

## HOMOLOGIE DE GROUPES DISCRETS ASSOCIÉS À DES ALGÈBRES D'OPÉRATEURS

MAX KAROUBI

Soit  $A$  une algèbre de Banach complexe. Les groupes discrets de cet article sont de la forme  $GL_n(A)$  (matrices inversibles d'ordre  $n$  à coefficients dans  $A$ ) ou leur limite inductive  $GL(A) = \bigcup GL_n(A)$ . Nous montrons ici que si  $A$  satisfait à une certaine condition de stabilité (cf. 2.6), l'homologie à coefficients dans  $\mathbf{Z}/q$  du groupe discret  $GL(A)$  est isomorphe à l'homologie correspondante de l'espace classifiant  $BGL(A)$  du groupe topologique  $GL(A)$  [41]. Si le rang stable de  $A$  est fini (au sens de Bass [3] ou au sens de Corach, Larotonda et Rieffel [11], [47]), on a un isomorphisme analogue au niveau de chaque groupe  $GL_n(A)$ . Ces isomorphismes permettent de calculer effectivement l'homologie de ces groupes discrets, l'homologie topologique étant plus accessible grâce à la périodicité de Bott [22], [62]. Si on note  $G^\delta$  le groupe  $G = GL_n(A)$  ou  $GL(A)$  muni de la topologie discrète, on peut dire aussi que l'homomorphisme de groupes topologiques  $G^\delta \rightarrow G$  induit un isomorphisme des homologies mod  $q$  des espaces classifiants. Sous cette forme, ce résultat rappelle une conjecture analogue pour un groupe de Lie  $G$  due à Friedlander et Milnor [40]. Cette conjecture a été déjà démontrée dans un grand nombre de cas particuliers [33], [40], [53] mais reste ouverte en général.

Dans certains cas particuliers importants, nous avons pu aussi calculer  $H_i(BGL_n(A)^\delta; \mathbf{Z})$  pour  $i = 1$  et  $2$  (cf. 4.10). En dimensions supérieures, l'homologie cyclique de  $A$ . Connes [9] et les techniques de [31] ont permis d'obtenir quelques résultats partiels (cf. 4.17 par exemple).

Les algèbres de Banach " $\mathcal{S}_p$ -stables" sont rencontrées fréquemment en analyse fonctionnelle (cf. 2.3). Citons les idéaux de Schatten  $\mathcal{S}_p$  [50] (dont est issue la terminologie), les produits tensoriels de diverses sortes de ces idéaux de Schatten avec des algèbres de Banach arbitraires, les  $C^*$ -algèbres associées à des feuilletages [10], l'algèbre de Calkin, etc. Par contre, les algèbres de Banach commutatives n'entrent pas dans ce cadre.

Pour donner une idée du type de résultats obtenus, considérons simplement le groupe  $G$  formé des opérateurs inversibles dans un espace de Hilbert de la forme

$1 \rightarrow k$  avec  $k$  compact. On a alors un isomorphisme

$$H^*(BG^\delta; \mathbf{Z}/q) \approx \mathbf{Z}/q[c_1, c_2, \dots]$$

où les  $c_i$  sont des classes de cohomologie de degré  $2i$  et sont des analogues de "classes de Chern" pour le groupe *discret*  $G$ . Pour les premiers groupes d'homologie entière on a aussi  $H_1(BG^\delta; \mathbf{Z}) = 0$  et  $H_2(BG^\delta; \mathbf{Z}) \approx \mathbf{Z}$ , ce qui précise un résultat antérieur de Brown, de la Harpe et Schochet [16].

Les méthodes utilisées pour démontrer ces résultats font tout à la fois appel à la K-théorie algébrique et à la K-théorie topologique. Rappelons que la K-théorie topologique de  $A$ , utilisée notamment dans les travaux de Connes et Kasparov [10], [12], est définie par  $K_n^{\text{top}}(A) = \Pi_n(\text{BGL}(A)) \approx \Pi_{n-1}(\text{GL}(A))$  pour  $n > 0$  et  $K_0^{\text{top}}(A) = K_0(A)$ , groupe de Grothendieck de  $A$  [28]. La périodicité de Bott  $K_1^{\text{top}}(A) \approx K_{1+2}^{\text{top}}(A)$  démontrée par Wood et l'auteur [62], [22] permet de calculer tous les groupes  $K_n^{\text{top}}(A)$  à partir de  $K_0(A)$  et de  $K_1^{\text{top}}(A) = \Pi_0(\text{GL}(A))$ . La K-théorie algébrique (définie par Quillen [45] pour un anneau quelconque; une référence recommandée est [20]) ne se décrit pas aussi simplement: les groupes  $K_n(A)$  sont essentiellement des groupes d'homotopie abéliens d'un espace dont l'homologie est celle du groupe *discret*  $\text{GL}(A)$ . Ainsi un isomorphisme entre K-théorie algébrique et topologique se traduira par un isomorphisme entre les homologies de  $\text{BGL}(A)^\delta$  et  $\text{BGL}(A)$ . En fait, comme nous nous intéressons à l'homologie à coefficients finis, il est plus commode d'introduire des groupes de K-théorie "à coefficients" notés  $K_n(A; \mathbf{Z}/q)$  et  $K_n^{\text{top}}(A; \mathbf{Z}/q)$  [1], [5] qui s'insèrent dans des suites exactes

$$K_n(A) \xrightarrow{-q} K_n(A) \rightarrow K_n(A; \mathbf{Z}/q) \rightarrow K_{n-1}(A) \xrightarrow{-q} K_{n-1}(A)$$

$$K_n^{\text{top}}(A) \xrightarrow{-q} K_n^{\text{top}}(A) \rightarrow K_n^{\text{top}}(A; \mathbf{Z}/q) \rightarrow K_{n-1}^{\text{top}}(A) \xrightarrow{-q} K_{n-1}^{\text{top}}(A).$$

Ces groupes sont l'exact analogue de l'homologie d'un espace à coefficients dans  $\mathbf{Z}/q$ . En fait, un isomorphisme entre les groupes  $K_n(A; \mathbf{Z}/q)$  et  $K_n^{\text{top}}(A; \mathbf{Z}/q)$  pour tout  $n \geq 1$  implique un isomorphisme entre les homologies de  $\text{BGL}(A)^\delta$  et  $\text{BGL}(A)$  à coefficients dans  $\mathbf{Z}/q$ .

Pour réaliser ce programme, il nous faut donc calculer les groupes  $K_n(A)$  ou du moins les groupes  $K_n(A; \mathbf{Z}/q)$  pour toutes les valeurs de  $n$ . Or les exemples d'anneaux  $A$  pour lesquels on sait faire ces calculs sont relativement peu nombreux: les corps finis (Quillen [46]), les corps algébriquement clos ainsi que le corps des réels (Suslin [52]). On peut aussi citer certains anneaux qui en dérivent comme les corps de fractions rationnelles ou les anneaux henséliens (Gabber [13], Gillet-Thomasson [14], Suslin [52]). En fait, le programme que nous comptons réaliser permettra d'enrichir cette liste par un grand nombre d'exemples issus de l'analyse fonctionnelle. En particulier, pour toute algèbre de Banach  $A$  nous donnons des exemples d'anneaux  $A_A$  (tels que  $\mathcal{F}_p \hat{\otimes} A$ ) dont les K-théories algébrique et topologique à coefficients coïncident. Ainsi, on a des isomorphismes

$$K_n(\mathcal{F}_p \hat{\otimes} A; \mathbf{Z}/q) \approx K_n^{\text{top}}(\mathcal{F}_p \hat{\otimes} A; \mathbf{Z}/q) \approx K_n^{\text{top}}(A; \mathbf{Z}/q).$$

Les techniques utilisées pour démontrer ces résultats sont de diverses sortes. Un rôle important est joué par les structures multiplicatives] en K-théorie modulo  $q$  pour les anneaux non unitaires telles qu'elles ont été définies par Browder [5], l'auteur et Weibel [61], ce dernier ayant démontré le théorème d'excision qui nous faisait défaut dans une publication antérieure sur le sujet [27] (voir aussi l'Appendice I pour une démonstration élémentaire de ce théorème d'excision). Il est important aussi de construire des délaçages (non connexes en général) des espaces classifiants de la K-théorie: ceci conduit à une définition des groupes  $K_n(A)$  et  $K_n(A; \mathbf{Z}/q)$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$  [23]. La démonstration de théorèmes de périodicité se réduit alors à un jeu formel sur les cup-produits tel qu'il a été pratiqué en K-théorie hermitienne [29] ou dans la K-théorie bivariante de Kasparov [12]. Enfin, pour traduire les résultats "stables" obtenus au niveau du groupe linéaire infini  $GL(A)$  en des résultats sur des groupes spécifiques  $GL_n(A)$ , nous faisons appel aux résultats de "stabilité" de Van Der Kallen [55], [56], [57] et Charney [8]. Nous utilisons aussi des calculs de Corach-Larotonda [11] et Rieffel [47] concernant le rang stable de certaines algèbres de Banach, cette notion ayant été introduite par Bass [3] pour les anneaux quelconques.

Bien entendu, nous ne prétendons pas avoir épuisé le sujet, même dans le cas des algèbres de Banach  $\mathcal{S}_p$ -stables étudiées dans cet article. Par exemple, la relation entre l'homologie cyclique des idéaux de Schatten et leur K-théorie algébrique, esquissée dans le paragraphe 4, reste encore très mystérieuse. Dans le cas des  $C^*$ -algèbres, nous n'avons pas été en mesure de calculer l'homologie du groupe unitaire (muni de la topologie discrète) qui lui est naturellement associé bien que l'homologie du groupe orthogonal stable (dans le sens de [29]) ait été calculée dans le paragraphe 3.

#### TABLE DES MATIÈRES COMMENTÉE

##### 0. Remarques sur les notations.

##### 1. Rappels et compléments d'analyse fonctionnelle.

1.1—4. Définition des idéaux de Schatten  $\mathcal{S}_p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  et de l'algèbre  $\mathcal{S}_{-\infty} = L_{\infty}$  des matrices infinies à décroissance rapide.

1.5—13. Calculs de groupes  $K_0$  qui nous seront utiles par la suite.

##### 2. Énoncé des théorèmes principaux.

2.1—3. Définition et exemples des  $C$ -algèbres " $\mathcal{S}_p$ -stables".

2.4—5—6. Énoncé des trois théorèmes principaux (qui peuvent être illustrés par les exemples donnés en 2.3).

2.7—8. Énoncé d'un corollaire intéressant. D'autres applications seront données en 3.15—20.

##### 3. Démonstration des théorèmes 2.4, 2.5 et 2.6. Compléments.

3.1. Définition des structures multiplicatives en K-théorie pour les anneaux non unitaires.

3.2—5. Étude du groupe  $K_{-2}(\mathcal{S}_p)$ .

- 3.6. Démonstration du théorème 2.4.  
 3.8. Un théorème général sur les algèbres de Banach.  
 3.9–10. Etude du groupe  $K_{-1}(\mathcal{J}_p)$  et plus généralement du groupe  $K_{-1}(\mathcal{J}_p \hat{\otimes} A)$  (l'intérêt de ces groupes sera vu en 3.11).  
 3.11. Démonstration du théorème 2.5.  
 3.12–14. Autres exemples.  
 3.15. Démonstration du théorème 2.6.  
 3.16–21. Quelques applications.  
 3.22–27. Démonstration du théorème 2.6 dans le cas du groupe orthogonal.
4. K-théorie entière d'algèbres d'opérateurs.  
 4.1.  $K_1(\mathcal{J}_p \hat{\otimes} A) \approx K_1^{\text{top}}(A)$  pour  $p > 1$ . En particulier  $K_1(\mathcal{J}_p) = 0$ .  
 4.2. Application au groupe  $K_2$ .  
 4.6. Définition de la hyperstabilité.  
 4.8–9. Périodicité des groupes  $K_i$  pour  $i \leq 1$  ou 2.  
 4.10–11. Pour toute  $C^*$ -algèbre  $A$ ,  $K_i(\mathcal{K} \otimes_{\min} A) \approx K_i^{\text{top}}(A)$ ,  $i = 1$  et 2.  
 4.12.–13. L'homologie cyclique et la théorie de Chern-Weil permettent de calculer (partiellement) les groupes  $K_i(\mathcal{J}_p)$  à un  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel près.  
 4.14–16. Minoration des groupes  $K_{2n+1}(\mathcal{J}_p)$  (et notamment de  $K_3(\mathcal{J}_p)$ ) par un groupe non dénombrable.  
 4.17–21. Relation entre le régulateur de Borel et le déterminant de Fredholm.
- Appendice 1. Démonstration élémentaire du théorème d'excision en K-théorie modulo  $q$ .
- Appendix 2. A case of stability for the homology of linear groups, by Wilberd Van Der Kallen.

## 0. REMARQUES SUR LES NOTATIONS

0.1. Si  $A$  est une  $\mathbf{C}$ -algèbre quelconque, on désignera par  $A^+$  la  $\mathbf{C}$ -algèbre obtenue en adjoignant un élément unité. On posera alors  $K_i(A) = \text{Ker}(K_i(A^+) \rightarrow K_i(\mathbf{C}))$ . Si  $A$  est une algèbre de Banach,  $A^+$  l'est également et on définira de même  $K_i^{\text{top}}(A) = \text{Ker}(K_i^{\text{top}}(A^+) \rightarrow K_i^{\text{top}}(\mathbf{C}))$ . On a des définitions analogues pour les groupes  $K_i(A; \mathbf{Z}/q)$  et  $K_i^{\text{top}}(A; \mathbf{Z}/q)$ .

0.2. Si  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels topologiques localement convexes, on désignera par  $E \hat{\otimes} F$  et  $E \hat{\otimes} F$  les produits tensoriels topologiques considérés par Grothendieck [15]. En particulier, si  $E$  et  $F$  sont deux espaces de Banach,  $E \hat{\otimes} F$  est le complété de  $E \otimes F$  pour la norme  $z \mapsto \text{Inf} \sum_E \|x_i\| \cdot \|y_i\|$  pour toutes les écritures  $E$  de  $z$  sous la forme  $\sum x_i \otimes y_i$ . Ce produit tensoriel topologique satisfait à une pro-

priété universelle évidente. Le produit tensoriel topologique  $E \hat{\otimes} F$  est l'adhérence de  $E \otimes F$ , considéré comme sous-espace vectoriel de l'espace des applications bilinéaires continues sur  $E' \times F'$ , ( $E'$  et  $F'$  étant les duaux topologiques de  $E$  et  $F$ ). Si  $E, F$  et  $G$  sont trois espaces de Banach, l'application identique sur  $E \otimes F \otimes G$  induit une application linéaire continue de  $E \hat{\otimes} (F \hat{\otimes} G)$  vers  $(E \hat{\otimes} F) \hat{\otimes} G$ .

0.3. Si  $E$  et  $F$  sont deux espaces de Hilbert, on désignera par  $E \otimes_2 F$  le produit tensoriel topologique hilbertien, c'est-à-dire le complété de l'espace préhilbertien  $E \otimes F$ .

0.4. Enfin, si  $A$  et  $B$  sont deux  $C^*$ -algèbres, il existe deux espaces de Hilbert  $E$  et  $F$  tels que  $A$  (resp.  $B$ ) soit une sous-algèbre fermée de  $\mathcal{L}(E)$  (resp.  $\mathcal{L}(F)$ ) stable par l'involution. On désignera alors par  $A \otimes_{\min} B$  l'adhérence de  $A \otimes B$ , considérée comme sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E \otimes_2 F)$ . Ce produit tensoriel topologique est en fait indépendant (à isomorphisme près) des plongements choisis [54].

1. RAPPELS ET COMPLÉMENTS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

1.1. Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. On désigne par  $\mathcal{B}$  l'algèbre des endomorphismes linéaires continus de  $H$  et par  $\mathcal{K}$  l'idéal fermé de  $\mathcal{B}$  formé des opérateurs compacts (c'est-à-dire ici limites d'opérateurs de rang fini). Si  $k$  est un opérateur compact autoadjoint, l'espace de Hilbert  $H$  admet une base orthonormale formée de vecteurs propres de  $k$  (comme dans le cas fini).

Soit maintenant  $p$  un nombre réel  $\geq 1$ . Nous allons définir de nouveaux idéaux dans  $\mathcal{B}$ , les idéaux de Schatten  $\mathcal{I}_p = \mathcal{I}_p(H)$  pour lesquels une référence appropriée est [50]. Un opérateur  $f$  appartient à  $\mathcal{I}_p$  s'il est compact et si  $\sum |\lambda_i|^{p/2} < +\infty$ , les  $\lambda_i$  désignant les valeurs propres de l'opérateur autoadjoint  $f^*f$ . En fait, les idéaux  $\mathcal{I}_p$  sont des algèbres de Banach (non fermées dans  $\mathcal{B}$ ) pour la norme

$$\|f\| = \sqrt[p]{\sum |\lambda_i|^{p/2}} .$$

La composition des opérateurs induit des applications bilinéaires continues

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_p \times \mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{I}_p \\ \mathcal{B} \times \mathcal{I}_p &\rightarrow \mathcal{I}_p \\ \mathcal{I}_p \times \mathcal{I}_q &\rightarrow \mathcal{I}_r \end{aligned}$$

avec  $1/r \leq 1/p + 1/q$  d'après l'inégalité de Hölder.

