J. OPERATOR THEORY
12(1984), 127–157

© Copyright by INCREST, 1984

LA FACTORISATION DES FONCTIONS DES OPÉRATEURS DE TRANSMISSION ET LA MÉTHODE DE LA CONSTRUCTION D'OPÉRATEURS INVERSIBLES DANS $L^2(0, l)$

VLADIMIR ZOLOTARIOV

INTRODUCTION

Le présent ouvrage résulte du développement des idées formulées par L. A. Sahnovič dans les études [3, 4] pour le cas des opérateurs proches d'unitaires.

L'ouvrage se compose de deux parties. La première est consacée à la démonstration du théorème sur la factorisation de la fonction d'opérateur $\theta(z) = K + \psi(z - T)^{-1}\varphi$ du système discret ouvert

$$(*) \qquad \begin{cases} x_{n+1} = Tx_n + \varphi u_n^- \\ u_n^+ = \psi x_n + Ku_n^-. \end{cases}$$

A la différence des études [1, 2], aucune loi de conservation (d'énergie, de métrique ou de norme) n'est supposée. Nous estimons que le processus décrit par les équations $(*)$ est inversible (voir (3), (4)).

Vu que la factorisation de $\theta(z)$ s'opère selon les sous-espaces invariants du principal opérateur T, l'opérateur S (qui suit la factorisation) décrit les chaînes des sous-espaces invariants de l'opérateur T.

Aussi la description de tous les S (solutions des équations, voir (1), (2)) est-elle analogue à celle de toutes les chaînes des sous-espaces invariants de l'opérateur T, ou (ce qui revient au même) des mesures d'opérateur dans les fonctions de transmission $\theta(z)$ représentées par des intégrales multiplicatives.

La deuxième partie de l'ouvrage est consacrée à l'inversion des opérateurs linéaires bornés S dans $L^2(0, l)$ qui répondent à la relation

$$S - \hat{T}ST = \varphi,$$

où T et $\hat{T}$ sont inversibles. Nous avons étudié les méthodes d'inversion de l'opérateur S quand T et $\hat{T}$ ont des composants imaginaires uni- et bidimensionnels.

Dans ce cas φ est un opérateur intégral au noyau dégénéré. Dans un cas plus général, où T et $\hat{T}$ ont des indices finis de défaut et une "orientation triangulaire inverse", l'opérateur φ a aussi le noyau dégénéré.

Nous avons démontré que pour construire l'opérateur S^{-1}, il suffit d'inverser S pour un nombre fini de fonctions.

Le cas où

$$(Tf)(x) = f(x) - \alpha \int_x^l (t-x) f(t)\, \mathrm{d}t,$$

$$(\hat{T}f)(x) = f(x) - \beta \int_0^x (x-t) f(t)\, \mathrm{d}t.$$

nous semble présenter un certain intérêt.

Pour construire S^{-1}, dans le cas où

$$(Sf)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^l S(x,t)\, f(t)\, \mathrm{d}t,$$

il faut que le noyau $S(x, t)$ soit une solution de l'équation différentielle aux dérivées partielles (si $S_{tt}(x, t)$ et $S_{xx}(x, t)$ existent)

$$\left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) S(x,t) - S(x,t) = 0$$

qui peut être hyperbolique ou elliptique, en fonction du signe de $\alpha\beta$.

Nous avons également démontré que pour trouver le noyau de l'opérateur S^{-1}, il faut résoudre une équation hétérogène ayant une partie gauche analogue. Notons que dans le cas elliptique il ne suffit pas de connaître le noyau de l'opérateur intégral φ pour construire S^{-1} (voir théorème 18). La prise en compte des conditions supplémentaires aux frontières liées aux particularités du cas elliptique est nécessaire.

Apparement dans le cas où le noyau $S(x, t)$ de l'opérateur initial constitue une solution d'une équation différentielle homogène aux dérivées partielles de l'ordre final (dans la classe des fonctions classiques et des distributions), on peut toujours trouver des opérateurs T et $\hat{T}$ tels que $S - \hat{T}ST = \varphi$, où φ a le noyau dégénéré. Le noyau de l'opérateur S^{-1} est construit de façon analogue, qui consiste à résoudre une équation hétérogène et double par rapport à l'équation pour $S(x, t)$.

Notons, en conclusion, que les méthodes décrites dans l'ouvrage sont parfaitement valables pour la solution des problèmes de la similitude d'opérateurs (voir [4]).

1. FACTORISATION DES FONCTIONS D'OPÉRATEUR

I. Les égalités

$$(*) \qquad \begin{cases} x_{n+1} = Tx_n + \varphi u_n^- \\ u_n^+ = \psi x_n + Ku_n^- \end{cases} \qquad \xrightarrow{u_n^-} \boxed{x_n} \xrightarrow{u_n^+}$$

$n \geqslant 0$, où $x_{n|n=0} = x_0$ et où $\mathscr{A}$ est l'opérateur

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} T & \varphi \\ \psi & K \end{bmatrix} : H \oplus E \to H \oplus F; \quad \mathscr{A} \begin{bmatrix} x_n \\ u_n^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ u_n^+ \end{bmatrix},$$

($x_n \in H$, $u_n^- \in E$, $u_n^+ \in F$), forment un *système ouvert.*

L'espace de Hilbert H est appelé "*espace intérieur*", E et F sont appelés "*espaces extérieurs*". Les vecteurs u_n^- sont appelés "*signaux d'entrée*", u_n^+ "*signaux de sortie*", les vecteurs x_n "*états intérieurs* du système $(*)$" et x_0 "*état initial* du système $(*)$". Au cas où $x_n = z^n x_0$, $u_n^\pm = z^n u_0^\pm$ $(n \geqslant 0)$ constituent des successions harmonieuses de valeurs,

$$x_0 = (zI - T)^{-1}\varphi u_0^-, \quad u_0^+ = \theta_T(z)\, u_0^-.$$

La fonction

$$\theta_T(z) = \theta(z) = K + \psi(zI - T)^{-1}\varphi$$

est appelée "*fonction de transmission* du système ouvert $\mathscr{A}(*)$".

Le système $\mathscr{A}(*)$ inscrit dans la matrice de l'espace de Hilbert $\left(\sum_{-\infty}^{-1}{}^{\oplus} E\right) \oplus H \oplus \left(\sum_{1}^{\infty}{}^{\oplus} F\right)$ est, au fond, la dilatation [2] de l'opérateur T.

Le système des équations

$$(*,*) \qquad \begin{cases} y_n = \hat{T}y_{n+1} + \hat{\psi}v_n^- \\ v_n^+ = \hat{\varphi}y_{n+1} + \hat{K}v_n^- \end{cases} \qquad \xleftarrow{v_n^+} \boxed{y_n} \xleftarrow{v_n^-}$$

$n \geqslant 0$, où $y_{n|n=0} = y_0$, et où $\mathscr{B}$ est l'opérateur

$$\mathscr{B} = \begin{bmatrix} \hat{T} & \hat{\psi} \\ \hat{\varphi} & \hat{K} \end{bmatrix} : H \oplus F \to H \oplus E, \quad \mathscr{B} \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ v_n^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_n \\ v_n^+ \end{bmatrix},$$

($y_n \in H$, $v_n^- \in F$, $v_n^+ \in E$), est appelé "*système ouvert dual*". Les vecteurs y_n, $v_n^\pm$ portent les mêmes appellations que ceux du $(*)$.

Au cas où $y_n = z^n y_0$, $v_n^\pm = z^n v_0^\pm$, $n \geqslant 0$ constituent des successions de valeurs harmonieuses,

$$y_0 = (1 - z\hat{T})^{-1}\hat{\psi}v_0^-, \quad v_0^+ = \hat{\theta}_T(z)\, v_0^-.$$

La fonction

$$\hat{\theta}_{\hat{T}}(z) = \hat{\theta}(z) = \hat{K} + z\hat{\varphi}(1 - z\hat{T})^{-1}\hat{\psi}$$

est appelée aussi "*fonction de transmission* du système ouvert dual $\mathscr{B}(*, *)$".

Autrement dit, le système $\mathscr{A}(*)$ opère le mouvement dans un sens, et le système $\mathscr{B}(*, *)$ dans le sens inverse.

