J. OPERATOR THEORY
10(1983), 39–49

ОБ ОДНОМ НОВОМ СВОЙСТВЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ВОЗМУЩЕНИЯ СЛАБОГО СЖАТИЯ

Г. М. ГУБРЕЕВ, А. И. КОВАЛЕНКО

В спектральном анализе неунитарных сжатий важным инструментом исследования являются определители возмущения, многие свойства которых аналогичны свойствам характеристического многочлена оператора в конечномерном пространстве. Фундаментальная роль определителей возмущения слабых сжатий была выяснена, в основном, в работах И. Ц. Гохберга — М. Г. Крейна [5], [3] и Б. С-Надя — Ч. Фояша [6]. Настоящая заметка посвящена доказательству нового свойства определителя возмущения (теорема 1), на основании которого устанавливается критерий равенства $\mathscr{D}(A)=\mathscr{D}(A^*)$ для довольно широкого класса диссипативных операторов (теорема 2), сформулированный в терминах поведения их спектра.

§ 1

Пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ действует слабое сжатие T, т. е. обратимое сжатие, отклоняющий оператор $D_T^2=I-T^*T$ которого принадлежит идеалу ядерных операторов $\mathfrak{S}_1$. Нормированный определитель возмущения оператора T определяется равенством (см. [5], [3], стр. 440):

$$\mathrm{d}_T(\xi)=[\det(T^*T)]^{-1/2}\cdot\det[T^*(T-\xi I)(I-\xi T^*)^{-1}].$$

Обозначим через $\{s_j\}$ полный набор собственных чисел, а через $\{e_j\}$ ортонормированную последовательность соответствующих собственных векторов неотрицательного оператора D_T^2. Имеет место:

Теорема 1. *Пусть T слабое сжатие, для которого 1 не является собственным числом. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. $$D_T^2 \mathfrak{H} \subset (I - T^*) \mathfrak{H}, \quad \sum_j s_j \|(I - T^*)^{-1} e_j\|^2 < \infty.$$

2. $$\sup_{0 \leqslant r < 1} \frac{1}{1 - r} (1 - |\mathrm{d}_T(r)|) < \infty.$$

Доказательство. Аналитическим аппаратом доказательства является характеристическая функция слабого сжатия (см. [6][1], стр. 264), определяемая соотношениями:

$$W_T(\xi) W_T(0) = I - \Phi(I - \xi T)^{-1} \Phi, \quad W_T(0) = (T^*T)^{1/2} | \mathscr{D}_T,$$

$$\Phi = D_T | \mathscr{D}_T = (I - T^*T)^{1/2} | \mathscr{D}_T$$

значениями которой являются операторы, действующие в пространстве $\mathscr{D}_T = \overline{D_T \mathfrak{H}}$. Поскольку при каждом ξ ($|\xi| < 1$) оператор $I - W_T(\xi)$ является ядерным, то можем рассмотреть функцию $\det W_T(\xi)$, причём оказывается, что $|\det W_T(r)| = |\mathrm{d}_T(r)|$. Действительно, используя свойства бесконечных определителей (см. [2], стр. 203), будем иметь:

$$\overline{\det[W_T(r) W_T(0)]} = \det[I - \Phi^2(I - rT^*)^{-1}] =$$

$$= \det[I - (I - T^*T)(I - rT^*)^{-1}] = \det[T^*(T - rI)(I - rT^*)^{-1}].$$

Окончательно получим:

$$(1) \qquad |\det W_T(r)| = |\det W_T(0)|^{-1} \cdot |\det[T^*(T - rI)(I - rT^*)^{-1}]| = |\mathrm{d}_T(r)|.$$

В дальнейшем будем использовать также известные соотношения для характеристической функции $W_T(\xi)$ (см. [6], стр. 265):

$$(2) \qquad I - W_T(r) W_T^*(r) = (1 - r^2) \Phi(I - rT)^{-1} (I - rT^*)^{-1} \Phi, \quad 0 \leqslant r < 1,$$

$$(2') \qquad I - W_T^*(r) W_T^*(r) = (1 - r^2) W_T^{-1}(0) \Phi(I - rT^*)^{-1} T^*T(I - rT)^{-1} \Phi W_T^{*-1}(0).$$