Mentionnons deux exemples importants d'idéaux de Schatten. L'idéal  $\mathcal{I}_1$  est l'idéal des opérateurs à trace (ou opérateurs nucléaires [15]). En effet, si on choisit une base hilbertienne  $(e_i)$  de  $H$ , tout élément  $f$  de  $\mathcal{I}_1$  peut se représenter par une

matrice infinie  $(a_{ij})$ . La série  $\sum a_{ii}$  est alors absolument convergente et définit un nombre complexe  $\text{Tr}(f)$  indépendant du choix de la base orthonormale choisie. De manière analogue, on peut définir le *déterminant de Fredholm*  $\text{Dét}(1 + f)$  pour  $f \in \mathcal{F}_1$  comme limite de déterminants de matrices finies.

L'idéal  $\mathcal{F}_2$  est l'idéal des *opérateurs de Hilbert-Schmidt*. En termes matriciels, un opérateur  $f$  appartient à  $\mathcal{F}_2$  si la série  $\sum |a_{ij}|^2$  converge. Notons que le produit de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt est un opérateur à trace.

Par convention on désignera par  $\mathcal{F}_\infty$  l'idéal  $\mathcal{K}$  des opérateurs compacts.

1.2. Soit de nouveau  $(e_i)$  une base orthonormée de  $H$ . Pour  $s > 1/2$ , nous allons définir de nouvelles algèbres de Banach  $L_s$  (dépendant maintenant du choix de la base) qui sont définies en termes matriciels de la manière suivante. Un opérateur  $f$  appartient à  $L_s$  si et seulement s'il existe une constante  $C_s$  telle que, pour tout couple  $(i, j)$ , on ait

$$|a_{ij}| \leq C_s i^{-s} j^{-s}.$$

La norme de  $f$  dans  $L_s$  est alors définie par la formule

$$\|f\| = \frac{1}{\zeta(2s)} \text{Sup } i^s j^s |a_{ij}|.$$

Il est clair que  $L_s \subset L_t$  pour  $s \geq t$ .

D'autre part, si  $(a_{ij})$  est la matrice associée à l'opérateur  $f$  de  $L_s$  avec maintenant  $s > 1$ , désignons par  $A_n$  l'opérateur dont la matrice est  $(b_{ij})$  avec  $b_{ij} = a_{ij}$  si  $i \leq n$  et  $j \leq n$ ,  $b_{ij} = 0$  sinon. En suivant Grothendieck (cf. [50], p. 114), on a pour tout opérateur  $B$  de rang fini

$$N_1(B) = \text{Inf}_E \sum \|l_i\| \cdot \|x_i\|$$

pour toutes les écritures  $E$  de  $B$  sous la forme  $\sum l_i \otimes x_i$  avec  $l_i \in H^*$  et  $x_i \in H$  ( $H^* \otimes H$  étant plongé dans  $\mathcal{L}(H)$ ). En particulier, pour des constantes  $C, C'$  et  $C''$  convenables, on a

$$N_1(A_{n+1} - A_n) \leq \sum_{i=1}^{n+1} |a_{i,n+1}| + |a_{n+1,i}| \leq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2C}{i^s(n+1)^s} \leq \frac{C'}{n^s}$$

$$N_1(A_{n+p} - A_n) \leq \sum_{q=0}^{\infty} \frac{C'}{(n+q)^s} \leq \frac{C''}{n^{s-1}}.$$

Il en résulte aussitôt que la suite  $(A_n)$  est une suite de Cauchy pour la norme  $N_1$  et que  $f$  est un opérateur nucléaire. Par conséquent,  $L_s \subset \mathcal{F}_1$  pour  $s > 1$ .

1.3. Les algèbres de Banach  $L_s$  dépendent évidemment du choix d'une base ordonnée. Cependant, si  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est une application bijective, nous dirons qu'elle est *bornée* s'il existe des constantes  $a, b, \alpha, \beta$  strictement positives telles que

$$ai^\alpha \leq \sigma(i) \leq bi^\beta.$$

Si on pose alors  $L_\infty = \bigcap L_s$ , on voit que le changement de base défini par la permutation  $\sigma$  laisse invariante l'algèbre  $L_\infty$  (qui n'est pas une algèbre de Banach). On peut noter que  $L_\infty$  peut être interprétée comme l'algèbre des transformations linéaires continues  $\mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}(X)$  qui envoie l'espace des distributions  $\mathcal{D}'(X)$  dans  $\mathcal{D}(X)$  pour toute variété compacte  $X$  (ceci est évident pour le cercle  $X = S^1$ ; cf. [49]). Cependant, nous ne nous servons pas de ce fait.

1.4. Si  $H$  et  $H'$  sont deux espaces de Hilbert séparables et si  $f$  et  $f'$  sont deux opérateurs dans  $H$  et  $H'$  qui sont dans la classe de Schatten  $\mathcal{S}_p$ , un calcul immédiat de valeurs propres montre que  $f \otimes f'$  opérant dans  $H \otimes_2 H'$  est aussi dans  $\mathcal{S}_p$ . Pour les opérateurs dans  $L_s$  ou  $L_\infty$  la question est un peu plus délicate puisque l'appartenance d'un opérateur à  $L_s$  ou  $L_\infty$  dépend à priori du choix d'une base hilbertienne ordonnée.

De manière plus précise, si  $(e_i)$  (resp.  $(e'_i)$ ) est une base de  $H$  (resp.  $H'$ ), ordonnons la base  $(e_i \otimes e'_j)$  dans le "sens de la lecture"

$$\begin{aligned} &e_1 \otimes e'_1 \\ &e_1 \otimes e'_2, \quad e_2 \otimes e'_1 \\ &e_1 \otimes e'_3, \quad e_2 \otimes e'_2, \quad e_3 \otimes e'_1 \\ &\dots \end{aligned}$$

Si on désigne par  $N(i, i')$  le numéro d'ordre de  $e_i \otimes e'_{i'}$ , on a l'inégalité

$$ii' \leq N(i, i') \leq i^2 i'^2$$

ce qui montre que  $f \otimes f' \in L_{s/2}$  si  $f$  et  $f' \in L_s$ . En particulier,  $f \otimes f' \in L_\infty$  si  $f$  et  $f' \in L_\infty$ . On notera que si on choisit l'ordre obtenu en permutant les rôles de  $H$  et  $H'$ , la permutation des bases correspondantes de  $H \otimes_2 H'$  est bornée dans le sens précisé plus haut: elle laisse donc invariante  $L_\infty$ . De la même manière, les six façons "naturelles" d'ordonner la base de  $H \otimes_2 H' \otimes_2 H''$  obtenue à partir de bases de  $H, H'$  et  $H''$  sont bornées entre elles. L'appartenance à  $L_\infty$  de  $f \otimes f' \otimes f''$  ne dépend donc pas du choix d'un ordre de la base parmi ces six.

1.5. Désignons par  $MC_c$  l'algèbre (non unitaire) formée des matrices complexes infinies dont tous les coefficients sont nuls sauf un nombre fini. On a alors des

inclusions évidentes d'image dense ( $s > 1$ ):

$$MC \rightarrow L_\infty \rightarrow L_s \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{F}_\infty = \mathcal{K}.$$

Si  $\alpha \in B^+$  avec  $B = MC$  et si  $\alpha$  est inversible dans une des algèbres de Banach  $A^+$  avec  $A = L_s$  ou  $\mathcal{F}_p$ , on peut écrire  $\alpha$  sous la forme d'une matrice diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

avec  $\alpha_1$  finie et  $\lambda_1$  matrice scalaire. Il en résulte aussitôt que  $\alpha_1$  et  $\lambda_1$  sont inversibles, donc que  $\alpha$  est inversible dans  $B^+$ . Puisque  $M_n(A) \approx A$  avec  $A = A$  ou  $B$ , le même raisonnement peut s'appliquer à  $M_n(B^+)$  et à  $M_n(A^+)$ . Ainsi, en considérant  $B^+$  comme limite inductive d'algèbres de Banach, on voit que les hypothèses du théorème de densité sont satisfaites [27], [29]. Donc les inclusions précédentes induisent des isomorphismes

$$\mathbf{Z} \approx K_0(\mathbf{C}) \approx K_0(MC) \approx K_0(L_s) = K_0(\mathcal{F}_p)$$

pour  $1/2 < s < +\infty$  et  $1 \leq p \leq +\infty$ .

1.6. Le cas de  $L_\infty$  est plus délicat. Pour le traiter, on utilise le lemme suivant que m'a fait remarquer A. Connes :

1.7. LEMME. Soit  $A$  une sous-algèbre dense d'une algèbre de Banach  $A_1$  telle que  $\lambda\lambda_1\lambda' \in A$  pour  $\lambda_1 \in A_1$  et  $\lambda, \lambda' \in A$ . Alors

$$A^+ \cap (A_1^+)^* = (A^+)^*.$$

*Démonstration.* Si  $1 + \lambda \in A^+$  avec  $\lambda \in A$  et si  $1 + \lambda \in (A_1^+)^*$ , on peut trouver  $\tilde{\lambda} \in A$  tel que les produits  $(1 + \lambda)(1 + \tilde{\lambda})$  et  $(1 + \tilde{\lambda})(1 + \lambda)$  s'écrivent sous la forme  $1 - \varepsilon$  avec  $\|\varepsilon\| < 1$ . Il suffit donc de montrer que  $1 - \varepsilon$  est inversible dans  $A^+$  pour un tel  $A$ . Or on peut écrire dans  $A_1$

$$(1 - \varepsilon)^{-1} = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon\lambda_1\varepsilon \quad \text{avec } \lambda_1 = (1 - \varepsilon)^{-1} - 1 \in A_1.$$

Donc  $(1 - \varepsilon)^{-1} \in A^+$ .

1.8. Les hypothèses du lemme sont vérifiées notamment lorsque  $A = L_s$  avec  $s > 1$  et  $A_1 = \mathcal{F}_1$  ou  $\mathcal{K}$ . En effet, avec les notations précédentes, si on considère  $\lambda = (a_{ij})$ ,  $\lambda' = (a'_{kl})$  et  $\lambda_1 = (b_{jk})$ , il existe des constantes  $C, C'$  et  $D$  telles que

$$|b_{jk}| \leq D, \quad |a_{ij}| \leq \frac{C}{i^s j^s}, \quad |a'_{kl}| \leq \frac{C'}{k^s l^s}.$$

Donc

$$|\sum_{j,k} a_{ij} b_{jk} a'_{kl}| \leq CC'D(\zeta(s))^2 i^{-s} l^{-s}.$$

En particulier, si on choisit  $A = \mathcal{F}_1$ , on voit que si  $\lambda \in L_s$ ,  $1 + \lambda$  est inversible dans  $(L_s)^+$  si et seulement si son déterminant de Fredholm n'est pas nul. On démontre de la même manière, en considérant des algèbres de matrices sur  $L_s$  ou  $\mathcal{F}_1$  que  $M_n(L_s^+) \cap M_n(\mathcal{F}_1^+)^* = M_n(L_s^+)^*$  pour  $s > 1$ . Donc  $M_n(L_s^+) \cap M_n(L_t^+)^* = M_n(L_s^+)^*$  pour  $s > t > 1$  et  $M_n(L_\infty^+) \cap M_n(L_s^+)^* = M_n(L_\infty^+)^*$ .

1.9. PROPOSITION. (A. Connes). *L'inclusion évidente  $C \rightarrow L_\infty$  induit un isomorphisme*

$$Z \approx K_0(C) \approx K_0(L_\infty).$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer que l'homomorphisme

$$K_0(L_\infty^+) \rightarrow K_0(L_s^+)$$

est injectif et pour cela répéter l'essentiel de la démonstration du théorème de densité. Soient donc  $p$  et  $q$  deux projecteurs dans  $M_n(L_\infty^+)$  tels que  $p = \alpha q \alpha^{-1}$  avec  $\alpha \in GL_n(L_s^+)$ . Soit  $\alpha'$  une  $\varepsilon$ -approximation de  $\alpha$  dans  $M_n(L_\infty^+)$ . Alors, si  $\varepsilon$  est assez petit,  $\alpha' \in GL_n(L_\infty^+)$  ainsi que  $\beta = 1 - p - p' + 2pp'$  avec  $p' = \alpha' q \alpha'^{-1}$ . Donc  $p = \gamma q \gamma^{-1}$  avec  $\gamma = \alpha' \beta$  inversible dans  $M_n(L_\infty^+)$ .

REMARQUE. En fait, le raisonnement précédent permet de démontrer un peu plus : l'ensemble des classes d'isomorphie de modules projectifs de type fini sur  $L_\infty^+$  est isomorphe à  $N \times N$ . En effet, si  $i: M_n(C) \rightarrow M_n(L_\infty^+)$  et  $j: M_n(L_\infty^+) \rightarrow M_n(C)$  sont les applications canoniques, et si  $E$  est un module sur  $L_\infty^+$  défini par un projecteur  $p$  dans  $M_n(L_\infty^+)$ , on peut associer à  $E$  le couple suivant de nombres entiers :

$$(\text{Tr}(j(p)), \text{Tr}(p - ij(p)) + \text{Tr}(j(p))).$$

1.10. Les considérations précédentes conduisent à la généralisation suivante de la K-théorie topologique pour des algèbres qui ne sont pas des algèbres de Banach. Soit  $S$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  et soit  $(A_s), s \in S$ , une famille décroissante d'algèbres de Banach telle que pour tout  $t < s$

- 1)  $A_s$  soit dense dans  $A_t$ ;
- 2)  $M_n(A_s)^+ \cap M_n(A_t)^{+*} = M_n(A_t)^{+*}$  pour tout  $n$ .

La dernière condition est notamment vérifiée si la famille  $(A_s)$  vérifie la propriété suivante

(F) Soit  $\sum_{p=0}^\infty a_p x^p$  une série entière à coefficients complexes de rayon de convergence  $R$  et soit  $u$  un élément de  $M_n(A_s)$  tel que  $\|u\|_t < R$  pour un certain  $t < s$ . Alors  $\sum_{p=0}^\infty a_p u^p$  est un élément de  $M_n(A_s)$ .

Il est facile de voir que cette propriété (F) implique la condition 2) écrite plus haut. En effet, si  $\alpha$  est un élément de  $M_n(A_s)^+$  inversible dans  $M_n(A_t)^+$ , il existe  $\alpha' \in M_n(A_t)^+$  tel que  $\alpha\alpha' = 1$ . En outre, sans restreindre la généralité, on peut supposer que  $\alpha - 1 \in M_n(A_s)$  et que  $\alpha' - 1 \in M_n(A_t)$ . On peut alors trouver une approximation  $\alpha''$  de  $\alpha'$  pour la norme  $\| \cdot \|_t$  telle  $\alpha'' - 1 \in M_n(A_s)$  et telle que  $\alpha\alpha'' = 1 + \varepsilon$  avec  $\|\varepsilon\|_t < 1$ . Donc  $\alpha$  est inversible à droite dans  $M_n(A_s)^+$  (considérer la série géométrique  $1 + x + x^2 + \dots$ ). On démontre de même que  $\alpha$  est inversible à gauche.

EXEMPLES. Nous avons essentiellement deux exemples à proposer. Le premier est celui des algèbres  $L_s$  étudiées plus haut. Dans ce cas  $S = ]1, +\infty[$  et  $A_s = L_s$ . La vérification de la condition (F) est immédiate (cf. 1.7 et 1.8). Le second exemple est celui des fonctions de classe  $C^s$  sur une variété compacte  $M$ . Ici  $S = \mathbf{N}$ ,  $A_s = C^s(M)$  et la condition (F) est une simple conséquence du fait que la composition de deux fonctions de classe  $C^s$  est de classe  $C^s$ .

Revenons maintenant à la situation générale d'une famille  $(A_s)$  vérifiant les conditions 1) et 2). On pose alors  $A = \bigcap A_s$  munie des semi-normes évidentes et

$$K_i^{\text{top}}(A) = K_0(A \hat{\otimes} C(\mathbf{R}^i))$$

où  $C(\mathbf{R}^i)$  désigne l'algèbre des fonctions continues sur  $\mathbf{R}^i$  qui tendent vers 0 à l'infini. Le même type de démonstration que celui exposé en 1.9 permet de montrer que  $K_i^{\text{top}}(A) \approx K_i^{\text{top}}(A_s)$ . En particulier,  $K_i^{\text{top}}(A) \approx \Pi_{i-1}(\text{GL}(A)) \approx K_0(A)$  pour  $i$  pair et  $K_i^{\text{top}}(A) \approx \Pi_{i-1}(\text{GL}(A)) \approx \Pi_0(\text{GL}(A))$  pour  $i$  impair (périodicité de Bott; cf. [22] et [62]).

1.11. Nous allons clore ce paragraphe par d'autres exemples de calcul de groupes  $K_0$  que nous utiliserons souvent par la suite. Soit  $A$  une algèbre de Banach et soit  $I$  un idéal de  $A$ . Nous dirons que  $I$  vérifie la condition (T) s'il existe une topologie d'algèbre de Banach sur  $I$  telle que les applications produits

$$I \times A \rightarrow I \quad \text{et} \quad A \times I \rightarrow I$$

soient bilinéaires continues. On peut donc supposer qu'il existe une norme sur  $I$  telle que

$$\|\lambda a\|_I \leq \|\lambda\|_I \cdot \|a\|_A \quad \text{et} \quad \|a\lambda\|_I \leq \|a\|_A \cdot \|\lambda\|_I$$

pour  $\lambda \in I$  et  $a \in A$ . Un exemple typique d'une telle situation est celui où  $A = \mathcal{B}$  et  $I$  un idéal de Schatten  $\mathcal{S}_p$ .