II. Théorème 1. *$\hat{\theta}(z)\,\theta(z) = I$ à condition que l'opérateur $S : H \to H$ existe et répond aux équations qui suivent:*

$$(1)\quad \begin{cases} (1.1) & \hat{\psi}\psi = S - \hat{T}ST \\ (1.2) & \hat{\varphi}ST + \hat{K}\psi = 0 \\ (1.3) & \hat{T}S\varphi + \hat{\psi}K = 0 \\ (1.4) & \hat{\varphi}S\varphi = 1 - \hat{K}K. \end{cases}$$

Preuve. $\hat{\theta}(z)\,\theta(z) = I$ équivaut à la relation

$$1 = \hat{K}K + \hat{K}\psi(z - T)^{-1}\varphi + z\hat{\varphi}(1 - z\hat{T})^{-1}\hat{\psi}K +$$

$$+ z\hat{\varphi}(1 - z\hat{T})^{-1}\hat{\psi}\psi(z - T)^{-1}\varphi,$$

à la suite de (1.1), nous avons

$$1 = \hat{K}K + \hat{K}\psi(z - T)^{-1}\varphi + z\hat{\varphi}(1 - z\hat{T})^{-1}\hat{\psi}K +$$

$$+ z\hat{\varphi}(1 - z\hat{T})^{-1}S(z - T)^{-1}\varphi - z\hat{\varphi}(1 - z\hat{T})^{-1}\hat{T}ST(z - T)^{-1}\varphi.$$

Les équations $z(z - T)^{-1} = T(z - T)^{-1} + I$, $z\hat{T}(1 - z\hat{T})^{-1} = (1 - z\hat{T})^{-1} - I$ donnent:

$$1 - \hat{K}K = \hat{K}\psi(z - T)^{-1}\varphi + z\hat{\varphi}(1 - z\hat{T})^{-1}\hat{\psi}K +$$

$$+ \hat{\varphi}(1 - z\hat{T})^{-1}S\varphi + \hat{\varphi}ST(z - T)^{-1}\varphi.$$

Avec (1.2), (1.3), (1.4) on parvient au but. ▨

Théorème 2. *$\theta(z)\,\hat{\theta}(z) = I$ à condition que l'opérateur $Q : H \to H$ existe et répond aux équations suivantes:*

$$(2)\quad \begin{cases} (2.1) & \varphi\hat{\varphi} = Q - TQ\hat{T} \\ (2.2) & \varphi\hat{K} + TQ\hat{\psi} = 0 \\ (2.3) & K\hat{\varphi} + \psi Q\hat{T} = 0 \\ (2.4) & \psi Q\hat{\psi} = 1 - K\hat{K}. \end{cases}$$

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 1.

Les conditions (1), (2) sont équivalentes à celles qui suivent:

(3) $$\mathscr{B}\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I_F \end{bmatrix}\mathscr{A} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I_E \end{bmatrix}$$

(4) $$\mathscr{A}\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_E \end{bmatrix}\mathscr{B} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_F \end{bmatrix}.$$

Les conditions (3) et (4) prouvent la S-similitude des systèmes ouverts (dilatations) $(*)$ et $(*,*)$. Les égalités (3) et (4) constituent, au fond, la loi énergétique de la conservation.

III. Le sous-espace

$$H_\varphi = \bigvee_{n\geqslant 0} T^n\overline{\varphi E} \quad (H_\psi^\wedge = \bigvee_{n\geqslant 0} \hat{T}^n\overline{\hat{\psi}F})$$

est appelé "*espace d'observation* du système $\mathscr{A}$ ($\mathscr{B}$)".

Le sous-espace

$$\tilde{H}_\varphi = \bigvee_{m\geqslant 0} T^{*m}\overline{\psi^* F} \quad (\tilde{H}_\varphi^\wedge = \bigvee_{m\geqslant 0} \hat{T}^{*m}\overline{\hat{\varphi}^* E})$$

est appelé "*espace de contrôle* du système $\mathscr{A}$ ($\mathscr{B}$)".

Dans le cas où l'espace H est égal

$$H = H_\varphi = \tilde{H}_\varphi^\wedge \quad (H = H_\psi^\wedge = \tilde{H}_\psi),$$

le système ouvert $\mathscr{A}$ ($\mathscr{B}$) est appelé "*système minimum* (*simple*)".

THÉORÈME 3. *Supposons que nos systèmes $\mathscr{A}(*)$ et $\mathscr{B}(*,*)$ sont des systèmes minimums, et que $z\mu \neq 1$ pour chaque point z, $(\mu) \in \mathbf{C}$ du spectre de l'opérateur T $(\hat{T})$.*

Alors, il existe l'opérateur borné $S(Q)$ qui répond aux équations (1) ((2)), *et $Q = S^{-1}$.*

Preuve. La résolution S de la relation (1.1) existe et est égale à

(5) $$S = -\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_R}\int_{C_R} \frac{(\mu - \hat{T})^{-1}\hat{\psi}\psi(z - T)^{-1}}{1 - \mu z}\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}z$$

où C_R est la courbe dans $\mathbf{C}$ qui contient les spectres des opérateurs T et $\hat{T}$. Après l'utilisation de cette résolution S, $\hat{\theta}(z)\theta(z) = 1$ conduit à l'équation qui suit:

$$1 - \hat{K}K = \hat{\varphi}S\varphi + (\hat{K}\psi + \hat{\varphi}ST)(z - T)^{-1}\varphi + z\hat{\varphi}(1 - z\hat{T})^{-1}(\hat{\psi}K + \hat{T}S\varphi).$$

Comme le système $\mathscr{A}$ est un système minimum, nous avons les équations (1.2)—(1.4). La preuve que Q existe et correspond à (2) est analogue.

Les conditions (3) et (4) conduisent à l'équation qui suit:

$$\begin{bmatrix} QS & 0 \\ 0 & I_F \end{bmatrix} \mathscr{A} = \mathscr{A} \begin{bmatrix} QS & 0 \\ 0 & I_E \end{bmatrix},$$

$TQS = QST$, $QS\varphi = \varphi$, $\psi QS = \psi$. Ces égalités démontrent que $Q = S^{-1}$. ▨

Exemple 1. Si $S = I_H$, on arrive aux relations suivantes:

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} T & |D_{T^*}|^{1/2} \\ J_T|D_T|^{1/2} & -T^* \end{bmatrix} : H \oplus \mathscr{D}_{T^*} \to H \oplus \mathscr{D}_T \tag{6}$$

où $D_{T^*} = 1 - TT^*$, $D_T = 1 - T^*T$, $J_T(J_{T^*}) = \operatorname{Sign}(D_T(D_{T^*}))$, $\mathscr{D}_T = \overline{D_T H}$, $\mathscr{D}_{T^*} = \overline{D_T H}$; et

$$\mathscr{B} = \begin{bmatrix} T^* & |D_T|^{1/2} \\ J_{T^*}|D_{T^*}|^{1/2} & -T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & J_{T^*} \end{bmatrix} \mathscr{A}^* \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & J_T \end{bmatrix} : H \oplus \mathscr{D}_T \to H \oplus \mathscr{D}_{T^*}. \tag{6'}$$

Dans la théorie des opérateurs, $\mathscr{A}$ (6) [1] est appelé la *colligation* (operator node); le système ouvert (*) [2] — la *dilatation* de T; et la fonction

$$\theta(z) = \theta_T(z) = -T^* + J_T|D_T|^{1/2}(z - T)^{-1}|D_{T^*}|^{1/2} : \mathscr{D}_{T^*} \to \mathscr{D}_T$$

— la *fonction caractéristique* de l'opérateur T. La fonction de transmission $\mathscr{B}$, dans notre cas, est égale à:

$$\hat{\theta}(z) = \theta_{T^*}(z) = -T + zJ_{T^*}|D_{T^*}|^{1/2}(1 - zT^*)^{-1}|D_T|^{1/2} : \mathscr{D}_T \to \mathscr{D}_{T^*}.$$

Les conditions $\hat{\theta}(z)\theta(z) = \mathrm{I}$, $\theta(z)\hat{\theta}(z) = I$ dans ce cas sont bien connues dans la théorie des colligations (dilatations), et sont souvent utilisées.

IV. Supposons qu'il y ait deux systèmes ouverts (*)

$$\mathscr{A}_1 = \begin{bmatrix} T_1 & \varphi_1 \\ \psi_1 & K_1 \end{bmatrix} : H_1 \oplus E \to H_1 \oplus F;$$

$$\mathscr{A}_1 \begin{bmatrix} x_n \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ v_n \end{bmatrix}; \qquad \xrightarrow{u_n} \boxed{x_n} \xrightarrow{v_n}$$

et

$$\mathscr{A}_2 = \begin{bmatrix} T_2 & \varphi_2 \\ \psi_2 & K_2 \end{bmatrix} : H_2 \oplus E' \to H_2 \oplus F';$$

$$\mathscr{A}_2 \begin{bmatrix} x'_n \\ u'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_{n+1} \\ v'_n \end{bmatrix}; \qquad \xrightarrow{u'_n} \boxed{x'_n} \xrightarrow{v'_n}.$$

Le système ouvert suivant:

$$\mathring{\mathscr{A}} = (I_{H_2} \oplus \mathscr{A}_1)(\mathscr{A}_2 \oplus I_{H_1}) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 & \varphi_1\psi_2 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \varphi_1 K_2 \\ \varphi_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \psi_1 & K_1\psi_2 \end{matrix} & K_1K_2 \end{bmatrix} :$$

$$: H_1 \oplus H_2 \oplus E' \to H_1 \oplus H_2 \oplus F$$

$$\xrightarrow{u'_n} \boxed{x'_n} \xrightarrow{v'_n = u_n} \boxed{x_n} \xrightarrow{v_n}$$

est appelé l'*adhésion* (coupling) *des systèmes* $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ lorsque $F' = E$. Il est évident que la fonction de transmission du système $\mathring{\mathscr{A}}$ est égale à:

$$\theta_{\mathring{T}}(z) = \theta_{T_1}(z)\theta_{T_2}(z).$$

Supposons ensuite que nos deux systèmes $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ répondent aussi aux conditions (3), (4)

$$\mathscr{B}_k \begin{bmatrix} S_k & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \mathscr{A}_k = \begin{bmatrix} S_k & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$\mathscr{A}_k \begin{bmatrix} S_k^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \mathscr{B}_k = \begin{bmatrix} S_k^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2.$$

Dans ce cas, le système $\mathring{\mathscr{A}}$ répond aux conditions analogues

$$\mathring{\mathscr{B}} \begin{bmatrix} \mathring{S} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \mathring{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} \mathring{S} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathring{\mathscr{A}} \begin{bmatrix} \mathring{S}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \mathring{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \mathring{S}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

où $\mathring{\mathscr{B}} = (\mathscr{B}_2 \oplus I_{H_1})(I_{H_2} \oplus \mathscr{B}_1)$ et $\mathring{S} = S_2 \oplus S_1$.