Пусть теперь выполнено утв. 1 теоремы. Тогда все векторы e_j принадлежат области определения оператора $(I - T^*)^{-1}$, который, вообще говоря, неограничен. Поэтому можем рассмотреть:

$$\|(I - rT^*)^{-1} \Phi e_k - (I - T^*)^{-1} \Phi e_k\| \leqslant$$

$$\leqslant (1 - r) \|(I - rT^*)^{-1}\| \|(I - T^*)^{-1} \Phi e_k\| \leqslant \|(I - T^*)^{-1} \Phi e_k\|.$$

---

[1] В [6] принято определение $W_T^*(\bar{\xi})$, отличающееся от приведенного на постоянный изометрический множитель.

Отсюда заключаем, что при $0 \leqslant r < 1$:

$$\|(I - rT^*)^{-1} \Phi e_k\| \leqslant 2\|(I - T^*)^{-1} \Phi e_k\| = 2\sqrt{s_k}\|(I - T^*)^{-1} e_k\|. \tag{3}$$

Обозначим через P_n ортопроекткора на подпространстова, натянутое на векторы $\{e_k\}_1^n$, и через $\{\lambda_k^{(n)}(r)\}_1^n$ $(0 < \lambda_k^{(n)}(r) \leqslant 1)$ собственные числа оператора $P_n W_T(r)\, W_T^*(r) P_n$. Оценим при $0 \leqslant r < 1$ выражение:

$$\frac{1}{1-r^2}(1 - \det(P_n W_T(r)\, W_T^*(r) P_n)) = \frac{1}{1-r^2}\left(1 - \prod_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)}(r)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-r^2}\left(n - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)}(r)\right) = \frac{1}{1-r^2}\left(n - \sum_{k=1}^{n} (W_T(r)\, W_T^*(r) e_k, e_k)\right).$$

Принимая во внимание (3), а также равенства

$$\frac{1}{1-r^2}(1 - (W_T(r) W_T^*(r) e_k, e_k)) = \|(I - rT^*)^{-1} \Phi e_k\|^2, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

легко выводимые из (2), окончательно получим:

$$\frac{1}{1-r^2}(1 - \det(P_n W_T(r)\, W_T^*(r)\, P_n)) \leqslant 4 \sum_{k=1}^{n} s_k \|(I - T^*)^{-1} e_k\|^2.$$

Перейдём в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$ (см. [2], стр. 203).

$$\frac{1}{1-r^2}(1 - \det(W_T(r)\, W_T^*(r))) = \frac{1}{1-r^2}(1 - |\det W_T(r)|^2) \leqslant$$

$$\leqslant 4 \sum_k s_k \|(I - T^*)^{-1} e_k\|^2 < \infty,$$

или, учитывая (1)

$$\sup \frac{1}{1-r}(1 - |d_T(r)|) < \infty,$$

поскольку $|d_T(\xi)| < 1$ при $|\xi| < 1$.

Обратно, пусть выполнено утв. 2, и значит, при $0 \leqslant r < 1$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1-r}(1 - \det W_T^*(r) W_T(r)) < K \\ &\frac{1}{1-r}(1 - \det W_T(r) W_T^*(r)) < K. \end{aligned} \tag{4}$$

Покажем теперь, что при каждом $h \in \mathcal{D}_T$ выполняются соотношения:

$$\sup_{0 \leqslant r < 1} \|T(I - rT)^{-1} \Phi W_T^{*-1}(0)h\|^2 < \infty$$
(5)
$$\sup_{0 \leqslant r < 1} \|(I - rT^*)^{-1} \Phi h\|^2 < \infty.$$

Для этого получим вначале при $0 \leqslant r < 1$ оценки:

(6) $$\frac{1}{1-r} \sum_j ((I - W_T^*(r) W_T(r)) u_j, u_j) < K_1 < \infty$$

(6′) $$\frac{1}{1-r} \sum_j ((I - W_T(r) W_T^*(r)) u_j, u_j) < K_1 < \infty ,$$

где $\{u_j\}$ произвольный ортонормированный базис пространства $\mathcal{D}_T$. Ограниченность в некоторой полуокрестности $r = 1$ выражения (6) получается следующим образом. Обозначим через $\{\lambda_k(r)\}$ $(0 < \lambda_k(r) \leqslant 1)$ полный набор собственных чисел оператора $W_T^*(r) W_T(r)$. Тогда из (4) вытекает:

$$\frac{1}{1-r}(1 - \prod_j \lambda_j(r)) < K, \quad 0 \leqslant r < 1.$$

Следовательно

$$\left|\sum_j \ln \lambda_j(r)\right| \leqslant |\ln(1 - K(1 - r))|, \quad r > 1 - \frac{1}{2K}.$$

Поэтому при $r > 1 - \frac{1}{2K}$ получим:

$$\frac{1}{1-r} \sum_j (1 - \lambda_j(r)) \leqslant \frac{1}{1-r} \left|\sum_j \ln \lambda_j(r)\right| \leqslant \frac{|\ln(1 - K(1 - r))|}{1-r} < K_1 < \infty.$$

Поскольку при каждом $r \in [0, 1)$ оператор $I - W_T^*(r) W_T(r)$ является ядерным, то согласно теореме В. Б. Лидского (см. [2], стр. 131) имеем при $r > 1 - \frac{1}{K}$:

$$\frac{1}{1-r} \sum_j ((I - W_T^*(r) W_T(r)) u_j, u_j) = \frac{1}{1-r} \sum_j (1 - \lambda_j(r)) < K_1.$$

Ограниченность (6) вне окрестности $r = 1$ вытекает из следующей выкладки, полученной с использованием (2′):

$$\frac{1}{1-r}\sum_j((I - W_T^*(r)\, W_T(r))\, u_j, u_j) = (1+r)\sum_j \|T(I - rT)^{-1}\Phi W_T^{*-1}(0)\, u_j\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\|T(I-rT)^{-1}\|^2 \sum_j \|\Phi W_T^{*-1}(0) u_j\|^2 \leqslant \frac{2}{(1-r)^2}\, \mathrm{N}(\Phi W_T^{*-1}(0)),$$

где через $\mathrm{N}(\Phi W_T^{*-1}(0))$ обозначена абсолютная норма оператора $\Phi W_T^{*-1}(0)$, являющегося оператором Гильберта-Шмидта. Аналогично обосновывается справедливость (6′). Из того, что в неравенствах (6) и (6′) все слагаемые неотрицательны, при любом $h \in \mathscr{D}_T$ $\left(\text{полагая } u_1 = \frac{h}{\|h\|}\right)$ имеем:

$$\frac{1}{1-r}((I - W_T^*(r) W_T(r))h, h) < K_1\|h\|^2,$$

$$\frac{1}{1-r}((I - W_T(r) W_T^*(r))h, h) < K_1\|h\|^2,$$

что с учётом формул (2) и (2′) даёт (5).

Заметим, что соотношение (6′) на базисе $\{e_j\}$ (вместо $\{u_j\}$) с использованием (2) может быть переписано в виде:

(7) $$\sum_j s_j\|(I - rT^*)^{-1} e_j\|^2 < K_1.$$

При завершении доказательства мы будем существенно опираться на один результат Б. С.-Надя — Ч. Фояша (см. теорему 2.1 [6], стр. 182). Применяя его к функциям $\lambda(1-\lambda)^{-1}$ и $(1-\lambda)^{-1}$, из соотношений (5) заключаем, что векторы Φh $(h \in \mathscr{D}_T)$ входят в области определения операторов $(I - T)^{-1}$ и $(I - T^*)^{-1}$. Следовательно:

(8) $$D_T^2\mathfrak{H} \subseteq \Phi\mathscr{D}_T \subset (I - T)\mathfrak{H}, \quad D_T^2\mathfrak{H} \subseteq \Phi\mathscr{D}_T \subset (I - T^*)\mathfrak{H}.$$

Далее, на основании той же теоремы 2.1 при каждом имеем:

$$\lim_{r\to 1-0} (I - rT^*)^{-1}\Phi e_k = (I - T^*)^{-1}\Phi e_k.$$

Переходя в (7) к пределу при $r \to 1 - 0$, получим:

$$\sum_j s_j\|(I - T^*)^{-1} e_j\|^2 < \infty.$$

Теорема доказана.