1.12. THÉORÈME. Soit  $A$  une algèbre de Banach,  $I$  un idéal de  $A$  et  $\bar{I}$  son adhérence. Alors la projection canonique  $A/I \rightarrow A/\bar{I}$  induit une injection

$$\Delta: K_0(A/I) \rightarrow K_0(A/\bar{I}).$$

En outre, si  $I$  vérifie la condition (T) ci-dessus,  $\Delta$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* 1) *Injectivité de  $\Delta$ .* Montrons d'abord que si  $u$  est un élément de  $A$  inversible mod  $\bar{I}$ , il est inversible mod  $I$ . En effet, nous pouvons écrire  $uv = vu = 1 \text{ mod } \bar{I}$  pour un certain élément  $v$  de  $A$ . On a donc par exemple  $uv = 1 + \theta + \varepsilon$  avec  $\theta \in I, \varepsilon \in \bar{I}$  et  $\|\varepsilon\| < 1$ . Alors  $uv = (1 + \theta(1 + \varepsilon)^{-1})(1 + \varepsilon)$  donc  $uv(1 + \varepsilon)^{-1} = 1 + \theta'$  avec  $\theta' = \theta(1 + \varepsilon)^{-1} \in I$ . Donc  $u$  est inversible à droite mod  $I$ . On montre de même que  $u$  est inversible à gauche mod  $I$ .

L'injectivité de  $\Delta$  résulte de l'assertion suivante que nous allons démontrer (quitte à passer à l'algèbre des matrices sur  $A$ ): soient  $p$  et  $p'$  deux éléments de  $A$  tels que  $p^2 - p = p'^2 - p' = 0 \text{ mod } I$  et soit  $\alpha \in A$  tel que  $p'\alpha = \alpha p \text{ mod } \bar{I}$  et  $\alpha$  inversible mod  $\bar{I}$ ; alors  $p$  et  $p'$  sont conjugués mod  $I$ . En effet, la relation d'isomorphie entre modules projectifs de type fini se traduit stablement par la relation de conjugaison entre projecteurs: cf. [28], p. 37 par exemple.

Démontrons maintenant l'assertion. Soit  $\beta$  un élément de  $A$  tel que  $\alpha\beta = \beta\alpha = 1 \text{ mod } I$  ( $\beta$  existe puisque l'inversibilité mod  $\bar{I}$  équivaut à l'inversibilité mod  $I$ ) et soit  $p'' = \alpha p \beta$ . Alors  $p''$  est conjugué à  $p \text{ mod } I$  et  $p'' = p' \text{ mod } \bar{I}$ . Il suffit donc de montrer que  $p''$  est conjugué à  $p' \text{ mod } I$ . Ceci résulte de l'identité standard

$$(1 - p' - p'' + 2p'p'')p'' = p'(1 - p' - p'' + 2p'p'')$$

mod  $I$  avec  $1 - p' - p'' + 2p'p''$  inversible mod  $I$  puisque sa classe mod  $\bar{I}$  est égale à 1.

2) *Surjectivité de  $\Delta$*  (si  $I$  vérifie la condition (T)). Soit  $E$  un module projectif de type fini sur  $A/\bar{I}$ . Quitte à remplacer de nouveau  $A$  par l'algèbre des matrices sur  $A$ , on peut supposer que  $E$  est l'image du projecteur  $(1 + J)/2$  où  $J$  est un élément de  $A/\bar{I}$  tel que  $J^2 = 1$ . Soit  $\tilde{J}$  un élément de  $A$  dont la classe dans  $A/\bar{I}$  est égale à  $J$ . On a donc  $\tilde{J}^2 = 1 + k$  où  $k \in \bar{I}$ . Ecrivons  $k = k' + \varepsilon$  où  $k' \in I$  et  $\|\varepsilon\|_A < 1$  et posons  $u = \tilde{J}\varepsilon - \varepsilon\tilde{J}$ . Puisque  $\varepsilon = \tilde{J}^2 - 1 \text{ mod } I$ ,  $u$  est un élément de  $I$ . De même,  $u_n = \tilde{J}^n \varepsilon - \varepsilon^n \tilde{J}$  est un élément de  $I$  et on a l'identité

$$u_n = u_{n-1}\varepsilon + \varepsilon^{n-1}u.$$

En utilisant la condition (T), on en déduit l'inégalité  $\|u_n\|_I \leq n\|\varepsilon\|_A^{n-1} \cdot \|u\|_I$ . D'autre part, puisque  $\sqrt{1 + \varepsilon}$  est la somme d'une série entière  $\sum_{p=0}^{\infty} a_p \varepsilon^p$  avec  $|a_p| < 1$ , on a aussi  $\tilde{J}\sqrt{1 + \varepsilon} = \sqrt{1 + \varepsilon}\tilde{J} \text{ mod } I$ . En effet, si on désigne par  $S_n$  la somme partielle  $\sum_{p=0}^n a_p \varepsilon^p$ , la suite  $\Sigma_n = \tilde{J}S_n - S_n\tilde{J} = \sum_{p=0}^n a_p u_p$  est une suite de Cauchy dans  $I$  (pour la norme  $\|\cdot\|_I$ ) d'après l'inégalité ci-dessus. Par conséquent, si on pose

$$\tilde{J} = (\sqrt{1 + \varepsilon})^{-1}\tilde{J}$$

on a  $\tilde{J} = \tilde{J} \bmod \bar{I}$  et  $\tilde{J}^2 = 1 \bmod I$ . Ainsi  $E$  est l'image par  $A$  du module projectif associé au projecteur  $(1 - \tilde{J})/2 \bmod I$ .

1.13. Le théorème précédent permet de généraliser la K-théorie topologique à des quotients non séparés d'algèbres de Banach. De manière précise, si  $X$  est un espace compact désignons en général par  $A(X)$  l'algèbre de Banach des applications continues de  $X$  dans l'algèbre de Banach  $A$ . Si  $I$  est un idéal de  $A$  vérifiant la condition (T),  $I(X)$  est un idéal de  $A(X)$  vérifiant aussi la condition (T). Cette remarque permet de définir  $K_{A/I}^{\text{top}}(X)$  comme le groupe de Grothendieck  $K_0(A(X)/I(X))$ . On définit de même la K-théorie réduite  $\tilde{K}_{A/I}(X)$  comme  $\text{Coker}(K_{A/I}^{\text{top}}(*) \rightarrow K_{A/I}^{\text{top}}(X))$  (cf. [28], p. 55). En particulier, on peut poser  $K_n^{\text{top}}(A/I) = \tilde{K}_{A/I}^{\text{top}}(S^n)$ . D'après le théorème 1.12, les groupes obtenus sont isomorphes aux groupes correspondants en remplaçant  $I$  par  $\bar{I}$ . Puisque  $A/\bar{I}$  est une algèbre de Banach, le théorème de périodicité de Bott (cf. [22] et [62]) implique l'isomorphisme  $K_n^{\text{top}}(A/I) \approx K_{n+2}^{\text{top}}(A/I)$  pour tout  $n$ . Dans ces définitions notons en particulier que le groupe  $K_1^{\text{top}}(A/I)$  peut s'interpréter comme le quotient du groupe linéaire infini  $GL(A/I)$  par la relation d'homotopie: deux éléments  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  du groupe linéaire sont homotopes s'il existe un élément  $\alpha(t) \in GL(A(X)/I(X))$ ,  $X = [0,1]$ , tel que  $\alpha_0 = \alpha(0)$  et  $\alpha_1 = \alpha(1)$ .

La périodicité de Bott implique enfin le corollaire suivant, classique en K-théorie topologique des algèbres de Banach.

1.14. THÉORÈME. Soit  $A$  une algèbre de Banach et soit  $I$  un idéal de  $A$  vérifiant la condition (T) de 1.11. On a alors une suite exacte à six termes :

$$\begin{array}{ccc}
 & K_0(A) & \longrightarrow & K_0(A/I) & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 K_0(I) & & & & K_1^{\text{top}}(I) \\
 & \nwarrow & & \swarrow & \\
 & K_1^{\text{top}}(A/I) & \longleftarrow & K_1^{\text{top}}(A) & 
 \end{array}$$

ceux-ci étant isomorphes aux termes correspondants en remplaçant  $I$  par  $\bar{I}$ .

## 2. ENONCÉ DES THÉORÈMES PRINCIPAUX

2.1. Soit de nouveau  $H$  un espace de Hilbert séparable et  $\mathcal{I}_p = \mathcal{I}_p(H)$  l'idéal de Schatten considéré dans le paragraphe précédent pour  $1 \leq p \leq +\infty$ . Si une base hilbertienne ordonnée de  $H$  est donnée, nous poserons par convention  $\mathcal{I}_{-\infty} = L_\infty$  (cf. 1.3). La définition suivante généralise celle d'un article antérieur sur le même sujet [27].

2.2. DÉFINITION. Soit  $p$  un nombre réel tel que  $p \geq 1$  ou  $p = \pm \infty$  et soit  $A$  une  $\mathbb{C}$ -algèbre quelconque (non nécessairement unitaire). Nous dirons que  $A$  est  $\mathcal{F}_p$ -stable si

- 1) Il existe un isomorphisme d'anneaux  $\theta: A \rightarrow M_2(A)$  ( $M_2(A)$  désignant l'algèbre des matrices  $2 \times 2$  à coefficients dans  $A$ );
- 2) Il existe une application  $\mathbb{C}$ -bilinéaire

$$\varphi: \mathcal{F}_p \times A \rightarrow A$$

vérifiant les deux propriétés suivantes

- a)  $\varphi(aa', bb') = \varphi(a, b) \varphi(a', b')$ ,
- b) Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times A & \xrightarrow{u} & A \\ j \times \text{Id}_A \downarrow & & \downarrow i \\ \mathcal{F}_p \times A & \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow[\approx]{\theta} & M_2(A) \end{array}$$

où  $u(\lambda, a) = \lambda a$ ,  $i(a)$  est la matrice

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et où  $j(\lambda)$  est l'élément de  $\mathcal{F}_p$  représenté par la matrice infinie

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Si on désigne par  $\varphi_1$  (resp.  $\varphi_2$ ) la composition des flèches de ce diagramme dans le sens  $\downarrow$  (resp.  $\rightarrow$ ), on a  $\varphi_1 = \sigma \cdot \varphi_2$  où  $\sigma$  est un automorphisme de  $M_2(A)$ .

Si  $A$  est une algèbre topologique localement convexe, nous dirons que  $A$  est topologiquement  $\mathcal{F}_p$ -stable si tous les morphismes considérés dans les diagrammes précédents sont continus. D'autre part, on pourra remarquer que la  $\mathcal{F}_p$ -stabilité implique la  $\mathcal{F}_q$ -stabilité si  $q < p$ .

2.3. EXEMPLES. 1)  $\mathcal{F}_p = \mathcal{F}_p(H)$  est topologiquement  $\mathcal{F}_p$ -stable. En effet,  $M_2(\mathcal{F}_p) \approx \mathcal{F}_p(H \oplus H) \approx \mathcal{F}_p(H)$ . D'autre part,  $\varphi$  peut être défini par la formule  $\varphi(u, v) = u \otimes v$  en identifiant  $H$  et  $H \otimes_2 H$  et en remarquant que  $u \otimes v \in \mathcal{F}_p(H \otimes_2 H)$ .

2) Si  $B$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre quelconque,  $\mathcal{F}_p \otimes B$  est  $\mathcal{F}_p$ -stable. Plus généralement, si  $A$  est  $\mathcal{F}_p$ -stable,  $A \otimes B$  est  $\mathcal{F}_p$ -stable.

3) Si  $B$  est une algèbre topologique localement convexe,  $\mathcal{F}_p \hat{\otimes} B$  et  $\mathcal{F}_p \hat{\otimes} B$  sont topologiquement  $\mathcal{F}_p$ -stables. Plus généralement, si  $A$  est topologiquement  $\mathcal{F}_p$ -stable, il en est de même de  $A \hat{\otimes} B$  et de  $A \hat{\otimes} B$  (remarquer que la flèche canonique  $E \hat{\otimes} (F \hat{\otimes} G) \rightarrow (E \hat{\otimes} F) \hat{\otimes} G$  est continue). Par exemple, si  $X$  est un espace localement compact et si  $A = C(X, \mathbb{C}) = \hat{A} \hat{\otimes} C(X)$  désigne l'algèbre des fonctions continues sur  $X$  qui tendent vers 0 à l'infini, alors  $A$  est topologiquement  $\mathcal{F}_p$ -stable.

4) L'algèbre  $\mathcal{B}$  de tous les opérateurs bornés de  $H$  est topologiquement  $\mathcal{F}_p$ -stable.

5) Considérons une suite exacte de  $\mathbb{C}$ -algèbres

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{\alpha} A \rightarrow A'' \rightarrow 0.$$

Supposons que  $A'$  et  $A$  soient  $\mathcal{F}_p$ -stables et que  $\alpha$  soit compatible avec les différents flèches et isomorphismes introduits dans la définition plus haut. Alors  $A''$  est  $\mathcal{F}_p$ -stable. Par exemple, si  $1 \leq p \leq +\infty$ , l'algèbre quotient  $\mathcal{B}/\mathcal{F}_p$  (qui n'est pas séparée si  $p < +\infty$ ) est  $\mathcal{F}_p$ -stable. Une remarque analogue s'applique à la  $\mathcal{F}_p$ -stabilité topologique.

6) Soit  $B$  une  $C^*$ -algèbre et soit  $A = \mathcal{K} \otimes_{\min} B$  (produit tensoriel complété de  $C^*$ -algèbres où  $\mathcal{K} = \mathcal{F}_{+\infty}$  désigne l'idéal des opérateurs compacts dans  $H$ ; cf. 0.4). Alors  $A$  est topologiquement  $\mathcal{K}$ -stable. En particulier, si  $B \approx \mathcal{K} \otimes_{\min} B$  (ce qui est le cas pour la  $C^*$ -algèbre associée à un feuilletage; cf. [10]),  $B$  est topologiquement  $\mathcal{K}$ -stable.

2.3. Soit maintenant  $q$  un nombre entier strictement positif fixé. On pose alors

$$\bar{K}_i(A) = K_i(A; \mathbb{Z}/q)$$

pour tout anneau  $A$  et tout  $i \in \mathbb{Z}$  [1], [5]. De même, si  $A$  est une algèbre de Banach (ou plus généralement une algèbre de Fréchet du type considéré en 1.10), on posera

$$\bar{K}_i^{\text{top}}(A) = K_i^{\text{top}}(A; \mathbb{Z}/q).$$

2.4. THÉORÈME. Soit  $A$  une  $\mathbb{C}$ -algèbre qui est  $\mathcal{F}_p$ -stable. Alors

$$\bar{K}_i(A) \approx \bar{K}_{i-2}(A)$$

pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ .

2.5. THÉORÈME. Soit  $A$  une algèbre de Banach ou plus généralement une algèbre de Fréchet vérifiant la condition (F) de 1.10. Alors l'homomorphisme canonique

$$\alpha_i: \bar{K}_i(A) \rightarrow \bar{K}_i^{\text{op}}(A)$$

est bijectif si  $i = 1$ , surjectif si  $i > 1$ . Si  $A$  est  $\mathcal{F}_p$ -stable,  $\alpha_i$  est bijectif pour tout  $i$  impair  $\in \mathbf{Z}$ ; en outre, si  $\alpha_0$  est injectif,  $\alpha_i$  est bijectif pour tout  $i \in \mathbf{Z}$ . En particulier, si  $A$  est une algèbre de Banach topologiquement  $\mathcal{F}_p$ -stable, cette dernière condition est satisfaite et  $\alpha_i$  est bijectif pour tout  $i \in \mathbf{Z}$ .

2.6. THÉORÈME. Soit  $A$  une algèbre de Banach topologiquement  $\mathcal{F}_p$ -stable et soit

$$G_n = \text{GL}_n(A) = \text{Ker}(\text{GL}_n(A^+) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbf{C}))$$

$$G = \text{GL}(A) = \varinjlim \text{GL}_n(A)$$

(noter que  $G_{2^r}$  est homéomorphe à  $G_1$ ). On note  $G_n^\delta$  et  $G^\delta$  les groupes  $G_n$  et  $G$  munis de la topologie discrète. Alors

- 1) L'homomorphisme évident  $G^\delta \rightarrow G$  induit un isomorphisme au niveau de l'homologie à coefficients finis des espaces classifiants;
- 2) Si le rang stable de  $A$  au sens de Bass [3] est fini, on a la même propriété pour l'homomorphisme  $G_1^\delta \rightarrow G_1$ .