V. LEMME 1. *Supposons que l'opérateur*

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} : H_1 \oplus H_1 \to H_1 \oplus H_2,$$

et que S, S_{11} sont inversibles. Alors, S représente $S = VU$, où

$$V = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ S_{21}S_{11}^{-1} & S_{22} - S_{21}S_{11}^{-1}S_{12} \end{bmatrix}, \quad et \quad U = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

sont aussi inversibles.

La démonstration de ce lemme est évidente.

THÉORÈME DES FACTORISATIONS 4. *Supposons que nos systèmes $\mathscr{A}(*)$ et $\mathscr{B}(*, *)$ répondent aux conditions* (1) *et* (2); *en outre, $H = H_1 \oplus H_2$, $TH_1 \subset H_1$ $(T|H_k = T_k)$, $\hat{T}H_2 \subset H_2$ $(\hat{T}|H_k = \hat{T}_k)$. Supposons aussi qu'il existe des opérateurs $\hat{T}^{-1}|\overline{\hat{\psi}F}$ et K^{-1}.*

Alors la fonction de transmission $\theta_T(z)$ est le produit

$$\theta_T(z) = \theta_{T_1}(z)\,\theta_{T_2}(z),$$

$$\theta_{T_1}(z) = K_1 + \psi_1(z - T_1)^{-1}S_{11}^{-1}S\varphi K_2^{-1}, \tag{7}$$

$$\theta_{T_2}(z) = K_2 + K_1^{-1}\psi Q Q_{22}^{-1}(z - T_2)^{-1}\varphi_2,$$

où K_1, K_2 sont des opérateurs arbitraires $K_1K_2 = K$, et où $Q = S^{-1}$, $\psi_1 = \psi P_1$, $\varphi_2 = P_2\varphi$.

Preuve. Vu la relation $S = VU$ (Lemme 1), la condition (1.1) équivaut à la relation

$$V^{-1}\hat{\psi}\psi U^{-1} = I - V^{-1}\hat{T}VUTU^{-1}. \tag{8}$$

La fonction de transmission

$$\theta_T(z) = K + \psi(z - T)^{-1}\varphi = K + \tilde{\psi}(z - \tilde{T})\varphi,$$

$$\left(\tilde{\psi} = \psi U^{-1},\ \tilde{\varphi} = U\varphi,\ \tilde{T} = UTU^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_1 & \tilde{\Gamma} \\ 0 & \tilde{T}_2 \end{bmatrix}\right)$$

est représentée par:

$$\begin{aligned} \theta_T(z) = K &+ \tilde{\psi}_1 P_1(z - \tilde{T})^{-1}P_1\varphi + \tilde{\psi}P_2(z - \tilde{T})^{-1}P_2\tilde{\varphi} + \\ &+ \tilde{\psi}P_1(z - \tilde{T})^{-1}P_1\tilde{\Gamma}P_2(z - \tilde{T})^{-1}P_2\tilde{\varphi}, \end{aligned} \tag{9}$$

car

$$(z-\tilde{T})^{-1}=\begin{bmatrix}(z-\tilde{T}_1)^{-1} & (z-\tilde{T}_1)^{-1}\tilde{\Gamma}(z-\tilde{T}_2)^{-1}\\ 0 & (z-\tilde{T}_2)^{-1}\end{bmatrix}.$$

La condition (8) entraine la relation suivante:

$$P_1V^{-1}\hat{\psi}\tilde{\psi}P_2=P_1V^{-1}TVP_1\tilde{\Gamma}.$$

D'autre part, la condition (1.3)

$$V^{-1}\hat{T}V\tilde{\varphi}+V^{-1}\hat{\psi}K=0$$

et la relation précédente donnent

$$\tilde{\Gamma}=P_1\tilde{\varphi}K^{-1}\tilde{\psi}P_2.$$

Supposons que $K=K_1K_2$ et que chacun des opérateurs K_1^{-1} et K_2^{-1} existe. Après cela, la fonction $\theta_T(z)$ (9) représente

$$\theta_T(z)=(K_1+\tilde{\psi}P_1(z-T)^{-1}P_1\tilde{\varphi}K_2^{-1})(K_2+K_1^{-1}\tilde{\psi}P_2(z-T)^{-1}P_2\tilde{\varphi}).$$

Utilisant la forme triangulaire de V et U, nous avons

$$\theta_T(z)=(K_1+\psi_1(z-T_1)^{-1}S_{11}^{-1}S\varphi K_2^{-1})(K_2+K_1^{-1}\psi QQ_{22}^{-1}(z-T_2)^{-1}\varphi_2)$$

$$(\psi_1=\psi P_1,\ T_k=P_kTP_k,\ \varphi_2=P_2\varphi,\ S_{11}=P_1SP_1,\ Q=S^{-1},\ Q_{22}=P_2QP_2).\ ▨$$

REMARQUE 1. Dans le même temps, si nous supposons qu'il existe des opérateurs $T^{-1}\mid\overline{\varphi E}$ et $\hat{K}^{-1}$, la fonction de transmission $\theta_{\hat{T}}(z)$ sera, elle aussi, le produit $\theta_{\hat{T}}(z)=\theta_{\hat{T}_2}(z)\,\theta_{\hat{T}_1}(z)$,

$$\begin{aligned}&\theta_{\hat{T}_1}(z)=\hat{K}_1+z\hat{K}_2^{-1}\hat{\varphi}SS_{11}^{-1}(1-z\hat{T}_1)^{-1}\hat{\psi}_1,\\ (10)\qquad &\theta_{\hat{T}_2}(z)=\hat{K}_2+z\hat{\varphi}_2(1-z\hat{T}_2)^{-1}Q_{22}^{-1}Q\hat{\psi}\hat{K}_1^{-1}\end{aligned}$$

où $\hat{K}_1$, $\hat{K}_2$ sont des opérateurs arbitraires $\hat{K}=\hat{K}_2\hat{K}_1$ et où $\hat{\psi}_1=P_1\hat{\psi}$, $\hat{\varphi}=\hat{\varphi}P_2$.

REMARQUE 2. Admettons que les conditions du théorème 4 et de la remarque 1 sont respectées dans le même temps. La propriété $\hat{\theta}(z)\,\theta(z)=I$ est observée dans les factorisations $\theta(z)=\theta_1(z)\,\theta_2(z)$ et $\hat{\theta}(z)=\hat{\theta}_2(z)\,\hat{\theta}_1(z)$ pour les multiplicateurs $\theta_1(z)\hat{\theta}_1(z)$, $\hat{\theta}_1(z)\theta_1(z)=I$ (et $\hat{\theta}_2(z)\hat{\theta}_2(z)=I$), au cas où la solution $S_1=U_{11}=S_{11}$ est choisie pour le système (1), (et $S_2=V_{22}=S_{22}-S_{21}S_{11}^{-1}S_{12}$ pour $\hat{\theta}_2(z)$, $\theta_2(z)$)·

VI. Applications. Supposons que nous avons la fonction

$$\theta(z) = \theta_0 + \sum_{k=1}^{n} \theta_k (z - z_0)^{-k} : E \to E \tag{10'}$$

$z_0 \neq 0$. Démontrons que la fonction $\theta(z)$ se présente comme:

$$\theta(z) = \theta_0 + \psi(z - T)^{-1}\varphi.$$

Supposons que l'espace H soit égal à $H = \sum_{1}^{n} {}^{\oplus} E$, et que l'opérateur $\varphi: E \to H$ soit défini par la condition

$$\varphi\xi = (\theta_1\xi, \theta_2\xi, \ldots, \theta_n\xi), \quad \xi \in E.$$

Alors l'opérateur $T: H \to H$ est défini comme l'opérateur $T = z_0 I + N$, où

$$Nh = (\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, 0), \quad h = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in H,$$

et, enfin, $\psi : H \to E$ est choisi comme l'opérateur

$$\psi h = \xi_1, \quad h = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in H.$$

Il est évident que la fonction $\theta(z)$ (10') est égale à:

$$\theta(z) = \theta_0 + \psi(z - T)^{-1}\varphi, \tag{11}$$

parce que $(z - T)^{-1} = \sum_{k=1}^{n} N^{k-1}(z - z_0)^{-k}$.