§ 2

Поскольку $|d_T(\xi)| \leqslant 1$ при $|\xi| < 1$, то имеем место мультипликативное представление:

$$(9)\quad d_T(\xi) = \prod_j \frac{\xi_j - \xi}{1 - \bar{\xi}_j \xi} \cdot \frac{\bar{\xi}_j}{|\xi_j|} \cdot \exp\left[-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + \xi}{e^{it} - \xi}\, d\omega(t)\right], \quad \omega(+0) = \omega(0) = 0.$$

В докладе М. Г. Крейна [5] приведено спектральное истолкование всех элементов этого представления. В частности, пусть $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{H}_1$ подпространства пространства $\mathfrak{H}$, фигурирующие в спектральном разложении простого слабого сжатия T, причём спектр $T_0 = T|\mathfrak{H}_0$ расположен на единичной окружности. Тогда

$$\omega(t + 0) = -\frac{1}{2} \ln \det(I + P_n D_T^2 P_n),$$

где P_t ортопроектор на максимальное инвариантное подпространство оператора T_0, в котором спектр его расположен на дуге $e^{i\theta}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant t)$. Кроме того, $\{\xi_j\}$ совпадает с дискретным спектром оператора T, лежащим внутри единичного круга. Для дальнейших рассмотрений нам понадобится:

Лемма. *Пусть* $d_T(\xi)$ *определитель возмущения произвольного сжатия* T. *Тогда*

$$(10)\qquad \sup_{0 \leqslant r < 1} \frac{1}{1 - r}(1 - |d_T(r)|) < \infty$$

в том и только том случае, когда

$$\sum_j \frac{1 - |\xi_j|^2}{|1 - \xi_j|^2} + \int_0^{2\pi} \frac{d\omega(t)}{1 - \cos t} < \infty.$$

Доказательство. Введём следующие обозначения:

$$d_1(\xi) = \prod_j \frac{\xi_j - \xi}{1 - \bar{\xi}_j \xi} \cdot \frac{\bar{\xi}_j}{|\xi_j|}, \qquad d_2(\xi) = \exp\left[-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + \xi}{e^{it} - \xi}\, d\omega(t)\right]$$

и заметим, что условие (10) выполняется в том и только том случае, когда

$$\sup_{0 \leqslant r < 1} \frac{1}{1 - r}(1 - |d_1(r)|) < \infty, \qquad \sup_{0 \leqslant r < 1} \frac{1}{1 - r}(1 - |d_2(r)|) < \infty.$$

Далее, если выполнено первое из этих соотношений, то и подавно при любом n имеем:

$$\frac{1}{1-r}(1-|d_1^{(n)}(r)|)\leqslant K,\quad d_1^{(n)}(\xi)=\prod_{j=1}^{n}\frac{\xi_j-\xi}{1-\overline{\xi}_j\xi}\cdot\frac{\overline{\xi}_j}{|\xi_j|},$$

а значит $\frac{d}{dr}|d_1^{(n)}(r)|\big|_{r=1}\leqslant K$. Следовательно, при любом получим:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1-|\xi_j|^2}{|1-\xi_j|^2}\leqslant K, \tag{11}$$

так как

$$\frac{d}{dr}\left|\frac{\xi_k-r}{1-\overline{\xi}_k r}\right|\Bigg|_{r=1}=\frac{1-|\xi_k|^2}{|1-\overline{\xi}_k|^2}.$$

Обратно, если выполнено (11), то

$$\left|\frac{d}{dr}d_1^{(n)}(r)\right|=\left|\sum_{j=1}^{n}\prod_{k\neq j}\frac{\xi_k-r}{1-\overline{\xi}_k r}\cdot\frac{\overline{\xi}_k}{|\xi_k|}\cdot\frac{1-|\xi_j|^2}{(1-\overline{\xi}_j r)^2}\cdot\frac{\overline{\xi}_j}{|\xi_j|}\right|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\frac{1-|\xi_j|^2}{|1-\overline{\xi}_j r|^2},$$