2.7. Pour illustrer le théorème 2.6, rappelons d'abord la notion de rang stable d'un anneau unitaire  $R$ . Un élément  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  de  $R^n$  est dit *unimodulaire* si l'idéal à gauche  $Ra_1 + Ra_2 + \dots + Ra_n$  de  $R^n$  est égal à l'anneau  $R$  tout entier. On désigne par  $U_n(R)$  l'ensemble de ces éléments unimodulaires. Pour  $n \geq 2$ , la propriété  $(RS)_n$  de Bass est la suivante:

$(RS)_n$  Pour tout élément  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  de  $U_n(R)$ , il existe des éléments  $(b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$  de  $R$  tels que l'élément  $a' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_{n-1})$  avec  $a'_i = a_i + b_i a_n$  appartienne à  $U_{n-1}(R)$ .

Il est facile de voir que  $(RS)_n \Rightarrow (RS)_p$  pour  $p > n$ . On appelle *rang stable* de  $R$  le plus petit entier  $n$  tel que  $(RS)_n$  soit satisfaite (si  $(RS)_n$  n'est jamais satisfaite, on dit que le rang stable de  $R$  est égal à l'infini). Dans le cas où  $R$  est une algèbre de Banach, Corach-Larotonda [11] et Rieffel [47] ont donné une condition topologique suffisante simple pour que  $R$  soit de rang stable  $n$ : il suffit que  $U_{n-1}(R)$  soit dense dans  $R^{n-1}$ . (*Attention*: ces auteurs utilisent une définition du rang stable décalée d'une unité par rapport à la nôtre qui est celle de Bass [3].) Les auteurs précédents ont aussi calculé le rang stable de certaines algèbres de Banach. Par exemple, Corach et Larotonda ont montré que si  $X$  est compact, l'algèbre des fonctions continues sur  $X$  à valeurs dans  $R$  a un rang stable  $\leq \text{Dim}(X) + \text{Rang stable de } R$ . Si  $A$  est une  $C^*$ -al-

gèbre quelconque, le rang stable de  $\mathcal{K} \hat{\otimes}_{\min} A$  est  $\leq 3$  d'après Rieffel [47]. Herman et Vaserstein [21] ont montré que le rang stable d'une  $C^*$ -algèbre coïncide avec le rang stable topologique défini par la densité de  $U_{n-1}(R)$  dans  $R^{n-1}$ . Enfin, toutes ces définitions se généralisent avec quelques modifications techniques aux anneaux ou aux algèbres de Banach non nécessairement unitaires [3], [58]. Pour les  $C$ -algèbres, les rangs stables de  $R$  et de  $R^+$  coïncident.

En utilisant le théorème de Kunneth en  $K$ -théorie topologique [48], on démontre aisément le corollaire suivant du théorème 2.6 :

2.8. COROLLAIRE. *Soit  $A$  une algèbre de Banach vérifiant les hypothèses du théorème 2.6 et qui est de rang stable fini. Supposons que*

$$K_0(A) \approx \mathbf{Z}^{d_0} \oplus G_0$$

$$K_1^{\text{top}}(A) \approx \mathbf{Z}^{d_1} \oplus G_1$$

où  $G_0$  et  $G_1$  sont des groupes uniquement  $q$ -divisibles. Alors

$$H^*(\text{BGL}_1(A)^\delta; \mathbf{Z}/q) \approx H^*(\text{BGL}(A)^\delta; \mathbf{Z}/q) \approx H^*(\text{BGL}(A); \mathbf{Z}/q)$$

est le produit tensoriel gradué de  $d_0$  algèbres de polynômes  $\mathbf{Z}/q\{c_1, c_2, \dots, c_r, \dots\}$  et de  $d_1$  algèbres extérieures  $\Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots)$  sur  $\mathbf{Z}/q$  avec  $\deg(c_r) = 2r$  et  $\deg(\lambda_r) = 2r - 1$ .

### 3. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES 2.4, 2.5 ET 2.6. COMPLÉMENTS

3.1. Les structures multiplicatives en  $K$ -théorie algébrique pour les anneaux unitaires, esquissées dans [26], ont été détaillées dans [36]. Pour les anneaux non unitaires, la situation est beaucoup plus délicate, faute d'un théorème d'excision général en  $K$ -théorie algébrique. De manière plus précise, soient  $A$  et  $B$  deux  $C$ -algèbres quelconques (on pourrait remplacer  $C$  par une algèbre commutative où  $q$  est inversible) et soit  $D$  le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & A^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ B^+ & \longrightarrow & C \end{array}$$

Le théorème d'excision de Weibel en  $K$ -théorie algébrique mod  $q$  (cf. [61] ou l'Appendice 1) permet d'écrire la suite exacte scindée

$$0 \rightarrow \bar{K}_i(D) \rightarrow \bar{K}_i(A^+) \oplus \bar{K}_i(B^+) \rightarrow \bar{K}_i(C) \rightarrow 0.$$

De même, considérons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes B)^+ & \longrightarrow & A^+ \otimes B^+ \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ C & \longrightarrow & D. \end{array}$$

On a alors  $\bar{K}_i(\varphi) \approx \bar{K}_i(\psi)$  avec  $\bar{K}_i(\varphi) = \text{Ker}(\bar{K}_i((A \otimes B)^+) \rightarrow \bar{K}_i(C))$  et  $\bar{K}_i(\psi) = \text{Ker}(\bar{K}_i(A^+ \otimes B^+) \rightarrow \bar{K}_i(D))$  d'après ce qui précède.

En suivant le même schéma que dans [24], on peut ainsi définir un "cup-produit" (noté  $\cup$ )

$$\bar{K}_i(A) \times \bar{K}_j(B) \rightarrow \bar{K}_{i+j}(A \otimes B)$$

comme la composition des flèches  $e^{-1} \cdot m' \cdot \gamma$  dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bar{K}_i(A) \times \bar{K}_j(B) & \xrightarrow{\gamma} & \bar{K}_i(A^+) \times \bar{K}_j(B^+) \xrightarrow{m} \bar{K}_{i+j}(A^+ \otimes B^+) \\ & \searrow m' & \uparrow \\ & & \text{Ker } \psi_* \xleftarrow{e} \text{Ker } \varphi_* = \bar{K}_i(A \otimes B). \end{array}$$

Ici  $m$  est le cup-produit usuel en  $K$ -théorie à coefficients pour les anneaux unitaires (cf. [1], [5]). La même méthode permet aussi de construire des cup-produits "mixtes" (notés aussi  $\cup$ ).

$$K_i(A) \times \bar{K}_j(B) \rightarrow \bar{K}_{i+j}(A \otimes B)$$

$$\bar{K}_i(A) \times K_j(B) \rightarrow \bar{K}_{i+j}(A \otimes B)$$

qui vérifient la propriété de quasi-associativité suivante: si  $A, B$  et  $C$  sont trois  $C$ -algèbres quelconques, on a la formule

$$(u \cup v) \cup w = u \cup (v \cup w) \in \bar{K}_{i+j+k}(A \otimes B \otimes C)$$

si l'un des trois éléments  $u, v$  ou  $w$  appartient à un groupe  $K$ , les deux autres appartenant à un groupe  $\bar{K}$  (cf. [1], [5]). Enfin, dans le cas des algèbres de Banach ou plus généralement des algèbres de Fréchet considérées en 1.10, ces cup-produits sont compatibles avec les cup-produits analogues en  $K$ -théorie topologique en un sens évident (cf. [5]).

3.2. Nous allons maintenant concentrer notre attention sur les groupes  $K_{-2}$  et pour cela nous aurons besoin de quelques préliminaires analytiques (cf. [23],

[34] pour la définition des groupes  $K_i$  pour  $i < 0$ ). Soit  $C^\infty(S^1)$  l'algèbre des fonctions  $C^\infty$  sur le cercle  $S^1$ . Par développement en série de Fourier, cette algèbre s'identifie à l'algèbre des séries laurentiennes

$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n t^n$$

avec  $a_n = O(n^s)$  pour tout  $s$ . Soit maintenant  $(e_i)$  la base hilbertienne canonique de  $\ell^2$ ,  $\mathcal{B}$  l'algèbre des opérateurs bornés de  $\ell^2$  et  $j: C^\infty(S^1) \rightarrow \mathcal{B}$  l'homomorphisme de C-espaces vectoriels défini matriciellement par la formule

$$j(P) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \dots \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} .$$

On peut remarquer que cet homomorphisme joue un rôle important dans une démonstration du théorème de périodicité de Bott en K-théorie topologique complexe [24]. Soit  $\Lambda$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{B}$  formé des opérateurs s'écrivant  $k + j(P)$  où  $P \in C^\infty(S^1)$  et  $k \in L_\infty = \mathcal{F}_{-\infty}$ .

3.3. PROPOSITION. *Le sous-espace vectoriel  $\Lambda$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{B}$ .*

*Démonstration.* Il suffit de démontrer que  $j(PQ) - j(P)j(Q) \in L_\infty$  et que  $k \cdot j(P)$  et  $j(P) \cdot k$  appartiennent à  $L_\infty$  si  $k \in L_\infty$ . Si  $(a_i)$  (resp.  $(b_i)$ ) sont les coefficients de Fourier de  $P$  (resp.  $Q$ ),  $j(PQ) - j(P)j(Q)$  se présente comme une matrice infinie  $(c_{rs})$  avec

$$\begin{aligned} c_{rs} &= a_{-r-1}b_{s+1} + a_{-r-2}b_{s+2} + \dots = O\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(r+n)^p (s+n)^p}\right) \\ &= O\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(rs+n)^p}\right) = O\left(\frac{1}{(rs)^{p-1}}\right) \end{aligned}$$

pour tout  $p$ . Donc  $j(PQ) - j(P)j(Q) \in L_\infty$ . D'autre part, si  $k \in L_\infty$  de matrice  $(k_{rs})$  et si  $m$  désigne le produit  $k \cdot j(P)$ , sa matrice  $(m_{rs})$  est donnée par la formule

$$m_{rs} = k_{r1}a_s + k_{r2}a_{s-1} + \dots = O\left(\sum_{n \neq 0, s} \frac{1}{r^p n^p |s-n|^p}\right) = O\left(\frac{1}{r^p s^{p-1}}\right)$$

pour tout  $p$ . Donc  $k \cdot j(P) \in L_\infty$ . On démontre de même que  $j(P) \cdot k \in L_\infty$ .

3.4. On déduit de la proposition précédente un diagramme commutatif d'algèbres qui va jouer un rôle important par la suite

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \mathcal{K} & \rightarrow & \mathcal{B} & \rightarrow & \mathcal{B}/\mathcal{K} \rightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow j' \\
 0 & \rightarrow & L_\infty & \rightarrow & A & \rightarrow & C^\infty(S^1) \rightarrow 0.
 \end{array}$$

3.5. PROPOSITION. *L'homomorphisme canonique*

$$K_{-2}(\mathcal{F}_p) \rightarrow K_{-2}^{\text{top}}(\mathcal{F}_p) \approx \mathbf{Z}$$

est surjectif pour tout  $p$ .

*Démonstration.* Puisque  $K_{-2}^{\text{top}}(\mathcal{F}_p) \approx K_{-2}^{\text{top}}(K) \approx \mathbf{Z}$ , il suffit de montrer que l'homomorphisme composé

$$K_{-2}(L_\infty) \rightarrow K_{-2}(\mathcal{K}) \rightarrow K_{-2}^{\text{top}}(\mathcal{K})$$

est surjectif. D'après le diagramme écrit ci-dessus, ceci est impliqué par la surjectivité de l'homomorphisme composé

$$K_{-1}(C^\infty(S^1)) \rightarrow K_{-1}(\mathcal{B}/\mathcal{K}) \rightarrow K_{-1}^{\text{top}}(\mathcal{B}/\mathcal{K}) \approx K_{-1}^{\text{top}}(C(S^1)).$$

Par ailleurs, pour toute algèbre  $B$  (resp. toute algèbre de Banach  $B$ ), on a des homomorphismes surjectifs

$$K(B[z, z^{-1}]) \rightarrow K_{-1}(B) \text{ et } K(B(S^1)) \rightarrow K_{-1}^{\text{top}}(B)$$

où  $B(S)$  désigne en général l'algèbre des fonctions continues sur  $S$  à valeurs dans  $B$  [24]. Nous sommes donc ainsi ramenés à démontrer que l'application évidente

$$K(C^\infty(S^1)[z, z^{-1}]) \rightarrow K(C^\infty(S^1 \times S^1)) \rightarrow K(C(S^1 \times S^1)) \approx \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$$

est surjective.

Si on excepte le premier facteur  $\mathbf{Z}$  (qui se retrouve trivialement dans les deux groupes), le deuxième facteur  $\mathbf{Z} \approx \tilde{K}(C(S^1 \times S^1))$  (c'est-à-dire la  $K$ -théorie réduite de  $S^1 \times S^1$ ) est engendré par le projecteur  $(1 + J)/2$  avec

$$J = \begin{pmatrix} -c & a + ib \\ a - ib & c \end{pmatrix}$$

où

$$2a = 1 + \cos \theta + (1 - \cos \theta)\cos \varphi$$

$$2b = (1 - \cos \theta)\sin \varphi$$

$$c = \sin \theta |\sin \varphi / 2|$$

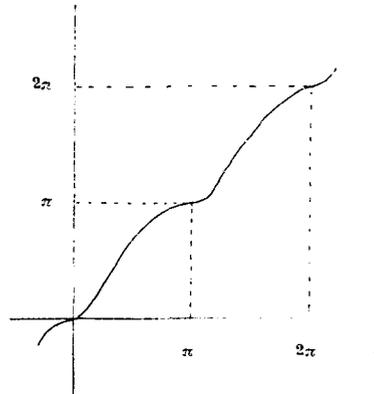
en posant  $z := e^{i\theta}$  et  $t := e^{i\varphi}$ ,  $(z, t) \in S^1 \times S^1$ . Ces formules ne sont pas nouvelles: on trouvera leur justification dans [29] par exemple.

Soit maintenant  $e: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une application de classe  $C^\infty$  strictement croissante vérifiant les propriétés suivantes:

$$e(0) = 0$$

$$e(x + \pi) = e(x) + \pi$$

$e$  plate aux points  $k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .



On peut alors aussi bien représenter le générateur du deuxième facteur  $\mathbf{Z}$  de  $K(C(S^1 \times S^1))$  par le projecteur homotope  $(1 + J')/2$  avec

$$J' = \begin{pmatrix} -c' & a' + ib' \\ a' - ib' & c' \end{pmatrix}$$

où

$$2a' := 1 + \frac{z + z^{-1}}{2} + \left(1 - \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \cos(e(\varphi))$$

$$2b' := \left(1 - \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \sin(e(\varphi))$$

$$c' := \frac{z - z^{-1}}{2i} \sin(e(\varphi)/2).$$

On notera que les coefficients de  $a'$ ,  $b'$  et  $c'$  dans l'anneau des polynômes laurentiens  $\mathcal{C}(S^1)[z, z^{-1}]$  sont des fonctions  $C^\infty$  de la coordonnée locale  $t := e^{i\varphi}$ . Ceci achève donc la démonstration de la proposition 3.5.