Supposons aussi que la fonction $\theta(t)$ est inversible et que la fonction $\hat{\theta}(z) = \theta^{-1}(z)$ est égale à

$$\hat{\theta}(z) = \theta^{-1}(z) = \hat{\theta}_0 + \sum_{k=1}^{n} \hat{\theta}_k (1 - z\mu_0)^{-k} z^k, \tag{12}$$

$\mu_0 \neq 1$, $1 \neq \mu_0 z_0$. Alors la fonction $\hat{\theta}(z)$ a la forme:

$$\hat{\theta}(z) = \hat{\theta}_0 + z\hat{\varphi}(1 - z\hat{T})^{-1}\hat{\psi}. \tag{13}$$

Pour cela, il suffit de définir l'opérateur $\hat{T} = \mu_0 I + \hat{N}$ dans l'espace H:

$$\hat{N}h = \{0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}), \quad h = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in H,$$

et les opérateurs $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$ sont choisis comme les opérateurs

$$\hat{\psi}\xi = (\hat{\theta}_n\xi, \ldots, \hat{\theta}_1\xi), \quad \xi \in E$$

$$\hat{\varphi}h = \xi_n, \quad h = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in H.$$

Si les opérateurs θ_0 et $\hat{\theta}_0$ sont inversibles et si les systèmes ouverts correspondant aux fonctions $\theta(z)$, $\hat{\theta}(z)$ sont minimums, il ressort du Théorème 3 que les opérateurs S et $Q = S^{-1}$ qui correspondent à (1) et (2) existent.

Supposons que tous les opérateurs $S_k = P_kSP_k$ sont inversibles tout comme la résolution S (5), où P_k est la projection $(1 \leqslant k \leqslant n)$,

$$P_kh = (\xi_1, \ldots, \xi_k, 0, \ldots, 0), \quad h = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in H.$$

THÉORÈME 5. *Supposons que la fonction $\theta(z)$ (10′) est inversible et que $\theta^{-1}(z) = \hat{\theta}(z)$ est égale à (12), que la résolution S soit inversible tout comme $S_k = P_kSP_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, $\hat{\theta}_0$, θ_0 et que les systèmes ouverts correspondent aux $\theta(z)$, et que $\hat{\theta}(z)$ soit minimums.*

Alors, la fonction $\theta(z)$ est le produit

$$\theta(z) = \theta_n(z) \ldots \theta_1(z),$$

où $\theta_k(z) = \theta_0(K) + B_k(z - z_0)^{-1}, \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$

REMARQUE 3. Le fait que les systèmes ouverts $\mathscr{A} = \begin{bmatrix} T & \varphi \\ \psi & \theta_0 \end{bmatrix}$ et $\mathscr{B} = \begin{bmatrix} \hat{T} & \hat{\psi} \\ \hat{\psi} & \hat{\theta}_0 \end{bmatrix}$ sont minimums et que les opérateurs S_k sont inversibles apporte de nouvelles limitations aux coefficients $\{\theta_k\}_1^n$ et $\{\hat{\theta}_s\}_1^n$.

REMARQUE 4. Dans le cas général où

$$\theta(z) = \theta_0 + \sum_{k=1}^{N} \sum_{s=1}^{n_k} \frac{\theta_{k,s}}{(z - z_k)^s}$$

il faut utiliser la somme directe des constructions (11) pour des différents $\{z_k\}_1^n$.

ANNEXE

I. A titre d'application des résultats du §1, examinons le cas où la fonction de transmission $\theta(z)\colon E \to E$ est égale à

(A.1) $$\theta(z) = \int_0^{l} \exp(z + B_t)(z - B_t)\, b_t \, \mathrm{d}t$$

où B_t est la fonction inversible de la valeur d'opérateur dans l'espace Hilbert E, b_t est la mesure de la valeur d'opérateur dans le même espace E, (il n'est pas prévu que $B_t \geqslant 0$), $z \in \mathbf{C}$.

Supposons aussi que ces fonctions aient les propriétés suivantes:

$$\text{(A.2)} \qquad \int_0^l \varphi_t B_t B_t^* \varphi_t^* \mathrm{d}t < \infty, \quad \int_0^l \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi_x^{-1}) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi_x^{*-1})\,\mathrm{d}x < \infty$$

où φ_t est la solution de l'équation

$$\varphi_x' = -\varphi_x b_x, \quad \varphi_l = I,$$

c'est-à-dire $\varphi_x = \overset{\frown}{\int_x^l} \exp b_t \,\mathrm{d}t.$

Soit que $L_E^2(0, l)$ un espace de Hilbert. Si $f(x)$ est la fonction de la valeur de vecteur dans E pour *chaque* $x \in (0, l)$ et est telle que

$$\int_0^l < f(x), f(x) >_E \mathrm{d}x < \infty, \quad \text{alors } f(x) \in L_E^2(0, l).$$

Introduisons l'opérateur T dans $L_E^2(0, l)$

$$\text{(A.3)} \qquad (Tf)(x) = f(x)B_x + 2\int_x^l f(t)\, b_t \varphi_t^{-1}\,\mathrm{d}t\, \varphi_x B_x,$$

et introduisons l'opérateur $\varphi\colon E \to L_E^2(0, l)$

$$\text{(A.4)} \qquad \varphi h = h\varphi_x B_x$$

pour chaque $h \in E$. Supposons que l'opérateur $\psi\colon L_E^2(0, l) \to E$ est défini par la formule qui suit:

$$\text{(A.4')} \qquad \psi f(x) = 2\int_0^l f(t) b_t \varphi_t^{-1} \varphi_0 \,\mathrm{d}t$$

et que l'opérateur K est definit dans E par l'égalité

$$\text{(A.5)} \qquad Kh = h\varphi_0, \quad (h \in E).$$

THÉORÈME A.1. *La fonction de transmission* $\theta(z) = K + \psi(z - T)^{-1}\varphi$, *où les opérateurs* T, φ, ψ, K *sont définis par les égalités* (A.3)—(A.5) *et représente* (A.1).

La preuve de ce théorème est évidente.

II. Dans l'autre cas, supposons que la fonction de transmission $\hat{\theta}(z)$ dans E est égale à:

$$\hat{\theta}(z) = \int_0^{l\,\curvearrowright} \exp(1 + zA_t)(1 - zA_t)^{-1}a_t\,\mathrm{d}t \tag{A.6}$$

où les fonctions A_t, a_t répondent aux conditions analogues à celles du cas précédent.

Introduisons dans $L_E^2(0, l)$ l'opérateur

$$(\hat{T}f)(x) = f(x)A_x + 2\int_0^x f(t)a_t\psi_t^{-1}\,\mathrm{d}t\,\psi_x A_x, \tag{A.7}$$

où la fonction ψ_x est la solution de l'équation

$$\psi_x' = \psi_x a_x, \quad \psi_0 = 1 \quad \left(\psi_x = \int_0^{x\,\curvearrowright} \exp a_t\,\mathrm{d}t\right)$$

et, outre cela,

$$\int_0^l \psi_t A_t A_t^* \psi_t^*\,\mathrm{d}t < \infty, \quad \int_0^l \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi_t^{-1})\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\psi_t^{*-1}\right)\mathrm{d}t < \infty. \tag{A.8}$$

Supposons que $\psi: E \to L_E^2(0, l)$ est égale à:

$$\hat{\psi}h = h\psi_t a_t \quad (h \in E) \tag{A.9}$$

et que l'opérateur $\hat{\varphi}: L_E^2(0, l) \to E$ est défini par l'égalité suivante:

$$\hat{\varphi}f = 2\int_0^l f(t)a_t\psi_t^{-1}\psi_l\,\mathrm{d}t. \tag{A.10}$$

Supposons enfin que $\hat{K}: E \to E$ est égal à:

$$\hat{K}h = h\psi_l\,. \tag{A.11}$$

THÉORÈME A.2. *La fonction de transmission* $\hat{\theta}(z) = \hat{K} + z\hat{\varphi}(1 - z\hat{T})^{-1}\hat{\psi}$, *où les opérateurs* $\hat{T}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$, $\hat{K}$ *sont définis par les égalités* (A.7) — (A.11) *et qui représente* (A.6).

III. Supposons que $A_x = e^\alpha$ et que $B_x = e^\beta$, où α, β sont les constantes dans **C**. Nous cherchons la solution de l'équation (1.1) $S - \hat{T}ST = \hat{\psi}\psi$ sous la forme suivante:

$$(Sf)(x) = \int_0^l f(t) b_t \varphi_t^{-1} S(x, t)\, dt\, \psi_x, \tag{A.12}$$

où $S(x, t)$ est la fonction de la valeur d'opérateur dans E pour chaque $x, t \in [0, l]$.

Les calculs nous donnent l'équation suivante pour $S(x, t)$:

$$\begin{aligned}(e^{\beta-\alpha} - 1)\, S(x,t) + 2e^\beta \int_0^t F_\xi S(x, \xi)\, d\xi + 2e^\alpha \int_0^x S(\xi, t)\, G_\xi\, d\xi + \\ + 4e^{\beta+\alpha} \int_0^x dy \int_0^t d\xi\, F_\xi\, S(y, \xi)\, Gy + 2\varphi_0 e^\alpha = 0\end{aligned} \tag{A.13}$$

où $F_t = \varphi_t b_t \varphi_t^{-1}$ et $G_x = \psi_x a_x \psi_x^{-1}$.

