatorname{Sup}\left\{ \int_E g[|\varphi|(s)]\,ds, \ E \text{ partie mesurable de } \mathbf{R}, \ \text{mesure}(E) = t \right\}.$$

Les conditions (i) et (ii) de la définition 6.2 sont immédiates sur cette dernière formule.

6.4.3. Soit g comme ci-dessus, vérifiant $g(0)=0$. La fonction $\Phi(\varphi) = \int_0^a g(\varphi(s))\,\mathrm{d}s$ est une fonction de Weyl sur $[0, a]$, car

$$\int_0^a g(\varphi(s))\,\mathrm{d}s = \int_0^a \mu_s(g \circ \varphi)\,\mathrm{d}s = \int_0^a g(\mu_s(\varphi))\,\mathrm{d}s.$$

6.5. LEMME. *Soient $\varphi, \psi \in L^\infty([0, a])_+$ deux fonctions décroissantes. On suppose que:*

(i) $\mathrm{Log}\varphi, \mathrm{Log}\psi \in L^\infty_{\mathbf{R}}([0, a])$.

(ii) $\forall t \in [0, a], \ \int_0^t \mathrm{Log}\varphi(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^t \mathrm{Log}\psi(s)\,\mathrm{d}s$

avec égalité pour $t = a$.

Alors, $\Phi(\varphi) \leqslant \Phi(\psi)$ pour toute fonction de Weyl Φ sur $[0, a]$.

Preuve. D'après le lemme 6.3, il suffit de prouver que l'on a:

$$\int_0^a g(s)\mathrm{Log}\varphi(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^a g(s)\mathrm{Log}\psi(s)\,\mathrm{d}s \tag{1}$$

pour toute fonction $g\colon [0, a] \to \mathbf{R}$ décroissante et sommable. On peut facilement supposer g en escalier et décroissante, i.e.

$$g = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{[a_i, a_{i+1}]}$$

avec

$$a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1} = a \quad \text{et} \quad \alpha_0 \geqslant \alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n .$$

On a $g = \alpha_n \mathbf{1}_{[0, a]} + \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1})\mathbf{1}_{[0, a_{i+1}]}$ et, puisque $\alpha_i - \alpha_{i+1} \geqslant 0$ pour $i = 0, 1, \ldots, n-1$, l'hypothèse (ii) implique trivialement (1) par intégration.

Q.E.D.

6.6. Posons $a = \mathrm{Trace}_M(1) < +\infty$. Pour tout $u \in M$, on a $\mu_s(u) = 0$ pour $s \geqslant a$. A toute fonction de Weyl Φ sur $[0, a]$, la formule $W_\Phi(u) = \Phi(\mu(u))$ associe une application $W_\Phi\colon M \to \mathbf{R}$. Par exemple, on a:

$W_\Phi(u) = \|u\|$ pour Φ comme en 6.4.1,

$W_\Phi(u) = \Phi_t(u)$ pour Φ comme en 6.4.2 avec $g(x) = x$,

$W_\Phi(u) = \mathrm{Trace}_M(g(u))$ pour Φ comme en 6.4.3.

Avec ces notations on a:

6.7. THÉORÈME. *Soient M une algèbre de von Neumann munie d'une trace finie et $a = \mathrm{Trace}_M(1)$. Soient Φ une fonction de Weyl sur $[0, a]$ et u, v deux éléments hermitiens de M. Alors, on a:*

$$W_\Phi(\exp(u + v)) \leqslant W_\Phi(\exp(u)\exp(v)).$$

Preuve. Comme $\exp(u + v)$ et $\exp(u)\exp(v)$ sont inversibles, les fonctions $s \mapsto \mathrm{Log}\mu_s(\exp(u + v))$ et $s \mapsto \mathrm{Log}\mu_s(\exp(u)\exp(v))$ sont mesurables bornées. D'après 6.1, on a:

$$\int_0^t \mathrm{Log}\mu_s(\exp(u + v))\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^t \mathrm{Log}\mu_s(\exp(u)\exp(v))\,\mathrm{d}s$$

pour $t \in [0, a]$, avec égalité pour $t = a$. Le lemme 6.5 implique alors

$$W_\Phi(\exp(u + v)) \leqslant W_\Phi(\exp(u)\exp(v)).$$

Q.E.D.

BIBLIOGRAPHIE

1. ARAKI, H., Golden-Thompson and Peierls-Bogolubov inequalities for a general von Neumann algebra, *Comm. Math. Phys.*, **34**(1973), 167–178.
2. BOURBAKI, N., *Espaces vectoriels topologiques*, Act. Sc. Ind., n^{os} 1–1189 et 1229, Paris, Hermann, 1966 et 1965.
3. DIXMIER, J., *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann)*, Paris, Gauthier-Villars, 1968.
4. FUGLEDE, B.; KADISON, R., Determinant theory in finite factors, *Ann. of Math.*, **55**(1952), 520–530.
5. GOLDEN, S., Lower bounds for the Helmholtz function, *Phys. Rev.*, **137**(1965), 1127–1128.
6. GROTHENDIECK, A., *Réarrangements de fonctions et inégalités de convexité dans les algèbres de von Neumann munies d'une trace*, Notes multigraphiées, Séminaire Bourbaki (1955), pp. 113-01–113-13.
7. HARDY, H.; LITTLEWOOD, J. E.; PÓLYA, G., Some simple inequalities satisfied by convex functions, *Messenger of Math.*, **58**(1929), 145–152.
8. HORN, A., On the singular values of a product of completely continuous operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **36**(1950), 374–375.
9. LENARD, A., Generalisation of the Golden-Thompson inequality $\mathrm{Tr}(e^A e^B) \geqslant \mathrm{Tr}(e^{A+B})$, *Indiana Univ. Math. J.*, **21**(1971), 457–467.
10. MURRAY, F. J.; VON NEUMANN, J., On rings of operators, *Ann. of Math.*, **37**(1936), 116–229.
11. VON NEUMANN, J., *Tomsk Univ. Rev.*, **1**(1937), 286; Collected works, vol. IV, pp. 205–218.
12. OKIKIOLU, G. O., *Aspects of the theory of bounded integral operators in L^p-spaces*, Academic Press, London, New York, 1971.
13. RUSKAI, M. B., Inequalities for traces on von Neumann algebras, *Comm. Math. Phys.*, **26**(1972), 280–289.

14. THOMPSON, C. J., Inequality with applications in statistical mechanics, *J. Math. Phys.*, **6**(1965), 1812–1813.
15. THOMPSON, C. J., Inequalities and partial orders on matrix spaces, *Indiana Univ. Math. J.*, **21**(1971), 469–480.
16. WEYL, H., Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **35**(1949), 408–411.

THIERRY FACK
Laboratoire de Mathématiques Fondamentales,
Université Pierre et Marie Curie,
UER 48-Aile 45-46-4, Place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05,
France.

Received April 29, 1981.