3.6. *Démonstration du théorème 2.4.* Elle va suivre le même schéma que celui déjà éprouvé dans la démonstration du théorème de périodicité en  $K$ -théorie her-

mitienne [29]. Soit donc  $A$  une  $C$ -algèbre qui est  $\mathcal{F}_p$ -stable. On peut définir

$$\beta: \bar{K}_i(A) \rightarrow \bar{K}_{i+2}(A)$$

comme le cup-produit par un générateur  $u_2$  de  $\bar{K}_2(C; \mathbf{Z}/q) \approx \bar{K}_2^{\text{top}}(C; \mathbf{Z}/q) \approx \mathbf{Z}/q$ . On peut de même définir

$$\beta': \bar{K}_i(A) \rightarrow \bar{K}_{i-2}(A)$$

comme le cup-produit par l'élément  $u_{-2}$  de  $K_{-2}(\mathcal{F}_p)$  construit en 3.5 (et dont l'image dans  $K_0^{\text{top}}(\mathcal{F}_p) \approx \mathbf{Z}$  est un générateur). De manière plus précise, le cup-produit est ici la composition des flèches

$$K_{-2}(\mathcal{F}_p) \times \bar{K}_i(A) \rightarrow \bar{K}_{i-2}(\mathcal{F}_p \otimes A) \rightarrow \bar{K}_{i-2}(A)$$

la deuxième étant induite par l'homomorphisme  $\mathcal{F}_p \otimes A \rightarrow A$  définissant la  $\mathcal{F}_p$ -stabilité (cf. [29] pour la définition des cup-produits sur les groupes  $K_n$  avec des signes quelconques de  $n$ ). D'après la quasi-associativité du cup-produit en  $K$ -théorie algébrique ou topologique à coefficients dans  $\mathbf{Z}/q$ , on voit que  $\beta\beta'$  et  $\beta'\beta$  induisent l'endomorphisme de  $\bar{K}_i(A)$  associé au cup-produit par l'élément  $u_2 \cup u_{-2} \in \bar{K}_0(\mathcal{F}_p)$ . En raison de la propriété 2 b) de la  $\mathcal{F}_p$ -stabilité, il suffit donc de montrer que  $u_2 \cup u_{-2}$  est l'image d'un générateur de  $\bar{K}_0(C) \approx \mathbf{Z}/q$  par l'homomorphisme canonique  $\bar{K}_0(C) \rightarrow \bar{K}_0(\mathcal{F}_p)$ . Puisque, par construction, l'image de  $u_2 \cup u_{-2}$  dans  $\bar{K}_0^{\text{top}}(\mathcal{F}_p) = \dots = K_0^{\text{top}}(\mathcal{F}_p; \mathbf{Z}/q) \approx \mathbf{Z}/q$  est un générateur et qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Z} \approx K_0(\mathcal{F}_p) & \rightarrow & K_0(\mathcal{F}_p; \mathbf{Z}/q) & \xrightarrow{\partial} & K_{-1}(\mathcal{F}_p) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Z} \approx K_0(\mathcal{F}_p) & \rightarrow & K_0^{\text{top}}(\mathcal{F}_p; \mathbf{Z}/q) & \rightarrow & K_{-1}^{\text{top}}(\mathcal{F}_p) \end{array}$$

ceci est équivalent à montrer que  $\partial(u_2 \cup u_{-2}) = 0$ . Nous allons pour cela utiliser les propriétés générales du cup-produit et la description explicite de  $u_{-2}$  donnée en 3.5. En effet,  $\partial(u_2 \cup u_{-2}) = \partial_1(u_2) \cup u_{-2}$  où  $\partial_1: K_2(C; \mathbf{Z}/q) \rightarrow K_1(C) = C^*$  et  $\partial_1(u_2) = \omega$  racine primitive  $q^{\text{ième}}$  de l'unité. D'autre part,  $u_{-2} = \partial_2(v)$  où

$$\partial_2: K_{-1}(C^\infty(S^1)) \rightarrow K_{-2}(\mathcal{F}_{-\infty})$$

est l'opérateur bord associé à la suite exacte d'algèbres

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_{-\infty} \rightarrow A \rightarrow C^\infty(S^1) \rightarrow 0$$

et où  $v$  est l'élément de  $K_{-1}(C^\infty(S^1))$  construit explicitement en 3.5. Notons qu'il n'y pas ici de problèmes avec les cup-produits pour les anneaux non unitaires car

l'aboutissement des calculs est un groupe  $K_i$  avec  $i \leq 0$ : cf. [27]. Donc

$$\partial(u_2 \cup u_{-2}) = \omega \cup \partial_2(v) = -\partial'_2(\omega \cup v)$$

où

$$\partial'_2: K_0(C^\infty(S^1)) \rightarrow K_{-1}(\mathcal{F}_{-\infty}).$$

Puisque  $K_0(C^\infty(S^1)) \approx K_0(\mathbb{C})$ , cet opérateur bord est réduit à 0 en raison du diagramme commutatif d'algèbres

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_{-\infty} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & C^\infty(S^1) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

3.7. REMARQUE. En fait, on démontrera un peu plus loin que  $K_{-1}(\mathcal{F}_p) = 0$  pour tout  $p$ , ce qui donnera une deuxième démonstration du fait que  $\partial(u_2 \cup u_{-2}) = 0$ .

Tournons nous maintenant vers la démonstration du théorème 2.5. Elle va être fractionnée en plusieurs propositions et théorèmes.

3.8. THÉORÈME. Soit  $A$  une algèbre de Banach ou plus généralement une algèbre de Fréchet vérifiant la condition (F) de 1.10. Alors l'homomorphisme canonique

$$\bar{K}_i(A) \rightarrow \bar{K}_i^{\text{top}}(A)$$

est un isomorphisme pour  $i = 1$  et un épimorphisme pour  $i \geq 1$ .

*Démonstration.* Il est clair que l'homomorphisme

$$K_1(A) \rightarrow K_1^{\text{top}}(A)$$

est surjectif. Si  $x$  appartient au noyau de cet homomorphisme, il existe une matrice  $M$  qui le représente ainsi qu'un chemin continu  $t \mapsto M(t)$  tel que  $M(0) = 1$  et  $M(1) = M$ . En considérant une subdivision de l'intervalle  $[0,1]$  assez fine, on voit ainsi que  $M$  s'écrit comme le produit de matrices de la forme  $1 + \varepsilon_i$  avec  $\|\varepsilon_i\| < 1$  pour une semi-norme convenable. D'après la condition (F) de 1.10,  $x$  est donc  $q$ -divisible

(considérer la somme de la série définissant  $\sqrt[q]{1 + \varepsilon_i}$ , puis le produit  $\prod \sqrt[q]{1 + \varepsilon_i}$  et appliquer enfin le lemme de Whitehead [3], [39]). Une chasse au diagramme élémentaire dans les deux suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} K_1(A) & \xrightarrow{-q} & K_1(A) & \longrightarrow & \bar{K}_1(A) & \longrightarrow & K_0(A) & \xrightarrow{-q} & K_0(A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K_1^{\text{top}}(A) & \xrightarrow{-q} & K_1^{\text{top}}(A) & \longrightarrow & \bar{K}_1^{\text{top}}(A) & \longrightarrow & K_0(A) & \xrightarrow{-q} & K_0(A) \end{array}$$

montre que  $\bar{K}_1(A) \rightarrow \bar{K}_1^{\text{top}}(A)$  est un isomorphisme pour toute algèbre de Banach  $A$ .

Considérons maintenant le diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 K_2(A) & \xrightarrow{\cdot q} & K_2(A) & \xrightarrow{\sigma'} & \bar{K}_2(A) & \longrightarrow & K_1(A) & \xrightarrow{\cdot q = \tau'} & K_1(A) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 K_2^{\text{top}}(A) & \xrightarrow{\cdot q} & K_2^{\text{top}}(A) & \xrightarrow{\sigma} & \bar{K}_2^{\text{top}}(A) & \longrightarrow & K_1^{\text{top}}(A) & \xrightarrow{\cdot q = \tau} & K_1^{\text{top}}(A)
 \end{array}$$

Si  $x \in \text{Ker } \tau$ ,  $x$  peut être représenté par une matrice  $M$  telle que  $M^q$  soit produit de matrices de la forme  $1 + \varepsilon_i$  avec  $\|\varepsilon_i\| < 1$  pour une semi-norme convenable. Si on pose  $M' = M \cdot \prod \sqrt[q]{1 + \varepsilon_i}$ ,  $M'$  représente un élément de  $K_1(A)$  appartenant à  $\text{Ker } \tau'$  (lemme de Whitehead de nouveau). Donc l'homomorphisme  $\text{Ker } \tau' \rightarrow \text{Ker } \tau$  est surjectif. D'autre part, si  $b \in K_2^{\text{top}}(C)$  désigne l'élément de Bott,  $K_2^{\text{top}}(A)$  est formé des éléments s'écrivant  $x \cup b$ , où  $x \in K_0(A)$ . Donc  $\text{Im } \sigma$  est formé des éléments s'écrivant  $x \cup \bar{b}$  où  $\bar{b} \in K_2(C; \mathbf{Z}/q)$  représente l'image de  $b$  dans le groupe  $\bar{K}_2^{\text{top}}(C)$ . Puisque  $\bar{K}_2(C) \approx \bar{K}_2^{\text{top}}(C)$ , tout élément de  $\text{Im } \sigma$  est l'image d'un élément de  $\bar{K}_2(A)$ , à savoir  $x \cup \bar{b}$ , où  $x \in K_0(A)$  et  $\bar{b} \in \bar{K}_2(C) \approx \bar{K}_2^{\text{top}}(C)$ . Ainsi la surjectivité des homomorphismes  $\text{Ker } \tau' \rightarrow \text{Ker } \tau$  et  $\text{Im } \sigma' \rightarrow \text{Im } \sigma$  implique celle de l'homomorphisme  $\bar{K}_2(A) \rightarrow \bar{K}_2^{\text{top}}(A)$ . Puisque tout élément de  $\bar{K}_1^{\text{top}}(A)$  s'obtient à partir d'un élément de  $\bar{K}_1^{\text{top}}(A)$  et de  $\bar{K}_2^{\text{top}}(A)$  par cup-produit à partir d'une puissance convenable de l'élément de Bott  $\bar{b} \in \bar{K}_2(C)$ , il en résulte que l'homomorphisme

$$\bar{K}_i(A) \rightarrow \bar{K}_i^{\text{top}}(A)$$

est bien surjectif comme annoncé.

3.9. PROPOSITION. Les groupes  $K_{-1}(\mathcal{I}_p)$  sont réduits à 0 pour tout  $p$ .

Démonstration. Supposons d'abord que  $1 \leq p \leq +\infty$ . Dans ce cas,  $\mathcal{I}_p$  est un idéal de  $\mathcal{B}$  et la suite exacte d'algèbres

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_p \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}/\mathcal{I}_p \rightarrow 0$$

où  $\mathcal{B}$  est flasque [23], [31], montre que  $K_{-1}(\mathcal{I}_p) \approx K_0(\mathcal{B}/\mathcal{I}_p) \approx K_0(\mathcal{B}/\mathcal{H}) \approx K_1^{\text{top}}(\mathcal{H}) \approx K_1^{\text{top}}(\mathcal{H}) = 0$  (appliquer le théorème 1.12).

Dans le cas de l'algèbre  $\mathcal{I}_{-\infty}$ , le calcul est beaucoup plus délicat car ce n'est pas un idéal de  $\mathcal{B}$ . On va cependant définir une sous-algèbre  $\mathcal{B}'$  de  $\mathcal{B}$  par la propriété suivante :

- (P)  $\lambda' \in \mathcal{B}' \Leftrightarrow \forall k \in \mathcal{I}_{-\infty}, k\lambda$  et  $\lambda k \in \mathcal{I}_{-\infty}$ . En outre, on suppose que les applications linéaires  $k \mapsto k\lambda$  et  $k \mapsto \lambda k$  sont des applications linéaires continues de  $\mathcal{I}_{-\infty}$  dans  $\mathcal{I}_{-\infty}$ .

La catégorie  $\mathcal{C}$  des modules libres sur  $\mathcal{B}'$  s'identifie à la catégorie dont les objets sont les espaces de Hilbert munis d'une base hilbertienne ordonnée  $(e_i)$ , les morphismes étant définis par des matrices infinies qui définissent des applications linéaires continues et qui vérifient la propriété (P). En effet, si  $E$  (resp.  $F$ ) est un espace de Hilbert muni de la base  $(e_i)$  (resp.  $(f_j)$ )  $E \oplus F$ , muni de la base  $(e_1, f_1, e_2, f_2, \dots)$  est bien une somme directe de  $E$  et de  $F$  dans la catégorie  $\mathcal{C}$ .

Nous définissons maintenant un foncteur  $\tau: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  par la formule

$$\tau(E) = E \oplus E \oplus \dots \oplus E \oplus \dots$$

(somme hilbertienne de  $\aleph_0$ -exemplaires de  $E$ ). Si on désigne par  $E_{i'}$  le  $i'$ -ième facteur  $E$  dans cette somme et par  $e_{ii'}$  le  $i^{\text{ième}}$  vecteur de base de  $E_{i'}$ ,  $\tau(E)$  sera muni de la base hilbertienne ordonnée dans le "sens de la lecture"

$$\begin{matrix} e_{11} \\ \\ e_{21} & e_{12} \\ \\ e_{31} & e_{22} & e_{13} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

Si on note  $N(i, i')$  le numéro d'ordre de  $e_{ii'}$ , on notera que

$$ii' \leq N(i, i') \leq i^2 i'^2$$

comme dans 1.3. D'autre part, si  $\alpha \in \mathcal{B}'$ ,  $\tau(\alpha) = \alpha \oplus \alpha \oplus \dots$  appartient bien à  $\mathcal{B}'$  lorsqu'on ordonne la base de  $\tau(E)$  comme ci-dessus. En effet, écrivons la matrice définissant  $\alpha$  sous la forme  $\alpha_i^j$  et celle définissant  $\tau(\alpha)$  sous la forme  $\alpha_{ii'}^{jj'}$  avec des notations évidentes. Donc  $\alpha_{ii'}^{jj'} = \alpha_i^j \delta_{i'}^{j'}$  où  $\delta_{i'}^{j'}$  désigne le symbole de Kronecker. Puisque  $\alpha \in \mathcal{B}'(E)$ , pour tout  $s > 2$ , il existe  $r > s$  tel que la multiplication à gauche et à droite par  $\alpha$  envoie  $L_r$  dans  $L_s$ . Si  $k_{jj'}^{ii'}$  désigne la matrice d'un élément  $k$  de  $L_r(\tau(E))$  on a

$$|k_{jj'}^{ii'}| \leq \frac{C}{N(j, j')^r N(i, i')^r} \leq \frac{C}{j^r j'^r i^r i'^r}$$

D'autre part,  $\sum_{i, i', j, j'} \alpha_{ii'}^{jj'} k_{jj'}^{ii'} \leq \sum_j \alpha_i^j k_{ji}^{jj}$  qui peut être majoré en norme par

$$\frac{C'}{i^s i'^s} \cdot \frac{1}{i'^r i'^r} \leq \frac{C'}{i^s i'^s i^s i'^s} \leq \frac{C'}{N(i, i')^{s/2} N(i, i')^{s/2}}$$

Ainsi la multiplication à gauche par  $\tau(\alpha)$  envoie continûment  $L_s(\tau(E))$  dans  $L_{s/2}(\tau(E))$ . On démontre la même propriété pour la multiplication à droite par  $\tau(\alpha)$ , ce qui prouve,  $s$  étant arbitraire, que  $\tau(\alpha) \in \mathcal{B}'$  comme annoncé.

D'autre part,  $E \oplus \tau(E) = E \oplus (E \oplus E \oplus \dots)$  est isomorphe à  $\tau(E)$  de manière évidente. Il faut cependant vérifier que cet isomorphisme appartient bien à la catégorie  $\mathcal{C}$  et, pour cela, il suffit de voir qu'il correspond à une permutation bornée des bases dans le sens précisé en 1.3. Si on écrit la base ordonnée de  $\tau(E)$  sous la forme

$$\begin{matrix} e_{12} \\ e_{13} & e_{22} \\ e_{14} & e_{23} & e_{32} \\ \dots \end{matrix}$$

c'est-à-dire comme plus haut, mais en commençant par le deuxième facteur  $E$ , la base de  $E \oplus \tau(E)$  sera obtenue en intercalant les éléments  $e_{i1}$ , ce qui donne la base suivante de  $\tau(E)$ :

$$\begin{matrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{13} & e_{31} & e_{22} \\ e_{41} & e_{14} & e_{51} & e_{23} & e_{61} & e_{32} \\ \dots \end{matrix}$$

Donc le numéro d'ordre de  $e_{ij}$  est maintenant compris entre  $2i(j - 1)$  si  $j \neq 1$  et est égal à  $2i - 1$  si  $j = 1$ . Puisque le numéro d'ordre précédent était compris entre  $ij$  et  $i^2j^2$ , il est clair que la permutation des bases est bornée, donc  $E \oplus \tau(E)$  est isomorphe à  $\tau(E)$  dans la catégorie  $\mathcal{C}$ . L'isomorphisme étant naturel, la catégorie  $\mathcal{C}$  est flasque dans le sens de [23], ainsi que la catégorie pseudo-abélienne associée. Donc  $K_i(\mathcal{B}') = 0$  pour tout  $i$ .

Considérons maintenant la suite exacte d'algèbres

$$0 \rightarrow L_\infty \rightarrow \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}'/L_\infty \rightarrow 0.$$

Pour démontrer que  $K_{-1}(L_\infty) = K(\mathcal{B}'/L_\infty)$  est trivial, il suffit de montrer que si  $J \in \mathcal{B}'$  vérifie  $J^2 = 1 + f$  avec  $f \in L_\infty$ , il existe  $f' \in L_\infty$  tel que  $(J + f')^2 = 1$ . D'après le théorème p. 44 de [17], il existe  $k$  compact tel que  $(J + k)^2 = 1$ . Si  $k'$  est une approximation assez fine de  $k$  appartenant à  $L_\infty$ , on a  $(J + k')^2 = 1 + \varepsilon$  avec  $\|\varepsilon\| < 1$  pour une certaine norme  $L_r$ , et  $\varepsilon \in L_\infty$  (car  $L_\infty$  est un idéal de  $\mathcal{B}'$ ). L'argument utilisé en 1.7 montre que la série entière définissant  $(\sqrt{1 + \varepsilon})^{-1}$  s'écrit  $1 + \varepsilon'$  avec  $\varepsilon' \in L_\infty$ . Si on pose  $J + f' = (J + k')(\sqrt{1 + \varepsilon})^{-1}$ , on a alors  $f' \in L_\infty$  et  $(J + f')^2 = 1$ .

Ceci achève donc la démonstration de la proposition 3.9. La proposition suivante en est une généralisation évidente (compte tenu que  $K_{-1}^{\text{top}}(\mathbb{C}) = 0$ ).