Cette équation intégrale est équivalente au problème de Cauchy qui suit:

$$\left\{\begin{aligned} &\gamma \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial t} S(x,t) + 2\, e^\beta F_t \frac{\partial}{\partial x} S(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} S(x, t)\, 2e^\alpha G_x + \\ &\qquad + 4\, e^{\beta+\alpha} F_t S(x, t)\, G_x = 0 \\ &\gamma \frac{\partial}{\partial x} S(x, 0) + 2\, e^\alpha S(x, 0)\, G_x = 0 \\ &\gamma S(0, 0) + 2\varphi_0 e^\alpha = 0, \quad \gamma = e^{\beta+\alpha} - 1. \end{aligned}\right. \tag{A.14}$$

Si $\gamma = 1$, l'opérateur $B(x, t)$ qui est égal à

$$B(x, t) = \overset{\frown}{\int_0^t} \exp 2e^\beta F_\xi\, d\xi\; S(x,t) \overset{\frown}{\int_0^x} \exp 2e^\alpha G(y)\, dy$$

répond à la tâche suivante:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x\, \partial t} B(x, t) = 0, \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial x} B(x, 0) = \dfrac{\partial}{\partial t} B(0, t) = 0, \quad B(0,0) = -\, 2\varphi_0 e^\alpha \end{cases}$$

et de ce fait $B(x, t)$ est égal à:

$$B(x, t) = -2\varphi_0 e^\alpha.$$

Alors, si nous désignons par $\overset{t}{\underset{0}{\widehat{\int}}} \exp 2e^\beta F_\xi = N^{-1}(t)$ et $\overset{x}{\underset{0}{\widehat{\int}}} \exp 2\, e^\alpha\, G(y)\, dy = M^{-1}(x)$,

nous arrivons à la solution suivante de $S(x, t)$:

$$S(x, t) = -2e^\alpha N_t \varphi_0 M_x. \tag{A.15}$$

Les opérateurs N_t et M_x existent comme les solutions des tâches suivantes:

$$N_t' = -\, 2e^\beta F_t N_t, \quad N_0 = I;$$

$$M_x' = -\, M_x\, 2e^\alpha G_x, \quad M_0 = I.$$

THÉORÈME A.3. *Supposons que* $e^{\beta+\alpha} = 2$, *que l'opérateur* S (A.12) *(où le noyau est égal à* (A.15)) *répond à la condition* (1.1) $S - \hat{T}ST = \hat{\psi}\psi$, *alors le noyau* $S(x, t)$ *définira d'une manière unique les mesures*

$$b_t = \frac{1}{1 - 2e^\beta} \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t^{-1} S(x, t) \right] S^{-1}(x, t)\, \varphi_t$$

$$a_x = \frac{1}{1 - 2e^\alpha}\, \psi_x^{-1} S(x, t) \left[\frac{\partial}{\partial x} S^{-1}(x, t)\, \psi_x \right].$$

Il en découle que les mesures d'opérateur des intégrales multiplicatives (A.1) et (A.6) sont définies d'une manière unique par l'opérateur S. Cela veut dire que les chaînes des sous-espaces invariants pour $T(\hat{T})$ correspondent d'une façon biunivoque aux solutions S de l'équation (1.1).

2. CONSTRUCTION DES INVERSIBLES DANS L'ESPACE $L^2(0, l)$. RENSEIGNEMENTS PRÉLIMINAIRES

THÉORÈME 6. [4]. *Tout opérateur borné* S *dans l'espace* $L^2(0, l)$ *se présente comme suit:*

$$(Sf)(x) = \frac{d}{dx} \int_0^l S(x, t)\, f(t)\, dt, \tag{14}$$

où la fonction $S(x, t) \in L^2(0, l)$ *pour chaque valeur fixe* $x \in [0, l]$.

REMARQUE 5. [4]. La fonction $S(x, t)$ peut être choisie de façon que

$$S(a, t) = 0 \quad \int_0^l |S(x + \Delta x, t) - S(x, t)|^2 \, dt \leqslant \|S\|^2 \cdot |\Delta x|^2 \tag{15}$$

où a est un certain l'intervalle $[0, l]$.

Les preuves du théorème 6 et de la remarque 5 sont présentées dans l'article de L. A. Sahnovič [4].

Nous utiliserons dans la suite les formes suivantes des opérateurs dans $L^2(0, l)$:

THÉORÈME 7. *Tout opérateur borné S dans l'espace $L^2(0, l)$ représente:*

$$(Sf)(x) = e^{-x} \frac{d}{dx} \int_0^l S(x, t) \, e^{-t} f(t) \, dt \tag{16}$$

où la fonction $S(x, t) \in L^2(0, l)$ pour chaque valeur fixe $x \in [0, l]$.

La preuve de ce théorème (tout comme celle du théorème suivant) est évidente.

THÉORÈME 8. *Tout opérateur borné Q dans $L^2(0, l)$ apparaît comme:*

$$(Qf)(x) = e^{x} \frac{d}{dx} \int_0^l Q(x, t) \, e^{t} f(t) \, dt \tag{17}$$

où la fonction $Q(x, t) \in L^2(0, l)$ pour chaque valeur fixe $x \in [0, l]$.

REMARQUE 6. Comme dans le cas précédent (remarque 5) les fonctions $S(x, t)$ et $Q(x, t)$ peuvent être choisies de la même façon (15) (où, par exemple, $a = l$ et nous avons que $Q(l, t) = 0$).

1. CAS DU SPECTRE À UN POINT T ET $\hat{T}$. Nous considérons deux opérateurs T et $\hat{T} = T^*$ dans l'espace $L^2(0, l)$:

$$\begin{aligned} (Tf)(x) &= f(x) - 2 \int_x^l e^{x-t} f(t) \, dt \\ (\hat{T}f)(x) &= f(x) - 2 \int_0^x e^{t-x} f(t) \, dt. \end{aligned} \tag{18}$$

Si nous définissons les opérateurs $\varphi\colon \mathbf{C} \to L^2(0, l)$ et $\psi\colon L^2(0, l) \to \mathbf{C}$ au moyen des égalités suivantes:

$$\varphi\lambda = \sqrt{2}\, e^{x-l}\lambda \qquad \left((\varphi^* f)(t) = \sqrt{2}\int_0^l f(t) e^{t-l}\, dt\right)$$

$$\psi f(x) = \sqrt{2}\int_0^l f(t) e^{-t}\, dt \qquad (\psi^*\lambda = \sqrt{2}\,\lambda\, e^x),$$

$\lambda \in \mathbf{C}$, nous avons la colligation [3, 4]

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} T & \varphi \\ \psi & K \end{bmatrix} : L^2(0, l) \oplus \mathbf{C} \to L^2(0, l) \oplus \mathbf{C},$$

où $K\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est égal à $K\lambda = e^{-l}\lambda$.

Supposons que nous avons un opérateur borné dans l'espace $L^2(0, l)$ ayant la forme (16) (théorème 7):

$$(Sf)(x) = e^{-x}\frac{d}{dx}\int_0^l S(x, t) f(t)\, e^{-t}\, dt,$$

et que le noyau $S(x, t)$ soit égal à:

$$S(x, t) = e^{x+t} S(x - t).$$

THÉORÈME 9. *L'opérateur d'intégrale suivant*

$$(Sf)(x) = e^{-x}\frac{d}{dx}\int_0^l e^{x+t} S(x - t) f(t)\, e^{-t}\, dt \tag{19}$$

répond à la condition

$$(S - \hat{T}ST) f(x) = 2\int_0^l f(t)\,(N(t)\, e^{-x} + M(x)\, e^{-t})\, dt, \tag{20}$$

où T et $\hat{T}$ sont définis par les formules (18) *et les fonctions sont égales*

$$N(t) = -\hat{T}S(-t) = -S(-t) + 2\int_0^t e^{\xi - t}\, d\xi, \quad M(x) = S(x).$$

Preuve. Les calculs montrent que

$$(S - \hat{T}ST)f(x) = 2e^{-x}\int_0^l \{S(x,t) - S(0,t) - 2\int_0^t [S(x,\xi) - S(0,\xi)]\,d\xi\}\,e^{-t}f(t)\,dt +$$

$$+ 2\,e^{-x}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^l\int_0^t S(x,\xi)\,d\xi\,f(t)\,e^{-t}\,dt,$$

où $S(x,t) = e^{x+t}S(x,t)$.