что всегда ограничено числом C, поскольку $|1-\overline{\xi}_j r|\geqslant\frac{1}{2}|1-\xi_j|$ при $0\leqslant r<1$. Поэтому, в силу теоремы Лебега, из равенства

$$d_1^{(n)}(1)-d_1^{(n)}(r)=\int_r^1\frac{d}{dt}d_1^{(n)}(t)dt$$

вытекает существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}d_1^{(n)}(1)=z$ $(|z|=1)$ а также неравенство

$$(1-|d_1(r)|)\leqslant|z-d_1(r)|\leqslant C(1-r).$$

Если же выполняется

$$\frac{1}{1-r}(1-|d_2(r)|)<K,\quad r\in[0,1),$$

то $\lim\operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+r}{e^{it}-r}d\omega(t)=0$, и начиная с некоторого r_0:

$$\frac{1}{1-r}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{|r-e^{it}|^2}d\omega(t)=\frac{1}{1-r}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+r}{e^{it}-r}d\omega(t)<$$

$$<\frac{2}{1-r}\left(1-\exp\left[-\operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+r}{e^{it}-r}d\omega(t)\right]\right)<2K.$$

Поэтому, устремляя $r \to 1-0$, получим:

$$(12)\qquad 2\int_0^{2\pi} \frac{d\omega(t)}{|1-e^{it}|^2} = \int_0^{2\pi} \frac{d\omega(t)}{1-\cos t} \leqslant 2K.$$

Обратно, если выполнено (12), то можем рассмотреть:

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+r}{e^{it}-r}\, d\omega(t) - \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+1}{e^{it}-1}\, d\omega(t)\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \left|\frac{2(1-r)}{(e^{it}-r)(e^{it}-1)}\right| d\omega(t) \leqslant 4(1-r)\int_0^{2\pi} \frac{d\omega(t)}{|e^{it}-1|^2},$$

т. к. $|e^{it}-r| \geqslant \frac{1}{2}|e^{it}-1|$, $0 \leqslant r < 1$. Полагая $z = \exp\left[-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+1}{e^{it}-1}\, d\omega(t)\right]$, ($|z| = 1$), получим:

$$\frac{1}{1-r}|z - d_2(r)| \leqslant C\int_0^{2\pi} \frac{d\omega(t)}{|e^{it}-1|^2},$$

что и доказывает лемму.

§ 3

Укажем некоторые применения доказанной теоремы. Обозначим через $\mathscr{K}_+(\mathfrak{S}_1)$ множество линейных диссипативных операторов ($\mathrm{Im}(Af,f) \geqslant 0$, $\forall f \in \mathscr{D}(A)$), обладающих хотя бы одной парой $-\mu$, $-\bar\mu$ регулярных точек, преобразование Кэли которых $T = (A+\bar\mu I)(A+\mu I)^{-1}$ является слабыми сжатиями в пространстве $\mathfrak{H}$. Это означает принадлежность оператора

$$B_\mu = iR_{-\mu} - iR^*_{-\mu} - 2\,\mathrm{Im}\,\mu R^*_{-\mu}R_{-\mu}, \qquad R_{-\mu} = (A+\mu I)^{-1},$$

который характеризует отклонение оператора A от своего сопряжённого, идеалу $\mathfrak{S}_1$. Рассматриваемый класс операторов достаточно широк и содержит, в частности, операторы, порождаемые радиальным уравнением Шрёдингера с комплексным потенциалом достаточно общего типа [5].