3.10. PROPOSITION. *Soit  $A$  une algèbre de Banach quelconque. Alors l'homomorphisme naturel*

$$K_{-1}(L_{\infty} \hat{\otimes} A) \rightarrow K_{-1}^{\text{top}}(L_{\infty} \hat{\otimes} A) \approx K_{-1}^{\text{top}}(A)$$

*est injectif.*

*Démonstration.* En fait, la démonstration de cette proposition va suivre le même schéma que celui développé plus haut. Tout d'abord,  $L_{\infty}$  étant un espace nucléaire dans le sens de Grothendieck [15], il est bien connu que  $L_{\infty} \hat{\otimes} A$  s'identifie à l'algèbre  $L_{\infty}(A)$  des matrices infinies sur  $A$  telles que  $\forall s \exists C_s$  avec  $\|a_{ij}\| \leq \frac{C_s}{i^s j^s}$  (cette dernière condition fournit une généralisation évidente  $L_s(A)$  des algèbres  $L_s = L_s(\mathbb{C})$  considérées en 1.2). Le substitut de  $\mathcal{B}$  est le "cône topologique"  $\bar{C}A$  (cf. [23] ou [34] pour la définition précise; il y a d'autres choix possibles, en particulier si  $A$  est une  $C^*$ -algèbres: cf. [25]). Le substitut de  $\mathcal{B}'$  est la sous-algèbre  $C'A$  de  $\bar{C}A$  vérifiant la condition

( $P_A$ )  $\lambda' \in C'A \Leftrightarrow \forall k \in L_{\infty} \hat{\otimes} A, k\lambda'$  et  $\lambda'k \in L_{\infty} \hat{\otimes} A$ . En outre les applications linéaires  $k \mapsto k\lambda'$  et  $k \mapsto \lambda'k$  sont continues.

En poursuivant l'analogie, on pourra dire qu'un élément compact de  $CA$  est un élément de  $\bar{A}$ , c'est-à-dire adhérent à l'ensemble des matrices finies pour la topologie de  $\bar{C}A$ . On a donc la suite exacte d'algèbres de Banach

$$0 \rightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{C}A \rightarrow \bar{S}A \rightarrow 0$$

ainsi que la suite exacte d'algèbres

$$0 \rightarrow L_{\infty} \hat{\otimes} A \rightarrow C'A \rightarrow C'A/L_{\infty} \hat{\otimes} A \rightarrow 0$$

donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_{-1}(L_{\infty} \hat{\otimes} A) & \xrightarrow{\approx} & K_0(C'A/L_{\infty} \hat{\otimes} A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_{-1}(\bar{A}) & \xrightarrow{\approx} & K_0(\bar{S}A) \\ \downarrow & & \parallel \\ K_{-1}^{\text{top}}(A) \approx K_{-1}^{\text{top}}(A) & \xrightarrow{\approx} & K_0(\bar{S}A). \end{array}$$

Puisque  $K_{-1}^{\text{top}}(L_\infty \hat{\otimes} A)$  coincide avec  $K_{-1}^{\text{top}}(L_s(A))$ , on voit ainsi que l'injectivité à démontrer est équivalente à l'injectivité de l'homomorphisme

$$K_0(C'A/L_\infty \hat{\otimes} A) \rightarrow K_0(\bar{S}A).$$

Soit donc  $x$  un élément du premier groupe dont l'image dans  $K_0(\bar{S}A)$  est triviale. A une stabilisation près,  $x$  est représenté par un élément  $J$  de  $C'A$  tel que  $J^2 = 1 + f$  avec  $f \in L_\infty(A)$ . Puisque la classe de  $x$  dans  $K_0(\bar{S}A)$  est égale à 0, en stabilisant de nouveau on voit qu'il existe  $k \in \bar{A}$  tel que  $(J + k)^2 = 1$ . La démonstration se termine alors comme celle de la proposition précédente (noter qu'on a évité d'utiliser les résultats de [17], mais au prix d'une stabilisation éventuelle).

3.11. *Démonstration du théorème 2.5.* Puisque  $\bar{K}_i(A) \approx \bar{K}_1(A) \approx \bar{K}_{-1}^{\text{top}}(A) \approx \bar{K}_i^{\text{top}}(A)$  si  $i$  est impair et si  $A$  est  $\mathcal{F}_p$ -stable,  $\bar{K}_i(A) \approx \bar{K}_i^{\text{top}}(A)$  pour  $A$   $\mathcal{F}_p$ -stable (et  $i$  impair). D'autre part, si

$$\alpha_0: \bar{K}_0(A) \rightarrow \bar{K}_0^{\text{top}}(A)$$

est injectif,  $\alpha_2$  est injectif et aussi surjectif d'après la proposition 3.8 de nouveau. Donc  $\alpha_i$  est bijectif pour  $i$  pair d'après le théorème 2.4 (et son analogue topologique).

Supposons maintenant que  $A$  soit une algèbre de Banach topologiquement  $\mathcal{F}_p$ -stable, donc  $\mathcal{F}_{-\infty}$ -stable et posons  $B = \mathcal{F}_{-\infty} \hat{\otimes} A$ . Une chasse au diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} K_0(B) & \rightarrow & K_0(B) & \rightarrow & \bar{K}_0^{\text{top}}(B) & \rightarrow & K_{-1}^{\text{top}}(B) & \rightarrow & K_{-1}^{\text{top}}(B) \\ \parallel & & \parallel & & \uparrow \alpha'_0 & & \uparrow & & \uparrow \\ K_0(B) & \rightarrow & K_0(B) & \rightarrow & \bar{K}_0(B) & \rightarrow & K_{-1}(B) & \rightarrow & K_{-1}(B) \end{array}$$

montre que  $\alpha'_0$  est injectif, donc bijectif, d'après le théorème 3.8. Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \bar{K}_0(A) & \xrightarrow{j_*} & \bar{K}_0(\mathcal{F}_{-\infty} \hat{\otimes} A) & \xrightarrow{\varphi_*} & \bar{K}_0(A) \\ \alpha_0 \downarrow & & \alpha'_0 \downarrow \approx & & \downarrow \alpha_0 \\ \bar{K}_0^{\text{top}}(A) & \xrightarrow{j_*} & \bar{K}_0^{\text{top}}(\mathcal{F}_{-\infty} \hat{\otimes} A) & \xrightarrow{\varphi_*} & \bar{K}_0^{\text{top}}(A) \end{array}$$

où  $j_*$  est induit par l'injection  $A \approx C \otimes A \rightarrow \mathcal{F}_{-\infty} \hat{\otimes} A$  et où  $\varphi$  est induit par l'application bilinéaire continue  $\mathcal{F}_{-\infty} \times A \rightarrow A$  définissant la  $\mathcal{F}_{-\infty}$ -stabilité topologique. Puisque  $\alpha'_0$  est un isomorphisme et que  $\varphi_* j_* = \text{Id}$ , il en résulte que  $\alpha_0$  est injectif.

Donc

$$\alpha_i: \bar{K}_i(A) \rightarrow \bar{K}_i^{\text{top}}(A)$$

est bijectif pour tout  $i$  d'après la première partie du théorème.

3.12. REMARQUE. On peut souvent démontrer que  $\bar{K}_i(A) \approx \bar{K}_i^{\text{top}}(A)$  en montrant directement (sans utiliser 3.10) que

$$\alpha_0: \bar{K}_0(A) \rightarrow \bar{K}_0^{\text{top}}(A)$$

est injectif. Comme exemple typique, considérons un espace compact  $X$  et l'algèbre  $\mathcal{S}_p \hat{\otimes} C(X)$ , c'est-à-dire l'algèbre des applications continues de  $X$  dans  $\mathcal{S}_p$ . On a alors une suite exacte d'algèbres

$$0 \rightarrow \mathcal{S}_p \hat{\otimes} C(X) \rightarrow \mathcal{B} \hat{\otimes} C(X) \rightarrow \mathcal{B} \hat{\otimes} C(X) / \mathcal{S}_p \hat{\otimes} C(X) \rightarrow 0.$$

Puisque  $\mathcal{B} \hat{\otimes} C(X)$  est flasque [23], [34],  $K_{-1}(\mathcal{S}_p \hat{\otimes} C(X))$  est isomorphe à

$$K_0(\mathcal{B} \hat{\otimes} C(X) / \mathcal{S}_p \hat{\otimes} C(X)) \approx K_0(\mathcal{B} \hat{\otimes} C(X) / \mathcal{H} \hat{\otimes} C(X)) \approx K_0(\mathcal{B} / \mathcal{H} \hat{\otimes} C(X))$$

car l'idéal  $\mathcal{S}_p \hat{\otimes} C(X)$  de  $\mathcal{B} \hat{\otimes} C(X)$  est dense dans  $\mathcal{H} \hat{\otimes} C(X)$  et qu'il vérifie la condition (T) de 1.12. D'autre part, la suite exacte d'algèbres de Banach

$$0 \rightarrow \mathcal{H} \hat{\otimes} C(X) \rightarrow \mathcal{B} \hat{\otimes} C(X) \rightarrow \mathcal{B} / \mathcal{H} \hat{\otimes} C(X) \rightarrow 0$$

implique un isomorphisme  $K_0(\mathcal{B} / \mathcal{H} \hat{\otimes} C(X)) \approx K_0^{\text{top}}(\mathcal{H} \hat{\otimes} C(X))$ . On obtient ainsi finalement des isomorphismes

$$\begin{aligned} K_{-1}(\mathcal{S}_p \hat{\otimes} C(X)) &\approx K_{-1}(\mathcal{H} \hat{\otimes} C(X)) \approx K_0^{\text{top}}(\mathcal{H} \hat{\otimes} C(X)) \approx \\ &\approx K_0^{\text{top}}(\mathcal{S}_p \hat{\otimes} C(X)) \approx K_0^{\text{top}}(C(X)). \end{aligned}$$

Si on pose  $A = \mathcal{S}_p \hat{\otimes} C(X)$ , on peut donc appliquer le lemme des cinq au diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} K_0(A) & \xrightarrow{\cdot q} & K_0(A) & \longrightarrow & \bar{K}_0(A) & \longrightarrow & K_{-1}(A) \xrightarrow{\cdot q} K_{-1}(A) \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \approx & & \downarrow \approx \\ K_0(A) & \xrightarrow{\cdot q} & K_0(A) & \longrightarrow & \bar{K}_0^{\text{top}}(A) & \longrightarrow & K_{-1}^{\text{top}}(A) & \longrightarrow & K_{-1}^{\text{top}}(A) \end{array}$$

ce qui démontre que

$$\bar{K}_i(\mathcal{F}_p \hat{\otimes} C(X)) \approx \bar{K}_i^{\text{top}}(\mathcal{F}_p \hat{\otimes} C(X)) \approx \bar{K}_i^{\text{top}}(C(X))$$

d'après la première partie du théorème 2.5.

Plus généralement, en appliquant le théorème 2.5 dans toute sa force aux algèbres topologiquement  $\mathcal{F}_p$ -stables  $\mathcal{F}_p \hat{\otimes} A$  et  $\mathcal{F}_p \hat{\otimes} A$  ( $A$  algèbre de Banach quelconque), on obtient le corollaire intéressant suivant :

3.13. THÉORÈME. *Soit  $A$  une algèbre de Banach quelconque. Alors les homomorphismes naturels*

$$\bar{K}_i(\mathcal{F}_p \hat{\otimes} A) \rightarrow \bar{K}_i^{\text{top}}(\mathcal{F}_p \hat{\otimes} A) \approx \bar{K}_i^{\text{top}}(A)$$

$$\bar{K}_i(\mathcal{F}_p \hat{\otimes} A) \rightarrow \bar{K}_i^{\text{top}}(\mathcal{F}_p \hat{\otimes} A) \approx \bar{K}_i^{\text{top}}(A)$$

sont des isomorphismes pour  $p = -\infty$  ou  $1 \leq p \leq +\infty$ . De manière analogue, si  $A$  est une  $C^*$ -algèbre, l'homomorphisme naturel

$$\bar{K}_i(\mathcal{K} \otimes_{\min} A) \rightarrow \bar{K}_i^{\text{top}}(\mathcal{K} \otimes_{\min} A) = \bar{K}_i^{\text{top}}(A)$$

est aussi un isomorphisme.

3.14. AUTRES EXEMPLES. Le théorème 3.13 est un prototype d'autres théorèmes décrivant la  $K$ -théorie algébrique d'une "stabilisation topologique" de  $A$  en termes de la  $K$ -théorie topologique de  $A$ . Pour toute algèbre de Banach  $A$ , on peut par exemple définir  $\ell^p(A)$  comme l'ensemble des suites infinies  $(x_1, x_2, \dots)$  telles que  $\sum \|x_i\|^p < +\infty$ . L'ensemble des applications  $A$ -linéaires continues de  $\ell^p(A)$  dans lui-même est une algèbre de Banach qui contient les matrices finies. Si on désigne par  $\bar{A}_p$  l'adhérence des matrices finies dans cette algèbre de Banach (cf. [23]), des raisonnements tout à fait analogues aux précédents montrent que  $\bar{K}_i(\bar{A}_p) \approx \bar{K}_i^{\text{top}}(A)$  (noter que  $\bar{A}_p$  est topologiquement  $\mathcal{F}_{-\infty}$ -stable). Pour  $p = 1$ , on retrouve l'algèbre  $\bar{A}$  considérée plus haut, c'est-à-dire celle des matrices infinies  $M = (a_{ij})$  telles que  $\sup_j \sum_i \|a_{ij}\| < +\infty$ . Si  $p = +\infty$ , on trouve l'algèbre des matrices infinies telles que  $\sup_i \sum_j \|a_{ij}\| < +\infty$ , qui est isomorphe à la précédente (par transposition). On pourrait aussi considérer l'algèbre des opérateurs " $A$ -nucléaires" c'est-à-dire appartenant à  $\ell_p(A)^* \hat{\otimes}_A \ell_p(A)$  (le dual étant pris au sens des applications  $A$ -linéaires continues). Pour  $p = +\infty$ , on trouve ainsi l'algèbre des matrices telles que  $\sum_j \sup_i \|a_{ij}\| < +\infty$ .

3.15. *Démonstration du théorème 2.6.* D'après l'Appendice 1 (remarque 2 à la fin), on a

$$H_*(\text{BGL}(A)^\delta; \mathbf{Z}/q) \approx H_*(F_{A^+,A}; \mathbf{Z}/q)$$

où  $F_{A^+,A}$  est la fibre homotopique de l'application

$$\text{BGL}'(A^+)^+ \rightarrow \text{BE}(\mathbf{C})^+$$

(attention aux deux significations différentes du signe +!). D'autre part, d'après le théorème 2.5, si on note  $F_{A^+,A}^{\text{top}} \approx \text{BGL}(A)^{\text{top}}$  la fibre homotopique de l'application

$$\text{BGL}'(A)^{\text{top}} \rightarrow \text{BE}(\mathbf{C})^{\text{top}}$$

l'application  $F_{A^+,A} \rightarrow F_{A^+,A}^{\text{top}}$  induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie mod  $q$ . Donc le théorème de Hurewicz mod  $q$  [42] implique l'isomorphisme

$$H_*(\text{BGL}(A)^\delta; \mathbf{Z}/q) \approx H_*(\text{BGL}(A)^{\text{top}}; \mathbf{Z}/q)$$

annoncé dans la première partie du théorème.

Supposons maintenant que  $A$  soit de rang stable fini  $n$ . Alors Charney [8] a montré que

$$H_i(\text{BGL}_m(A)^\delta; \mathbf{Z}/q) \approx H_i(\text{BGL}(A)^\delta; \mathbf{Z}/q)$$

pour  $m \geq 2i + n + 3$ . D'autre part, par des considérations toutes différentes, Corach et Larotonda [11] ont montré que

$$H_i(\text{BGL}_m(A)^{\text{top}}) \approx H_i(\text{BGL}(A)^{\text{top}})$$

pour  $m \geq n + i - 1$ , donc à fortiori la même propriété pour l'homologie à coefficients dans  $\mathbf{Z}/q$ . Mais, si  $A$  est  $\mathcal{S}_p$ -stable, on a en particulier  $A \approx M_2(A)$  et les groupes  $\text{GL}_{2^n}(A)$  sont indépendants de  $n$ . La deuxième partie du théorème résulte alors de la première partie.

3.16. REMARQUE. Si  $A$  est une algèbre de Banach topologiquement  $\mathcal{S}_p$ -stable, il en est de même de  $M_n(A)$  (remarquer que  $M_2(M_n(A)) \approx M_{2n}(A) \approx M_n(M_2(A)) \approx M_n(A)$ ). Avec les hypothèses de rang stable on a donc aussi  $H_*(\text{BGL}_n(A)^\delta; \mathbf{Z}/q) \approx H_*(\text{BGL}_n(A)^{\text{top}}; \mathbf{Z}/q)$ .

3.17. *Démonstration du corollaire 2.8.* Considérons la théorie cohomologique

$$X \mapsto K_A^{\text{top}}(X; \mathbf{Z}/q)$$

où  $K_A^{\text{top}}(X)=[X, K_0(A) \times \text{BGL}(A)^{\text{top}}]$  et où  $K_A^{\text{top}}(X; \mathbf{Z}/q)$  est la théorie à coefficients associée [1], qu'on notera simplement  $\bar{K}_A(X)$ . D'après le théorème de Kunnet en K-théorie topologique, on a un isomorphisme naturel (donné par des cup-produits)

$$\bar{K}_A^{\text{top}}(X) \approx (\bar{K}_C^{\text{top}}(X))^{d_0} \oplus (\bar{K}_C^{-1 \text{top}}(X))^{d_1}.$$

Il en résulte aussitôt que  $\text{BGL}(A)^{\text{top}}$  a même homotopie, donc même homologie mod  $q$ , que  $(BU)^{d_0} \times (U)^{d_1}$ . Puisque  $\text{BGL}(A)^{\text{top}}$  a même homologie mod  $q$  que  $\text{BGL}_1(A)^\delta$  on en déduit que

$$H_*(\text{BGL}_1(A)^\delta; \mathbf{Z}/q) \approx H_*(BU^{d_0} \times U^{d_1}; \mathbf{Z}/q)$$

pour tout  $q$ . Donc

$$H^*(\text{BGL}_1(A)^\delta; \mathbf{Z}/q) \approx H^*(BU^{d_0} \times U^{d_1}; \mathbf{Z}/q)$$

c'est-à-dire le produit tensoriel gradué de  $d_0$  algèbres de polynômes et de  $d_1$  algèbres extérieures.