Simplifions la dernière intégrale:

$$\int_0^t S(x,\xi)\,d\xi = \int_0^t S(x-\xi)\,e^{x+\xi}\,d\xi.$$

Si η soit est à $\eta = x - \xi$, alors nous avons

$$= \int_{x-t}^{x} e^{2x-\eta}S(\eta)\,d\eta.$$

Cette fonction a la dérivée selon le variable x, d'où:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^l\int_0^t S(x,\xi)\,d\xi\,f(t)\,e^{-t}\,dt = \int_0^l [e^x S(x) - S(x,t) + 2\int_0^t S(x,\xi)\,d\xi] e^{-t}f(t)\,dt.$$

Maintenant, nous avons l'égalité:

$$(S - \hat{T}ST)f(x) = 2\,e^{-x}\int_0^l \{-e^t S(-t) + e^x S(x) + 2\int_0^t S(-\xi)e^{\xi}\}e^{-t}f(t)\,dt$$

mais cette équation est précisément ce qu'il fallait démontrer. ▨

COROLLAIRE 1. *Si l'opérateur $Q = S^{-1}$ existe, alors l'opérateur Q répond à l'égalité*

(21) $$(Q - TQ\hat{T})f(x) = 2\,e^x\int_0^l e^t f(t)\,\varphi(x,t)\,dt,$$

où

$$\varphi(x, t) = \overline{N_1(t)}\, M_1(x) + \overline{N_2(t)}\, M_2(x),$$

(21)
$$- S(-t) = S^* e^t N_1(t), \quad e^{-t} = T^* S^* N_2(t)\, e^t,$$

$$e^{-x} = ST^{-1} e^x M_1(x), \quad S(x) = ST^{-1} e^x M_2(x).$$

Preuve. Supposons que $STf = g$, alors, après le remplacement opéré dans (20) et après l'application de TQ dans l'égalité (20), nous obtenons l'équation suivante:

$$(Q - TQ\hat{T})\, g(x) = 2\int_0^l (T^{-1}Qg)(t)\, \{N(t)(TQe^{-x})(x) + e^{-t}(TQM_x)(x)\}\, dt.$$

Si nous désignons

(21')
$$\begin{aligned}(Q^* T^{*-1} N)(t) &= e^t N_1(t)\\ (Q^* T^{*-1} e^{-t})(t) &= e^t N_2(t)\\ (TQe^{-x})(x) &= e^x M_1(x)\\ (TQM(x))(x) &= e^x M_2(x)\end{aligned}$$

nous obtenons le résultat voulu.

THÉORÈME 10. *Supposons que l'opérateur Q soit borné dans l'espace $L^2(0, l)$ et répond à l'égalité suivante:*

(22)
$$(Q - TQ\hat{T}) f(x) = 2\, e^x \int_0^l \varphi(x, t) f(t)\, e^t\, dt.$$

Alors la fonction suivante:

(23)
$$G(x, t) = \frac{1}{2} \int_{2l - |x-t|}^{x+t} e^{\xi - x - t} \varphi\left(\frac{\xi + x - t}{2}, \frac{\xi - x + t}{2}\right) d\xi$$

est absolument continue par la variable t et l'opérateur Q se présente comme suit:

(24)
$$(Qf)(x) = e^x \frac{d}{dx} \int_0^l f(t)\, e^t \frac{\partial}{\partial t} G(x, t)\, dt.$$

Preuve. L'opérateur Q étant borné, il ressort du théorème 8 que Q a la forme suivante:

$$Qf = e^x \frac{d}{dx} \int_0^l Q(x, t) f(t)\, e^t\, dt$$

où $Q(x, t)$ répond à la condition $Q(l, t) = 0$ et à la condition (15). De la condition (15), il ressort que l'intégrale $\int_0^l F(x, \xi)\, d\xi$ est continue par le variable x. De ce fait, il existe la fonction

$$Q_1(x, t) = \int_x^l \int_t^l Q(x', t')\, dx'\, dt'.$$

Supposons que $\varphi_1(x, t) = \int_x^l \varphi(x', t)\, dx'$, alors l'équation (22) conduit, après l'application de l'intégrale $\int_x^l \cdot\, dx'$, à l'égalité suivante:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right) Q_1(x, t) + 2\, Q_1(x, t) = \varphi_1(x, t) \tag{25}$$

et, d'autre part, $Q_1(x, t)$ répond aux conditions initiales qui suivent:

$$Q_1(l, t) = Q_1(x, l) = 0. \tag{25'}$$

La tâche (25), (25') a la solution unique,

$$Q_1(x, t) = \frac{1}{2} \int_{2l-|x-t|}^{x+t} e^{\tau-x-t} \varphi_1\left(\frac{\tau + x - t}{2}, \frac{\tau - x + t}{2}\right) d\tau.$$

Cette formule peut être présentée comme suit:

$$Q_1(x, t) = \int_{l-x+t}^{t} e^{2(\xi-t)} \varphi_1(\xi + x - t, \xi)\, d\xi \quad (x \geqslant t)$$

$$Q_1(x, t) = \int_{l}^{t} e^{2(\xi-t)} \varphi_1(\xi + x - t, \xi)\, d\xi \quad (x \leqslant t).$$

Car $\dfrac{\partial}{\partial x}\varphi_1(x,t) = -\varphi(x,t)$, nous avons que

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = -\int\limits_{l-x+t}^{t} e^{2(\xi-t)}\varphi(\xi+x-t,\xi)\,d\xi \quad (x \geqslant t)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \int\limits_{t}^{l} e^{2(\xi-t)}\varphi(\xi+x-t,\xi)\,d\xi \quad (x \leqslant t).$$

L'union de ces représentations dans une formule donne:

$$\frac{\partial}{\partial x} Q_1(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_{2l-|x-t|}^{x+t} e^{\xi-x-t}\varphi\left(\frac{\xi+x-t}{2},\ \frac{\xi-x+t}{2}\right)d\xi.$$

Pour obtenir le but recherché, il faut utiliser la condition $Q = -\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial t} Q_1(x,t)$. ▨

Conclusion 1. Pour construire l'opérateur inversible $Q = S^{-1}$ dans tout l'espace $L^2(0,l)$, il est nécessaire de calculer Q et Q^* (c'est-à-dire construire les inversibles des S et S^*) pour quatre fonctions seulement (l'opérateur Q — pour e^{-x} et $S(x)$, et Q^* — pour $S(-x)$ et $T^{*-1}e^{-x}$). Ensuite, construire le noyau $\varphi(x,t) = \sum_{k=1}^{2} \overline{N_k(t)}\, M_k(x)$ pour les fonctions $\{N_k(t)\, M_k(x)\}^2$ et utiliser la construction (23), (24) du théorème 10.

II. Cas du spectre continu T et $\hat{T}$. Supposons que nous avons maintenant deux opérateurs dans $L^2(0,l)$

$$(26)\qquad \begin{aligned}(Tf)(x) &= f(x) - 2\alpha(x)\int\limits_x^l f(t)\,dt\\ (\hat{T}f)(x) &= f(x) - 2\beta(x)\int\limits_0^x f(t)\,dt\end{aligned}$$

où $\alpha(x) > 0$ et $\beta(x) > 0$ (par exemple) pour chaque valeur $x \in [0,l]$.

Etudions dans ce cas l'opérateur

$$(Sf)(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^l S(x,t) f(t)\,dt,$$

où $S(x, t)$ dépend des variables x et t de manière suivante:

(27)
$$S(x,t) = \exp(u_x + v_t)\, S(u_x - v_t),$$
$$u_x = \int_0^x \beta(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \quad v_t = \int_0^t \alpha(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

THÉORÈME 11. *L'opérateur borné S (14), (27) répond à la condition suivante:*

(28)
$$(S - \hat{T}ST)f(x) = 2\int_0^l f(t)\,(M(x) + \beta(x)N(t))\,\mathrm{d}t,$$

où $\hat{T}$, T sont définis par les formules (26) et

$$M(x) = \beta(x)\, \mathrm{e}^{u_x} S(u_x),$$
$$N(t) = -\mathrm{e}^{v_t} S(-v_t) + 2\int_0^t \mathrm{e}^{v_\xi} S(-v_\xi)\, \alpha(\xi)\, \mathrm{d}\xi = -\, T^* \mathrm{e}^{v_t} S(-v_t).$$

COROLLAIRE 2. *Si l'opérateur $Q = S^{-1}$ existe, alors l'opérateur Q répond à l'égalité:*

$$(Q - TQ\hat{T})f = 2\int_0^l f(t)\, \varphi(x,t)\, \mathrm{d}t,$$

où

(29)
$$\varphi(x,t) = \overline{N_1(t)}\, M_1(x) + \overline{N_2(t)}\, M_2(x)$$
$$T^*S^*N_1(t) = 1, \quad S^*N_2(t) = -\,\mathrm{e}^{v_t} S(-v_t)$$
$$ST^{-1}M_1(x) = \beta(x)\, \mathrm{e}^{u_x} S(u_x), \quad ST^{-1}M_2(x) = \beta(x).$$

THÉORÈME 12. *Supposons que l'opérateur borné Q répond à l'égalité suivante:*

$$(Q - TQ\hat{T})f = 2\int_0^l \varphi(x,t) f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Alors le noyau

$$G(x,\ y) = \tag{30}$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{u_0+v_0+\theta(-u_x+u_0+v_t-v_0)}^{u_x+v_t} e^{\xi-u_x-v_t}\varphi\left(\frac{\xi+u_x-v_t}{2}, \frac{\xi-u_x+v_t}{2}\right)\beta^{-1}\left(x\left(\frac{\xi+u_x-v_t}{2}\right)\right) d\zeta$$

est une fonction absolument continue selon la variable t, et l'opérateur Q se présente comme suit:

$$(Qf)(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^l f(t)\frac{1}{\alpha(t)}\frac{\partial}{\partial t}G(x,\ t)\,dt \tag{31}$$

où $\tilde{\varphi}(u, v) = \varphi(x(u),\ t(v))$, $x(u)\,(t(v))$ *est la fonction inversible pour* $u_x = \int\limits_0^x \beta(\xi)\,d\xi \left(v_t = \int\limits_0^t \alpha(\xi)\,d\xi\right)$ *et* $u_0 = u_l$, $v_0 = v_l$, *et* $\theta = \operatorname{sign}\left(u_x - v_t + \sqrt{\frac{v_0-u_0}{2}}\right)$.