При изучении неограниченных операторов естественно в (9) перейти к верхней полуплоскости. Не ограничивая общности полагаем $\mu = i$. Тогда для $d_A(\lambda) = d_T((\lambda-i)(\lambda+i)^{-1})$ (здесь $T = (A-iI)(A+iI)^{-1}$) будем иметь:

$$d_A(\lambda) = \prod_j \frac{(\lambda_j-\lambda)(\bar\lambda_j+i)}{(\bar\lambda_j-\lambda)(\lambda_j+i)} \cdot \left|\frac{\bar\lambda_j - i}{\lambda_j - i}\right| \cdot \exp\left[i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+t\lambda}{t-\lambda}\, d\sigma(t) + ia\lambda\right],$$

где $\{\lambda_j\}$ —множество собственных чисел оператора A,

$$\sigma(t) = \omega(2\operatorname{arcctg}(-t)), \quad a = \omega(2\pi) - \omega(2\pi - 0).$$

Теорема 2. *Пусть оператор* $A \in \mathscr{K}_{+}(\mathfrak{S}_1)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(A^*)$ *и замыкание* $A - A^*$ *ядерно.*

2. $$\sum_j \operatorname{Im}\lambda_j + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(1 + t^2)\,d\sigma(t) < \infty, \quad a = 0.$$

Доказательство. Будем использовать обозначения, введённые в теореме 1. Из того, что

$$2B_i = I - T^*T, \quad T = (A - iI)(A + iI)^{-1}$$

в случае $\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(A^*)$ выводим $D_T^2\mathfrak{H} \subset \mathscr{D}(A^*)$, или в терминах оператора T это означает $D_T^2\mathfrak{H} \subset (I - T^*)\mathfrak{H}$. Кроме того

$$B_i h = \frac{1}{2}\sum_j s_j(h, e_j)e_j.$$

При любом векторе $h_n = \sum_{k=1}^{n}(h, e_k)e_k$ имеем:

$$B_i h_n = \frac{1}{2}\sum_j s_j \sum_{k=1}^{n}(h, e_k)(e_k, e_j)e_j = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} s_k(h, e_k)e_k.$$

Поэтому

$$(A^* - iI)B_i h_n = i(A^* - iI)R_{-i}h_n - ih_n - 2R_{-i}h_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} s_k(h, e_k)g_k,$$

где $g_k = (A^* - iI)e_k$. Так как оператор, стоящий слева ограничен, то переходя к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$i(A^* - iI)R_{-i}h - ih - 2R_{-i}h = \frac{1}{2}\sum_k s_k(h, e_k)g_k$$

при любом $h \in \mathscr{D}_T$ и, стало быть, при любом $h \in \mathfrak{H}$, поскольку $\operatorname{Ker} B_i = \mathscr{D}_T^{\perp}$. Полагая $h = (A + iI)f$ $(f \in \mathscr{D}(A))$, последнее равенство перепишем в виде:

$$\frac{A - A^*}{i}f = \frac{1}{2}\sum_k s_k(f, g_k)g_k. \tag{13}$$

Если оператор $A - A^*$ ограничен, то принадлежность его идеалу ядерных операторов равносильна условию:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{A-A^*}{\mathrm{i}}u_j, u_j\right) = \frac{1}{2}\sum_k s_k \sum_{j=1}^{\infty} |(u_j, g_k)|^2 = \frac{1}{2}\sum_k s_k \|(A^* - \mathrm{i}I)e_k\|^2 < \infty$$

для любого ортонормированного базиса $\{u_j\}_1^\infty$ пространства $\mathfrak{H}$, элементы которого принадлежат $\mathscr{D}(A)$. Последнее в терминах оператора T означает сходимость ряда $\sum\limits_k s_k\|(I - T^*)^{-1}e_k\|^2 < \infty$, так как $A^* - \mathrm{i}I = -2\mathrm{i}(I - T^*)^{-1}$.

Поэтому на основании теоремы 1 и леммы выводим:

$$\sum_j \frac{1 - |\xi_j|^2}{|1 - \xi_j|^2} + \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{1 - \cos t} < \infty.$$

Остаётся заметить, что $(1 - |\xi_j|^2)|1 - \xi_j|^{-2} = \operatorname{Im}\lambda_j$ и

$$\int_0^{2\pi - 0} \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{1 - \cos t} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(1 + t^2)\mathrm{d}\sigma(t).$$