3.18. EXEMPLES. Un cas particulièrement intéressant est celui où  $A$  est l'algèbre de Banach  $\mathcal{S}_p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ . Son rang stable (au sens de Bass) est égal à 2 et son groupe  $K_0$  (resp.  $K_1^{\text{top}}$ ) est égal à  $\mathbf{Z}$  (resp. 0). Par conséquent, si on désigne par  $\Gamma_p$  le groupe  $\text{GL}_1(\mathcal{S}_p)$ , c'est-à-dire l'ensemble des opérateurs inversibles dans l'espace de Hilbert  $H$  de la forme  $1 + k$  avec  $k \in \mathcal{S}_p$ , on trouve que sa cohomologie à coefficients dans  $\mathbf{Z}/q$  est l'algèbre de polynômes (à une infinité de variables)

$$\mathbf{Z}/q[c_1, c_2, \dots]$$

avec  $\text{deg}(c_i) = 2i$  (ce sont les "classes de Chern" mod  $q$ ). Plus généralement, un argument dû à Rieffel [47] p. 317 permet de montrer que  $\text{RS}(B) \leq 3$  si  $B = \mathcal{S}_p \hat{\otimes} A$ ,  $\mathcal{S}_p \hat{\otimes} A$  ou  $\mathcal{K} \otimes_{\text{min}} A$  pour  $A$  algèbre de Banach quelconque dans les deux premiers cas,  $A$   $C^*$ -algèbre dans le troisième. Ceci permet de calculer  $H_*(\text{BGL}_1(B); \mathbf{Z}/q)$  et  $H^*(\text{BGL}_1(B); \mathbf{Z}/q)$  en fonction de  $K_0(A)$  et  $K_1^{\text{top}}(A)$ . Par exemple, si  $A = \mathcal{S}_p \hat{\otimes} C(X)$ , cette homologie ou cette cohomologie peut se calculer à partir de la K-théorie topologique usuelle de l'espace compact  $X$ .

3.19. Considérons de même le groupe  $G$  des éléments inversibles de l'algèbre de Calkin  $\mathcal{B}/\mathcal{K}$  (qui n'est plus de rang stable fini)\*). Si on désigne par  $G_0$  la composante neutre de  $G$ , on a une suite exacte de groupes

$$1 \rightarrow \Gamma_\infty \rightarrow \mathcal{B}^* \rightarrow G_0 \rightarrow 1$$

(\*) Ceci résulte d'un théorème de Corach-Larotonda: *C. R. Acad. Sci. Paris*, 296 (1983), 949-951; corollaire 1, p. 950.

donc deux fibrations

$$\begin{array}{ccccc}
 B\Gamma_\infty^\delta & \rightarrow & B\mathcal{B}^{*\delta} & \rightarrow & BG_0^\delta \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 B\Gamma_\infty & \rightarrow & B\mathcal{B}^* & \rightarrow & BG_0 .
 \end{array}$$

D'après N. Kuiper [35]  $B\mathcal{B}^*$  est contractile et d'après Pierre de la Harpe et Dusa Mc Duff [18]  $B\mathcal{B}^{*\delta}$  a une homologie triviale. D'autre part, puisque  $B\Gamma_\infty^\delta$  et  $B\Gamma_\infty$  ont la même homologie à coefficients dans  $\mathbf{Z}/q$ ,  $\Pi_1(BG_0^\delta) = G_0$  opère trivialement sur cette homologie. Le théorème de comparaison sur les suites spectrales [38] implique alors que  $BG_0^\delta$  et  $BG_0$  ont même homologie.

On a aussi une suite exacte de groupes

$$G_0 \rightarrow G \xrightarrow{i} \mathbf{Z}$$

(où  $i$  est l'application "indice") qui induit des fibrations

$$\begin{array}{ccccc}
 BG_0^\delta & \rightarrow & BG^\delta & \rightarrow & B\mathbf{Z} = S^1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 BG_0 & \rightarrow & BG & \rightarrow & B\mathbf{Z}
 \end{array}$$

Le même argument que ci-dessus montre que  $BG^\delta$  et  $BG$  ont la même homologie à coefficients dans  $\mathbf{Z}/q$ . Or il est bien connu que  $BG$  a le type d'homotopie du groupe unitaire infini (ceci résulte par exemple de la caractérisation axiomatique des foncteurs  $K^i$  [23]). On en déduit le théorème suivant :

3.20. THÉORÈME. *Soit  $G$  le groupe des éléments inversibles de l'algèbre de Calkin  $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ . Alors la cohomologie mod  $q$  de  $BG$  est une algèbre extérieure sur  $\mathbf{Z}/q$  à une infinité de variables*

$$A(x_1, x_2, \dots)$$

où  $x_r$  est de degré  $2r - 1$ .

3.21. REMARQUE. En utilisant de nouveau le théorème de comparaison sur les suites spectrales, on peut aussi calculer la cohomologie du groupe discret  $(\mathcal{B}/\mathcal{I}_p)^*$  pour  $1 \leq p < +\infty$ . On trouve le même résultat que dans le théorème 3.20.

3.22. Examinons maintenant la situation dans le cas du groupe orthogonal infini  ${}_cO(A)$  avec les notations de [26], [29]. On suppose ici que  $A$  est une  $\mathbf{C}$ -algèbre munie d'une antiinvolution avec  $\overline{\overline{i}} = i$  ou  $\overline{\overline{i}} = -i$ . En fait, de manière tout à fait parallèle à la  $K$ -théorie algébrique ou topologique "traditionnelle", on peut déve-

opper ce qu'on a appelé la K-théorie hermitienne dans [26] et [29] et qu'on a noté  $L_{\ast}(A)$ . En particulier, dans l'Appendice 1 nous avons montré que le théorème d'excision en K-théorie algébrique mod  $q$  a un analogue en K-théorie hermitienne mod  $q$ .

Reprenons maintenant la démonstration du théorème 2.4 et adaptons la au cas hermitien. Si on suppose que  $\bar{i} = -i$ , on constate que le projecteur  $(1 + J')/2$ , où  $J'$  est défini en 3.5, est autoadjoint, d'où la paraphrase suivante du théorème 2.4 au cas hermitien :

3.23. THÉORÈME. *Soit  $A$  une  $\mathbb{C}$ -algèbre munie d'une antiinvolution  $x \mapsto \bar{x}$  telle que  $\bar{i} = -i$  et qui est  $\mathcal{F}_p$ -stable (les morphismes définis en 2.2 étant compatibles avec l'antiinvolution). Alors*

$${}_e\bar{L}_i(A) \approx {}_e\bar{L}_{i-2}(A)$$

pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ .

3.24. Soit maintenant  $A$  une algèbre de Banach complexe topologiquement  $\mathcal{F}_p$ -stable et munie d'une antiinvolution telle que  $\bar{i} = -i$  ou  $\bar{i} = i$  (on ne suppose maintenant aucune condition de compatibilité entre la  $\mathcal{F}_p$ -stabilité et l'antiinvolution). Nous pouvons alors appliquer le théorème 3 de [33] à l'algèbre de Banach  $A$  : l'homomorphisme canonique

$$K_n(A; \mathbb{Z}/q) \rightarrow K_n^{\text{top}}(A; \mathbb{Z}/q)$$

étant un isomorphisme d'après le théorème 2.5, il en est de même de l'homomorphisme

$${}_eL_n(A; \mathbb{Z}/q) \rightarrow {}_eL_n^{\text{top}}(A; \mathbb{Z}/q)$$

(noter que ces derniers groupes sont périodiques de période 2 si  $\bar{i} = -i$  et de période 8 si  $\bar{i} = i$ ). Comme plus haut, en appliquant le théorème de Hurewicz mod  $q$  et les résultats de l'Appendice 1, on en déduit un isomorphisme

$$H_n(B_eO(A)^{\delta}; \mathbb{Z}/q) \approx H_n(B_eO(A); \mathbb{Z}/q)$$

ce qui fournit d'autres exemples de groupes topologiques  $G$  pour lesquels on a un isomorphisme  $H_n(BG^{\delta}; \mathbb{Z}/q) \approx H_n(BG; \mathbb{Z}/q)$  pour tout  $n$  et  $q$ .

3.25. Quelques remarques pour terminer ce paragraphe: faute de théorèmes de stabilité analogues à ceux de Charney, Corach et Larotonda, notre méthode ne permet pas de calculer les groupes d'homologie de groupes orthogonal "finis"  $H_n({}_eO_{r,r}(A); \mathbb{Z}/q)$ . Dans le cas d'une  $C^*$ -algèbre, elle ne permet pas de calculer non plus l'homologie du groupe unitaire classique muni de la topologie discrète (voir cependant [19] pour des résultats partiels à ce sujet).

4. K-THÉORIE ENTIÈRE D'ALGÈBRES D'OPÉRATEURS

Le but de ce paragraphe est d'étendre à la K-théorie entière certains résultats obtenus dans le paragraphe précédent pour la K-théorie à coefficients. La proposition suivante généralise un théorème bien connu de Brown et Schochet [7].

4.1. PROPOSITION. *Soit A une algèbre de Banach quelconque et soit p tel que  $1 < p \leq +\infty$ . Alors l'homomorphisme canonique*

$$K_1(\mathcal{F}_p \hat{\otimes} A) \rightarrow K_1^{\text{top}}(\mathcal{F}_p \hat{\otimes} A) \approx K_1^{\text{top}}(A)$$

est un isomorphisme. En particulier,  $K_1(\mathcal{F}_p) = 0$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer qu'une matrice de la forme  $1 + \varepsilon \in \text{GL}_1(\mathcal{F}_p(H) \hat{\otimes} A)$  avec  $\|\varepsilon\| < 1$  est stablement un produit de commutateurs. Pour cela, nous allons suivre le schéma de démonstration de la proposition 5.6 de [27] qui en est un cas particulier. On commence par écrire  $1 + \varepsilon = \exp(u)$  avec  $u \in \mathcal{F}_p(H) \hat{\otimes} A$ . Puis, en identifiant  $H$  à la somme hilbertienne de  $\aleph_0$  exemplaires de  $H$ , on considère la matrice infinie formée de blocs diagonaux :

$$(\exp(u), \exp(-u/2), \exp(-u/2), \exp(u/4), \exp(u/4), \exp(u/4), \exp(u/4), \dots).$$

Le point délicat est de montrer que cette matrice (considérée comme limite de blocs finis) appartient bien à  $\mathcal{F}_p(H) \hat{\otimes} A$ . Pour cela, on écrit  $u = \sum r_i v_i \otimes a_i$  où  $(r_i)$  est une suite sommable de nombres réels positifs et où  $v_i \in \mathcal{F}_p(H)$  et  $a_i \in A$  parcourent des parties bornées de  $\mathcal{F}_p(H)$  et de  $A$  respectivement. On a alors (pour  $|\lambda| \leq 1$ )

$$\|\exp(\lambda \sum r_i v_i \otimes a_i) - 1\| \leq C \sum r_i \|\lambda v_i\| \cdot \|a_i\|$$

où  $C$  est une constante. D'autre part, considérons la suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = (\exp(\eta u/2^n), \dots, \exp(\eta u/2^n))$  ( $2^n$  blocs avec  $\eta = 1$  si  $n$  est pair et  $\eta = -1$  si  $n$  est impair) ainsi que la suite  $(y_n)$  définie par

$$y_n = (w_i, w_1, \dots, w_n, 1, 1, \dots).$$

Alors

$$\|y_n - y_{n-1}\| \leq \sum r_i \cdot \|a_i\| \cdot \|v_{i,n}\|$$

avec  $v_{i,n} = (v_i/2^n, v_i/2^n, \dots, v_i/2^n)$  ( $2^n$  blocs de nouveau). Si on désigne par  $\lambda_{i,j}$  les valeurs propres de  $v_i^* v_i$ , on a

$$\|v_i\|^p = \sum \lambda_{i,j}^{p/2}$$

et par conséquent

$$\|v_{i,n}\| = \sqrt[p]{\frac{\sum \lambda_{i,j}^{p/2}}{2^{np}}} \cdot 2^n \leq C' 2^{-n(p-1)/p}$$

où  $C'$  est une constante. Ainsi  $\|y_n - y_{n-1}\|$  est majoré par le terme général d'une série géométrique de raison  $2^{-(p-1)/p}$  et  $(y_n)$  est bien une suite de Cauchy qui converge dans  $\mathcal{I}_p(H \oplus H \oplus \dots) \hat{\otimes} A = \mathcal{I}_p \hat{\otimes} A$ . Pour  $p = +\infty$ , le raisonnement s'étend de manière évidente. La démonstration se termine alors comme celle de la proposition 5.6 de [27] par groupements convenables de blocs.

4.2. COROLLAIRE. *L'homomorphisme canonique*

$$K_2(\mathcal{I}_p) \rightarrow K_2^{\text{top}}(\mathcal{I}_p) \approx \mathbb{Z}$$

est surjectif pour tout  $p$  tel que  $1 < p \leq +\infty$ .

*Démonstration.* C'est la même que celle de la proposition 5.8 de [27].

4.3. Si  $R$  est un anneau sans élément unité, la définition de  $K_1(R)$  que nous avons adoptée est  $\text{Ker}(K_1(R^+) \rightarrow K_1(\mathbb{C}))$ . Cependant, si  $R$  est un idéal dans un anneau  $R_1$ , on peut aussi considérer le groupe  $K_1$  au sens de Bass de l'homomorphisme  $R_1 \rightarrow R_1/R$ : c'est le quotient du groupe  $\text{GL}(R) = \text{Ker}(\text{GL}(R_1) \rightarrow \text{GL}(R_1/R)) = \text{Ker}(\text{GL}(R^+) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}))$  par le sous-groupe  $E(R_1, R)$  engendré par les éléments s'écrivant  $g_1 \varepsilon g_1^{-1}$  où  $g_1 \in \text{GL}(R_1)$  et où  $\varepsilon$  est une matrice élémentaire  $e_{ij}^\lambda$  avec  $\lambda \in R$ . On a un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} R^+ & \longrightarrow & R_1 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_1 \\ \mathbb{C} & \longrightarrow & R_1/R \end{array}$$

d'où on déduit des homomorphismes

$$K_i(R) \approx K_i(\varphi) \rightarrow K_i(\varphi_1).$$

Pour  $i = 1$ , on obtient un homomorphisme surjectif. En particulier, si  $K_1(R) = \{0\}$ , il en est de même de  $K_1(\varphi_1)$ .

En revenant au cas général d'un idéal  $R$  dans un anneau  $R_1$ , le problème de l'injectivité de l'homomorphisme  $K_1(R) \rightarrow K_1(\varphi_1)$  a été étudié pour la première fois par Swan [51]. Dans cette direction nous aurons besoin plus loin du théorème suivant :

4.4. THÉORÈME. *Soit  $R$  un anneau non nécessairement unitaire. Alors*

- 1) *si  $R = R^2$ , l'homomorphisme  $K_1(R) \rightarrow K_1(\varphi_1)$  est bijectif;*
- 2) *si l'homomorphisme  $R \otimes_R R \rightarrow R$  défini par  $a \otimes b \mapsto ab$  est bijectif, il en est de même de l'homomorphisme  $K_2(R) \rightarrow K_2(\varphi_1)$ .*

*Démonstration.* La deuxième partie du théorème est un cas particulier d'un théorème de Van Der Kallen [56], [57]. Notons ici que  $R \otimes_R R$  est le quotient de  $R \otimes_{\mathbb{Z}} R$

par les relations engendrées par  $x\lambda \otimes y - x \otimes \lambda x$  avec  $x, y$  et  $\lambda \in R$ . La première partie du théorème est bien connue (et élémentaire). En voici une démonstration. Le noyau de l'homomorphisme  $K_1(R) \rightarrow K_1(\varphi_1)$  est engendré par les matrices de la forme  $g_1 \varepsilon g_1^{-1}$  avec  $g_1 \in GL(R_1)$  et  $\varepsilon = e_{ij}^\lambda$  élémentaire,  $\lambda \in R$ . Puisque  $R = R^2$ , il suffit de considérer des générateurs du type précédent avec  $\lambda = uv$  où  $u$  et  $v \in R$ . Mais si  $i \neq j \neq k$ , on peut écrire un tel générateur comme le commutateur  $(g_1 e_{ik}'' g_1^{-1})(g_1 e_{kj}^v g_1^{-1}) \cdot (g_1 e_{ik}^{-u} g_1^{-1})(g_1 e_{kj}^u g_1^{-1})$ . Compte tenu des inclusions  $[GL(R), GL(R)] \subset E(R^+, R) \subset E(R_1, R)$  (cf. [3], p. 228), la première partie du théorème est démontrée.