Conclusion 2. Pour définir S^{-1}, où S est représenté par les formules (14), (27), il faut trouver le noyau $\varphi(x,t)$. Cela veut dire qu'il suffit de calculer $Q = S^{-1}$, Q^* pour quatre fonctions seulement: $\beta(x)\,e^{u_x}S(u_x)$, $\beta(x)$, $(T^{*-1}1)(x)$ et $e^{v_t}S(-v_t)$.

Exemple 2. Supposons que $\beta(x) = \dfrac{1}{x+1}$, et $\alpha(t) = \dfrac{1}{t+1}$. Alors dans ce cas nous avons que $u_x = \log_e(x+1)$, $v_t = \log_e(t+1)$. De ce fait, le noyau sera égal à:

$$S(x,t) = (x+1)\,(t+1)\ S\left(\log_e\left(\frac{x+1}{t+1}\right)\right).$$

Nous pouvons construire l'opérateur de la même manière quand les noyaux sont égaux à:

$$S(x,t) = f(x)\,g(t)\,S\left(\log_e\frac{f(x)}{g(t)}\right)$$

où $f(x), g(t)$ ($\geqslant 0$ dans $[0,l]$) sont des fonctions arbitraires.

III. Cas des opérateurs T et $\hat{\mathrm{T}}$ de deuxième ordre. Dans cette partie, nous étudions de manière analogue la possibilité d'inverser l'opérateur S dans

$L^2(0, l)$, quand T et $\hat{T}$ sont définis par les égalités suivantes:

$$(35)\qquad \begin{aligned}(Tf)(x) &= f(x) - \alpha\int_x^l (t - x)\, d(t)\, \mathrm{d}t\\ (\hat{T}f)(x) &= f(x) - \beta\int_0^x (x - t) f(t)\, \mathrm{d}t\end{aligned}$$

où α, β $(< \infty)$ sont constants. Il existe trois situations différentes, à savoir:

1) $\alpha\beta > 0$, dans ce cas les signes de α et de β sont identiques (par exemple, nous supposerons que $\alpha > 0$ et $\beta > 0$);

2) $\alpha\beta < 0$, dans ce cas les signes de α et de β sont différents (nous supposerons aussi que $\alpha > 0$ et $\beta < 0$);

3) $\alpha\beta = 0$, (si $\alpha = \beta = 0$ dans le même temps, ce cas ne présente pas d'intérêt) Supposons que $\alpha = 0$, mais $\beta \neq 0$, par exemple.

Nous appellerons le cas 1) — le cas elliptique, le cas 2) — le cas hyperbolique, et enfin le cas 3) — le cas dégénéré.

Examinons chacun de ces cas séparément.

A. Au début, nous étudions le cas dégénéré $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ (ce cas est plus simple que les autres).

THÉORÈME 13. *Supposons que nous avons l'opérateur S dans $L^2(0, l)$*

$$(36)\qquad (Sf)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^l S(x, t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$$

où le noyau $S(x, t) = P(x)\, R(t)$, $P(x)$, $R(t)$ sont des fonctions arbitraires. Alors S répond à l'égalité suivante:

$$(37)\qquad (S - \hat{T}ST)\, f(x) = \beta\int_0^l f(t)\;\; R(t)\, M(x)\, \mathrm{d}x$$

où T, $\hat{T}$ sont définis (35) $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, *et* $M(x) = \int_0^x P(\xi)\, \mathrm{d}\xi - xP(0)$.

COROLLAIRE 3. *Si l'opérateur $Q = S^{-1}$ existe, nous avons l'égalité qui suit:*

$$(Q - TQ\hat{T})f = \int_0^l f(t)\, N_1(t)\, M_1(x)\, \mathrm{d}x.$$

où $N_1(t) = S^* R(t)$, $M(x) = SM_1(x)$.

THÉORÈME 14. *Supposons que l'opérateur borné Q répond aux équations suivantes:*

$$(Q - TQ\hat{T})f = \beta \int_0^l \varphi(x, t)\, f(t)\, \mathrm{d}t. \tag{38}$$

Alors le noyau

$$G(x, t) = -\int_x^l \varphi(x', t)\, \mathrm{d}x'$$

est la fonction pour laquelle $\frac{\partial}{\partial t} G(x, t)$ *sera une fonction absolument continue selon* t, *et* Q *se présente comme suit:*

$$(Qf)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^l f(t) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} G(x, t)\, \mathrm{d}t. \tag{39}$$

Les preuves des théorèmes 13, 14 sont évidentes.

Dans notre cas (36) nous avons

$$(Qf)(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^l f(t)\, N_1''(t) \int_x^l M_1(\xi)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}t.$$

CONCLUSION 3. Il s'ensuit qu'il doit exister à priori une deuxième dérivée pour la fonction $(S^*R)(t)$. Autrement dit, pour trouver S^{-1} pour S (23), il suffit d'inverser S sur la fonction $M(x)$ seulement.

B. Examinons maintenant le cas hyperbolique $\alpha = a^2$, $\beta = -b^2$. Supposons que l'opérateur S dans $L^2(0, l)$ est égal à:

$$(Sf)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^l S(x, t) f(t)\, \mathrm{d}t$$

et que le noyau $S(x, t)$ représente:

$$S(x, t) = \int_G \exp\left[\frac{ta}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{xb}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\right] \varphi(\lambda) \mathrm{d}\lambda. \tag{40}$$

La fonction $\varphi(\lambda)$ est une fonction arbitraire (ou une distribution) et G est un certain sous-ensemble de-**R** (G peut contenir les points "0" et "∞", cela dépend de la fonction $\varphi(\lambda)$).

REMARQUE 6. Si $\varphi(\lambda) \in C_0(\mathbf{R})$ (par exemple), alors la fonction $S(x, t)$ est la solution de l'équation:

$$\left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) S(x, t) = S(x, t). \tag{41}$$

THÉORÈME 15. *L'opérateur S (25), (40) répond à l'égalité suivante:*

$$(S - \hat{T}ST)\, f(x) = a^2b^2 \int_0^l f(t)\, \{x\tilde{N}(t) + N(t) + M(x) + t\tilde{M}(x)\}\, dt, \tag{42}$$

où T, $\hat{T}$ sont définis par (35) $(\alpha > 0,\ \beta < 0)$ *et*

$$N(t) = S_2(t) - \int_0^t (t - \tau)\, S_1(\tau)\, d\tau; \quad \tilde{N}(t) = + \frac{1}{a^2} S(0, t) - \int_0^t (t - \tau)\, S(0, \tau) d\tau;$$

$$M(x) = - S_3(x); \ \tilde{M}(x) = - S_4(x), \tag{43}$$

(quant à $\{S_k\}_1^4$ voir la suite (44)).

$$S_1(t) = \int_G \exp\left\{\frac{ta}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\right\} \cdot \frac{2\lambda}{b(\lambda^2 - 1)} \cdot \varphi(\lambda)\, d\lambda;$$

$$S_2(t) = \int_G \exp\left\{\frac{ta}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\right\} \frac{2\lambda}{a^2b(\lambda^2 - 1)}\, \varphi(\lambda)\, d\lambda;$$

$$S_3(x) = \int_G \exp\left\{\frac{xb}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\right\} \cdot 4\lambda^2\, \frac{(\lambda^2 - 1) + 2b\lambda}{b^2a^2(\lambda^2 + 1)^2(\lambda^2 - 1)} \cdot \varphi(\lambda)\, d\lambda; \tag{44}$$

$$S_4(x) = \int_G \exp\left\{\frac{xb}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\right\} \cdot 2\lambda\, \frac{\lambda^2 - 1 + 2\lambda b}{ab^2(\lambda^4 - 1)} \cdot \varphi(\lambda) d\lambda.$$

COROLLAIRE 4. *Si l'opérateur $Q = S^{-1}$ existe, alors nous avons:*

$$(Q - TQ\hat{T})\, f(x) = a^2b^2 \int_0^l \varphi(x, t)\, f(t)\, dt \tag{45}$$

où $\varphi = \sum_{k=1}^{4} \overline{N_k(t)}\, M_k(x)$, *et ensuite*

$$N(t) = T^*S^*N_1(t); \quad \tilde{N}(t) = T^*S^*N_2(t);$$

$$1 = T^*S^*N_3(t); \quad t = T^*S^*N_4(t); \quad 1 = ST^{-1}M_1(x);$$

$$x = ST^{-1}M_2(x); \quad 1 = ST^{-1}M_3(x); \quad M(x) = ST^{-1}M_4(x).$$

THÉORÈME 16. *Supposons que l'opérateur* Q *dans* $L^2(0, l)$

$$(Qf)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^l Q(x,t) f(t)\, \mathrm{d}t, \quad Q(l,t) = 0$$

répond à l'égalité suivante:

$$(Q - TQ\hat{T}) f(x) = a^2 b^2 \int_0^l \varphi(x,t) f(t)\, \mathrm{d}t \tag{46}$$

et que $a = b$. *Alors la fonction*

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{a^2}{2} \displaystyle\int_x^l \mathrm{d}y \int_{t-x-y}^{t+x+y} \int_y^l \varphi(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\xi\, J_0\left(a\sqrt{l^2-(x-y)^2+(t-\tau)^2}\right) \mathrm{d}\tau & (x \leqslant t) \\ \dfrac{a^2}{2} \displaystyle\int_t^l \mathrm{d}\tau \int_{x+t-\tau}^{x-t+\tau} \int_y^l \varphi(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\xi\, J_0\left(a\sqrt{l^2-(t-\tau)^2+(x-y)^2}\right) \mathrm{d}y & (x \geqslant t) \end{cases} \tag{47}$$

a la dérivée $\dfrac{\partial^4}{\partial x^2\, \partial t^2}$ *et l'opérateur* Q *a la forme*

$$(Qf)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^l f(t) \frac{\partial^4}{\partial x^2\, \partial t^2} G(x,t)\, \mathrm{d}t, \tag{48}$$

où $J_0(z)$ *est la fonction de Bessel d'ordre zéro.*

REMARQUE 7. La supposition $a = b$ n'a pas d'importance, elle est imposée dans l'unique but de simplifier la formule (47).