Обратно, если справедливо утв. 2 теоремы, то, следовательно, имеет место утв. 2 теоремы 1. Поэтому, прежде всего (см. (8)) $D_T^2\mathfrak{H} \subset (I - T)\mathfrak{H}$, $D_{T^*}^2\mathfrak{H} \subset (I - T^*)\mathfrak{H}$, или в терминах оператора $A: B_{\mathrm{i}}\mathfrak{H} \subset \mathscr{D}(A)$, $B_{\mathrm{i}}\mathfrak{H} \subset \mathscr{D}(A^*)$. Учитывая вид оператора B_{i} из первого включения получим соотношение

$$\mathrm{i}R_{-\mathrm{i}}^* h + 2R_{-\mathrm{i}}^* R_{-\mathrm{i}} h \subset \mathscr{D}(A), \quad h \in \mathfrak{H},$$

равносильное $R_{-\mathrm{i}}^* T\mathfrak{H} \subset \mathscr{D}(A)$ и значит $\mathscr{D}(A^*) \subseteq \mathscr{D}(A)$. Аналогично $\mathscr{D}(A) \subseteq \mathscr{D}(A^*)$, что и доказывает равенство $\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(A^*)$. Кроме того, сходимость ряда $\sum\limits_j s_j\|(I - T^*)^{-1}e_j\|^2 < \infty$ влечёт сходимость ряда $\sum\limits_j s_j\|(A^* - \mathrm{i}I)e_j\|^2 < \infty$.

Следовательно, на основании (13) получим:

$$\left\|\frac{A - A^*}{\mathrm{i}}f\right\| \leqslant \frac{1}{2}\|f\|\sum_j s_j\|g_j\|^2.$$

Последнее означает, что оператор $A - A^*$ допускает замыкание, принадлежащее идеалу $\mathfrak{S}_1$. Теорема доказана.

Интересно отметить, что в условиях теоремы 2 справедлива формула:

$$\operatorname{Sp}\left(\frac{A - A^*}{\mathrm{i}}\right) = 2\sum_j \operatorname{Im}\lambda_j + \int_{-\infty}^{\infty}(1 + t^2)\mathrm{d}\sigma(t), \tag{14}$$

которую можно получить после некоторой модификации уже цитированной теоремы 2.1 Б. С-Надя — Ч. Фояша и уточнения результатов теоремы 1 и леммы данной заметки. Соотношение (14) дополняет формулу следов для диссипативных операторов, выведенную в [1].

Рассмотрим более подробно подмножество класса $\mathscr{K}_+(\mathfrak{S}_1)$, состоящее из операторов с конечномерными операторами отклонения B_μ. Поскольку в этом случае замыкание $A - A^*$ всегда конечномерно, то приходим к утверждению:

СЛЕДСТВИЕ. *Для оператора A класса $\mathscr{K}_+(\mathfrak{S}_1)$ с конечномерным оператором B_μ равенство $\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(A^*)$ возможно в том и только том случае, когда*

$$\sum_j \operatorname{Im} \lambda_j + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + t^2) d\sigma(t) < \infty, \quad a = 0.$$

Отметим, что этот результат впервые был получен в [4].

При обсуждении результатов этой заметки с М. Г. Крейном стало известно, что импликация 1⇒2 теоремы 2 была получена им ранее в ещё не опубликованной работе. Считаем своим приятным долгом выразить глубокую признательность Марку Григорьевичу Крейну за внимание к работе и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамян, В. М.; Павлов, Б. С., Формула следов для диссипативных операторов, *Вестн. Ленингр. гос. ун-та, сер. матем., мех., астрон.*, **2**: 7 (1979), 5—8.
2. Гохберг, И. Ц.; Крейн М. Г., *Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов*, М., «Наука», 1965.
3. Гохберг, И. Ц., Крейн, М. Г., *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и её приложения*, М., «Наука», 1967.
4. Губреев, Г. М., *Неограниченные операторные узлы и их характеристические оператор-функции*, Диссертация, Донецк, 1978.
5. Крейн, М. Г., Аналитические проблемы и результаты теории линейных операторов в гильбертовом пространстве, *Труды международного конгресса математиков*, М., «Мир», 1968, 189—216.
6. С-Надь, Б; Фояш, Ч., *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, М., «Мир», 1970.

М. Г. ГУБРЕЕВ
ун. Подбельского, 38 а, кв. 1
270000, Одесса,
С.С.С.Р.

А. И. КОВАЛЕНКО

Received November 11, 1981.