REMARQUE 8. Variant la fonction $\varphi(\lambda)$ dans la formule (10) (ou en choisissant des solutions de l'équation (41) dans des classes de fonctions plus larges), nous avons des noyaux différents pour l'opérateur S. Notons que si le noyau de l'opérateur initial S est une solution de l'équation homogène (41), pour trouver le noyau de l'opérateur inversible S^{-1} il faudra résoudre l'équation hétérogène double.

CONCLUSION 4. L'analyse des résultats des théorèmes 10—11 permet d'affirmer que pour construire $Q = S^{-1}$ dans le cas hyperbolique (si S est défini par la formule (40)), il suffit d'inverser S sur huit fonctions seulement $\{N_k, M_k\}_1^4$, (45).

C. Etudions enfin le cas elliptique. Nous avons $\alpha = a^2$, $\beta = b^2$. Supposons que $a = b = 1$

$$(Sf)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^l S(x, t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

où le noyau est égal à:

$$S(x, t) = \iint_{\mathscr{D}} I_0(r)\,\varphi(\xi, \eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta. \tag{49}$$

La fonction $I_0(z)$ est la fonction de Bessel d'argument imaginaire d'ordre zéro, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (t-\eta)^2}$ et $\mathscr{D}$ est un certain ensemble dans $\mathbf{R}^2$. La fonction $\varphi(\xi, \eta)$ est arbitraire et telle que les intégrales (49) et (51) existent.

REMARQUE 9. Si $\varphi(\xi, \eta)$ a des dérivées correspondantes, $S(x, t)$ est la solution de l'équation suivante:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) S(x, t) = S(x, t). \tag{50}$$

Dans le cas général, au lieu de $I_0(z)$ nous aurions pu prendre $\mathscr{A} I_0(r) + \mathscr{B} K_0(r)$ — une combinaison linéaire de solutions fondamentales de l'équation (50) dans les fonctions cylindriques.

La fonction $K_0(z) = \frac{x}{2}\,\mathrm{i}\,H_0^{(1)}(\mathrm{i}x)$, où $H_0^{(1)}(z)$ est la fonction de Hankel d'ordre zéro.

THÉORÈME 17. *L'opérateur borné S (49) répond à l'égalité suivante:*

$$(S - \hat{T}ST)f_x = \int_0^l f(t)\,(S_1(x) + S_2(t) + tS_3(x) + xS_4(t))\,\mathrm{d}t$$

où T *et* $\hat{T}$ *sont définis par* (35) ($\alpha = \beta = 1$) *et*

$$
\begin{aligned}
S_1(x) &= \iint_{\mathscr{D}} \varphi(\xi, \eta) \int_0^x I_0(\sqrt{(y-\xi)^2 + \eta^2})\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta \\
S_2(t) &= \iint_{\mathscr{D}} \varphi(\xi, \eta) \int_0^t (t-\tau)\, I_1(\sqrt{\xi^2 + (\tau-\eta)^2})\, \frac{\xi\, \mathrm{d}\tau}{\sqrt{\xi^2 + (\tau-\eta)^2}}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta \\
S_3(x) &= \iint_{\mathscr{D}} \varphi(\xi, \eta) \int_0^x I_1(\sqrt{(y-\xi)^2 + \eta^2})\, \frac{\eta\, \mathrm{d}y}{\sqrt{(y-\xi)^2 + \eta^2}}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta \\
S_4(t) &= -\,(\hat{T}S(0, t))(t).
\end{aligned}
\tag{51}
$$

COROLLAIRE 5. *Si l'opérateur* $Q = S^{-1}$ *existe, alors* Q *répond à la condition qui suit:*

$$
(Q - TQ\hat{T})f(x) = \int_0^l f(t)\, \varphi(x, t)\, \mathrm{d}t,
\tag{52}
$$

où $\varphi(x, t) = \sum_1^4 \overline{N_k(t)}\, M_k(x)$ *et*

$$
\begin{aligned}
1 &= T^*S^*N_1(t), \quad S_2(t) = T^*S^*N_2(t), \\
t &= T^*S^*N_3(t), \quad S_4(t) = T^*S^*N_4(t), \\
S_1(x) &= ST^{-1}M_1(x), \quad 1 = ST^{-1}M_2(x), \\
S_3(x) &= ST^{-1}M_3(x), \quad S_4(x) = ST^{-1}M_4(x).
\end{aligned}
\tag{53}
$$

THÉORÈME 18. *Supposons que l'opérateur borné* Q *dans* $L^2(0, l)$

$$
(Qf)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^l Q(x, t) f(t)\, \mathrm{d}t, \quad Q(l, t) = 0
$$

répond à la condition suivante ($\alpha = \beta = 1$):

$$
(Q - TQ\hat{T})f(x) = \int_0^l f(t)\, \varphi(x, t)\, \mathrm{d}t
\tag{54}
$$

alors la fonction

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \int_0^l K_0(r) \int^l \varphi(\tau, \eta)\, d\tau\, d\xi\, d\eta +$$

$$(55) \qquad + \frac{1}{2\pi} \int_0^l \left[\int_\xi^l (\tau - \xi)\, \psi_2(\tau)\, d\tau\, K_1(r_1) - \int_\xi^l (\tau - \xi)\, \psi_1(\tau)\, d\tau\, K_0(r_1) \right] d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^l \left[\int_\eta^l (\tau - \eta)\, \varphi_2(\tau)\, d\tau\, K_1(r_2) - \int_\eta^l (\tau - \eta)\, \varphi_1(\tau)\, d\tau\, K_0(r_2) \right] d\eta$$

admet la dérivée $\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2}$ *et l'opérateur* Q *se présente comme suit:*

$$Qf = \frac{d}{dx} \int_0^l f(t) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} G(x, t)\, dt.$$

Les fonctions $\{\varphi_k, \psi_k\}_1^2$ *sont égales à:*

$$(56) \qquad \begin{aligned} \psi_1(x) &= \mathscr{I} Q 1; \quad \psi_2(x) = \mathscr{I} Q (l - x); \\ \varphi_1(x) &= Q^* \mathscr{I}^* 1; \quad \varphi_2(x) = Q^* \mathscr{I}^* (l - x); \end{aligned}$$

foù l'opérateur $\mathscr{I}$ *dans* $L^2(0, l)$ *est égal à* $(\mathscr{I} f)(x) = - \int_x^l f(t)\, dt$; *enfin* $r_1 = \sqrt{(\xi - x)^2 + \eta^2}$, $r_2 = \sqrt{\xi^2 + (t - \eta)^2}$; $K_s(z)$ *est la fonction de Hankel d'ordre* s.

Conclusion 5. À la différence des cas précédents, dans le cas elliptique, pour inverser S sur une fonction arbitraire dans $L^2(0, l)$ il fauttrouver $Q = S^{-1}$ sur huit fonctions $\{N_k, M_k\}_1^4$, (53), et aussi calculer S^{-1} et S^{*-1} sur quatre autres onctions (56).

BIBLIOGRAPHIE

1. Livsič, M. S.; Yantsevich, A. A., *Operators colligations in Hilbert spaces* (translated by the Amer. Math. Soc.), Winston, 1979.
2. Sz.-Nagy, B.; Foiaş, C., *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.

3. SAHNOVIČ, L. A., On the factorisation of an operator-valued transfer function (Russian), *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **226**:4(1976); English translation: *Soviet Math. Dokl.*, **17**(1976), 203–207.
4. SAHNOVIČ, L. A., Les équations au noyau dépendant de la différence dans l'intervalle final (Russian), *Uspehi Mat. Nauk.*, **35**: 4(1980), 69–129.
5. TIKHONOV, A. N., SAMARSKII, A. A., *Equations of mathematical physics* (Russian), Gostekhizdat, Moscow, 1953; English translation: Pure and Applied Mathematics Monographs, vol. 39, Pergamon Press, 1963.

VLADIMIR ZOLOTARIOV
La Chaire des Mathématiques Générales, Université.
4, place Dzerjinski, 310077, Kharkov,
Union Soviétique.

Received April 28, 1983.