4.5. REMARQUE IMPORTANTE. Soit  $R$  une  $C^*$ -algèbre quelconque (éventuellement non unitaire). Alors l'homomorphisme canonique  $m: R \otimes_R R \rightarrow R$  défini par  $m(a \otimes b) = ab$  est un isomorphisme. En effet, puisque tout élément de  $R$  est combinaison linéaire de carrés,  $m$  est surjectif. Soit maintenant  $z = \sum x_\alpha \otimes y_\alpha$  un élément de  $R \otimes_R R$  tel que  $\sum x_\alpha y_\alpha = 0$ . En écrivant les  $y_\alpha$  comme combinaison linéaire de carrés, on voit que l'on peut supposer  $y_\alpha \geq 0$ . Posons maintenant  $t = \sum y_\alpha$ . Puisque  $t \geq y_\alpha$ , la proposition 1.4.5 de [44] permet d'écrire  $y_\alpha = v_\alpha \sqrt{t}$  avec  $v_\alpha \in R$ . Ainsi  $z$  est un tenseur décomposable  $x \otimes y$  avec  $y = \sqrt{t} \geq 0$  et  $x = \sum x_\alpha v_\alpha$ , tenseur qu'on peut aussi écrire  $x \sqrt{y} \otimes \sqrt{y}$  avec  $\|x \sqrt{y}\|^2 = \|x \sqrt{y} \sqrt{y} x^*\| = \|(xy)x^*\| = 0$ . Donc  $x \sqrt{y} = 0$  et  $z = 0$ .

4.6. DÉFINITION. Soit  $A$  une  $C$ -algèbre qui est  $\mathcal{F}_p$ -stable. Nous dirons que  $A$  est  $\mathcal{F}_p$ -hyperstable si l'application bilinéaire

$$\varphi: \mathcal{F}_p \times A \rightarrow A$$

qui définit la  $\mathcal{F}_p$ -stabilité est "associative par rapport à  $\mathcal{F}_p$ " dans le sens suivant. Considérons le diagramme

$$\begin{CD} (\mathcal{F}_p(H) \times \mathcal{F}_p(H)) \times A @= \mathcal{F}_p(H) \times (\mathcal{F}_p(H) \times A) @>{\text{Id} \times \varphi}>> \mathcal{F}_p(H) \times A \\ @V{\otimes \times \text{Id}}VV @. @VV{\varphi}V \\ \mathcal{F}_p(H \otimes_2 H) \times A @>>> A \end{CD}$$

dans lequel  $H \otimes_2 H$  a été identifié à  $H$ . Si on désigne par  $\Psi_1$  (resp.  $\Psi_2$ ) la composition des flèches dans le sens  $\downarrow$  (resp.  $\rightarrow$ ) il existe un automorphisme  $\sigma$  de  $A$  tel que  $\Psi_1 = \sigma \circ \Psi_2$ . Nous dirons de même que  $A$  est topologiquement  $\mathcal{F}_p$ -hyperstable si  $\sigma$  est continu.

4.7. EXEMPLES. Tous les exemples donnés en 2.3 sont en fait hyperstables ou topologiquement hyperstables.

4.8. THÉORÈME. Soit  $A$  une  $C$ -algèbre qui est  $\mathcal{F}_p$ -hyperstable avec  $1 < p \leq +\infty$ . Alors

- a)  $K_i(A) \approx K_{i-2}(A)$  pour  $i \leq 0$ ;
- b) Si  $p = +\infty$  et si  $A = A^2$ ,  $K_i(A) \approx K_{i-2}(A)$  pour  $i \leq 1$ ;
- c) Si  $p = +\infty$  et si  $A \otimes_A A \approx A$ ,  $K_i(A) \approx K_{i-2}(A)$  pour  $i \leq 2$ . En particulier,  $K_0(A)$  est isomorphe au groupe de Milnor  $K_2(A)$ .

*Démonstration.* Elle va être analogue dans son esprit à celle du théorème 2.4 (cf. 3.6). Si on désigne par  $u'_2$  un élément de  $K_2(\mathcal{F}_p)$  dont l'image dans  $K_2^{\text{top}}(\mathcal{F}_p) \approx \mathbf{Z}$  est un générateur, les cup-produits par  $u'_2$  et par l'élément  $u_{-2}$  construit en 3.5 définissent des homomorphismes

$$K_i(A) \rightarrow K_{i-2}(A) \quad \text{et} \quad K_{i-2}(A) \rightarrow K_i(A)$$

qui sont bien définis pour  $i \leq 0$  car il y a excision en  $K$ -théorie algébrique pour ces degrés ([27], p. 20). Ces deux homomorphismes sont bien inverses l'un de l'autre par associativité du cup-produit et par le fait que l'image de  $u'_2 \cup u_{-2}$  dans  $K_0(\mathcal{F}_p) = \mathbf{Z}$  est un générateur (utiliser le cup-produit en  $K$ -théorie topologique).

Si  $p = +\infty$  et si  $A = A^2$  (resp.  $A \otimes_A A \approx A$ ), l'argument précédent peut être étendu aux groupes  $K_i$  pour  $i \leq 1$  (resp.  $i \leq 2$ ) car il y a excision au niveau du groupe  $K_1$  (resp.  $K_2$ ) d'après le théorème 4.8. En effet, dans la définition du cup-produit apparaît l'anneau sans élément unité  $\mathcal{K} \otimes_C A = R$  qui vérifie bien  $R = R^2$  (resp.  $R \otimes_R R \approx R$  car  $\mathcal{K}$  est une  $C^*$ -algèbre; cf. 4.5).

4.9. THÉORÈME. Soit  $A$  une algèbre de Banach topologiquement  $\mathcal{F}_p$ -hyperstable avec  $1 < p \leq +\infty$ . Alors  $K_i(A) \approx K_i^{\text{top}}(A)$  pour  $i \leq 1$ . En outre :

- 1) Si  $A = A^2$  et si le rang stable de  $A$  est fini, le quotient de  $GL_n(A)$  par son sous-groupe des commutateurs est isomorphe à  $\Pi_0(A^*)$  pour tout  $n$ .
- 2) Si  $A \otimes_A A \approx A$ ,  $K_2(A) \approx K_2^{\text{top}}(A) \approx K_0(A)$ : Si le rang stable de  $A$  est fini,  $H_2(\text{BGL}_n(A); \mathbf{Z}) \approx H_2(\text{BGL}_n(A)^{\text{top}}; \mathbf{Z}) \approx H_2(\text{BA}^{*\text{top}}; \mathbf{Z})$ . En particulier, la composante neutre  $GL_n^0(A)$  de  $GL_n(A)$  est un groupe parfait et  $H_2(\text{BGL}_n^0(A); \mathbf{Z}) = K_0(A)$ .

*Démonstration.* Considérons d'abord le cas du groupe  $K_1$ . Il est clair que l'homomorphisme  $K_1(A) \rightarrow K_1^{\text{top}}(A)$  est surjectif. D'autre part, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} K_1(A) & \xrightarrow{j_*} & K_1(\mathcal{F}_p \hat{\otimes} A) & \xrightarrow{\varphi_*} & K_1(A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K_1^{\text{top}}(A) & \longrightarrow & K_1^{\text{top}}(\mathcal{F}_p \hat{\otimes} A) & \longrightarrow & K_1^{\text{top}}(A) \end{array}$$

analogue à celui considéré à la fin de 3.11. Puisque la flèche du milieu est un isomorphisme d'après 4.1 et que  $\varphi_* j_* = \text{Id}$ , l'homomorphisme  $K_1(A) \rightarrow K_1^{\text{top}}(A)$  est aussi injectif.

Puisque les groupes  $K_i$  et  $K_i^{\text{top}}$  sont périodiques pour  $i \leq 0$  et que  $K_0 = K_0^{\text{top}}$  par définition, il ne reste plus qu'à considérer le cas du groupe  $K_{-1}$  pour démontrer la première partie du théorème. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} K_{-1}(A) & \longrightarrow & K_{-1}(\mathcal{I}_{-\infty} \hat{\otimes} A) & \longrightarrow & K_{-1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow \\ K_{-1}^{\text{top}}(A) & \longrightarrow & K_{-1}^{\text{top}}(\mathcal{I}_{-\infty} \hat{\otimes} A) & \longrightarrow & K_{-1}^{\text{top}}(A) \end{array}$$

où  $i$  est injectif d'après 3.10, montre que l'homomorphisme  $K_{-1}(A) \rightarrow K_{-1}^{\text{top}}(A)$  est aussi injectif. D'autre part, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_{-1}(A) & \longrightarrow & K_{-1}^{\text{top}}(A) \\ \uparrow & & \uparrow \approx \\ K_1(A) & \longrightarrow & K_1^{\text{top}}(A) \end{array}$$

où les flèches verticales sont définies comme le cup-produit par  $u_{-2}$ , montre que l'homomorphisme  $K_{-1}(A) \rightarrow K_{-1}^{\text{top}}(A)$  est surjectif.

Si le rang stable de  $A$  est fini et si  $A = A^2$  (resp.  $A \otimes_A A \approx A$ ), Van Der Kallen [57] a démontré que

$$H_i(\text{BGL}_n(A); \mathbf{Z}) \approx H_i(\text{BGL}(A); \mathbf{Z})$$

si  $i = 1$  (resp.  $i = 2$ ) pour  $n$  assez grand. Puisque  $A \approx M_2(A)$ , on en déduit aussitôt que

$$H_i(\text{BGL}_n(A); \mathbf{Z}) \approx H_i(\text{BGL}(A); \mathbf{Z}) \approx H_i(\text{BGL}(A)^{\text{top}}; \mathbf{Z})$$

si  $i = 1$  (resp.  $i = 2$ ) pour tout  $n$ . Le théorème de stabilité de Corach et Larotonda [11] montre de même que les groupes d'homotopie, donc les groupes d'homologie de  $\text{BGL}_n(A)^{\text{top}}$  et  $\text{BGL}(A)^{\text{top}}$  sont isomorphes.

Enfin, si on considère la composante neutre  $\text{GL}_n^0(A)$  de  $\text{GL}_n(A)$ , on a

$$H_2(\text{BGL}_n^0(A); \mathbf{Z}) \approx H_2(\text{BE}_n(A); \mathbf{Z}) \approx H_2(\text{BE}(A); \mathbf{Z}) \approx K_2(A) \approx K_0(A)$$

car l'homologie de  $E_n(A)$  se stabilise également [57].

4.10. COROLLAIRE. Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre et soit  $A' = \mathcal{K} \otimes_{\min} A$ . Alors

1)  $K_1(A') \approx K_1^{\text{top}}(A') \approx K_1^{\text{top}}(A)$ . En outre, le sous-groupe des commutateurs de  $\text{GL}_n(A')$  est la composante neutre de  $\text{GL}_n(A')$  pour tout  $n$ .

2)  $K_2(A') \approx K_2^{\text{top}}(A') \approx K_2^{\text{top}}(A)$ . En outre, si on désigne par  $\text{GL}_n^0(A')$  la composante neutre de  $\text{GL}_n(A')$ , son deuxième groupe d'homologie est naturellement isomorphe à  $K_0(A') \approx K_0(A)$ .

4.11. **EXEMPLES ET COMMENTAIRES.** La première partie du corollaire a été trouvée indépendamment par P. de la Harpe et G. Skandalis [19] par une méthode toute différente. La deuxième partie avait été conjecturée dans [27] et partiellement démontrée (pour  $A = \mathbb{C}$ ) par Brown, de la Harpe et Schochet [16]. Le corollaire se déduit bien du théorème précédent car  $\mathcal{K} \otimes_{\min} A$  est de rang stable fini d'après un théorème de Rieffel [47].

Notons aussi que le théorème 4.9 peut s'appliquer à certaines  $C^*$ -algèbres qui ne sont pas de rang stable fini. Ainsi, le théorème de comparaison "tronqué" sur la suite spectrale associée à la fibration

$$\mathrm{BGL}_1(\mathcal{K} \otimes_{\min} A) \rightarrow \mathrm{BGL}_1(\mathcal{B} \otimes_{\min} A) \rightarrow \mathrm{BGL}_1^0(\mathcal{B}/\mathcal{K} \otimes_{\min} A)$$

donne un isomorphisme  $H_2(\mathrm{BGL}_1^0(\mathcal{B}/\mathcal{K} \otimes_{\min} A) \approx K_1^{\mathrm{top}}(A)$ .

4.12. Nous allons maintenant décrire brièvement la situation pour les groupes  $K_i(\mathcal{I}_p)$  avec  $i > 1$ , situation beaucoup plus complexe que pour les groupes  $\bar{K}_i(\mathcal{I}_p)$ . On pourrait décrire des situations analogues pour les groupes  $K_i(\mathcal{I}_p \hat{\otimes} A)$ . Nous allons pour cela utiliser les classes caractéristiques en  $K$ -théorie topologique et algébrique définies par A. Connes et l'auteur [9], [31], [32] et qui sont à valeurs dans l'homologie cyclique.

Le théorème suivant est une conséquence de la théorie de Chern-Weil étendue à ce cadre.

4.13. **THÉORÈME.** *L'homomorphisme canonique*

$$K_{2n}(\mathcal{I}_p) \rightarrow K_{2n}^{\mathrm{top}}(\mathcal{I}_p) \approx \mathbb{Z}$$

est trivial si  $p \leq 2n - 1$ .

*Démonstration.* On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} K_{2n}(\mathcal{I}_p) & \longrightarrow & K_{2n}^{\mathrm{top}}(\mathcal{I}_p) & \approx & K_{2n}^{\mathrm{top}}(\mathbb{C}) \approx \mathbb{Z} \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ HC_{2n}(\mathcal{I}_p) & \xrightarrow{S} & HC_{2n-2}^{\mathrm{top}}(\mathcal{I}_p) & \leftarrow & HC_{2n-2}^{\mathrm{top}}(\mathbb{C}) \approx \mathbb{C} \end{array}$$

La flèche oblique est réduite à 0 en raison de la définition simpliciale des classes caractéristiques en termes de connexion et courbure (théorie de Chern-Weil; cf. [31]). D'autre part, si  $p \leq 2n - 1$ , la flèche  $HC_{2n-2}^{\mathrm{top}}(\mathbb{C}) \rightarrow HC_{2n-2}^{\mathrm{top}}(\mathcal{I}_p)$  est une injection scindée, la flèche en sens inverse étant définie par

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{2n-2} \mapsto \mathrm{Tr}(a_0 a_1 \dots a_{2n-2})$$

(le produit des  $a_i$  appartient bien à  $\mathcal{I}_1$  en raison de l'inégalité de Hölder; cf. 1.1).

Par conséquent, l'homomorphisme  $K_{2n}(\mathcal{J}_p) \rightarrow K_{2n}^{\text{top}}(\mathcal{J}_p)$  est bien réduit à 0 si  $p \leq 2n - 1$ .

4.14. COROLLAIRE. Si  $n \geq (1 + p)/2$

- a)  $K_{2n}(\mathcal{J}_p)$  est un groupe uniquement divisible;
- b)  $K_{2n-1}(\mathcal{J}_p)$  est la somme directe de  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  et d'un groupe uniquement divisible.

Démonstration. Pour tout nombre entier  $q > 0$ , on a la suite exacte

$$0 = K_{2n+1}(\mathcal{J}_p; \mathbf{Z}/q) \rightarrow K_{2n}(\mathcal{J}_p) \xrightarrow{q} K_{2n}(\mathcal{J}_p) \rightarrow K_{2n}(\mathcal{J}_p; \mathbf{Z}/q).$$

Le dernier homomorphisme est réduit à 0 en raison du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_{2n}(\mathcal{J}_p) & \rightarrow & K_{2n}(\mathcal{J}_p; \mathbf{Z}/q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_{2n}^{\text{top}}(\mathcal{J}_p) & \rightarrow & K_{2n}^{\text{top}}(\mathcal{J}_p; \mathbf{Z}/q) \end{array}$$

et du théorème précédent. Ainsi la multiplication par  $q$  est un isomorphisme sur  $K_{2n}(\mathcal{J}_p)$ , ce qui signifie que  $K_{2n}(\mathcal{J}_p)$  est uniquement divisible.

Pour tout  $q$  on a de même la suite exacte

$$0 \rightarrow K_{2n}(\mathcal{J}_p; \mathbf{Z}/q) \xrightarrow{\partial_q} K_{2n-1}(\mathcal{J}_p) \xrightarrow{q} K_{2n-1}(\mathcal{J}_p) \rightarrow 0.$$

Si on désigne par  $G$  la réunion des images des  $\partial_q$ , on a évidemment  $G \approx \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  ainsi qu'une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \rightarrow K_{2n-1}(\mathcal{J}_p) \rightarrow H \rightarrow 0.$$

En désignant par  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  la multiplication par  $q$  sur chacun de ces trois groupes, la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & \text{Ker } \alpha & \rightarrow & \text{Ker } \beta & \rightarrow & \text{Ker } \gamma & \rightarrow & \text{Coker } \alpha & \rightarrow & \text{Coker } \beta & \rightarrow & \text{Coker } \gamma \\ & \cong & & \cong & & & & \parallel & & \parallel & & \\ & \mathbf{Z}/q & & \mathbf{Z}/q & & & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

montre que  $H$  est uniquement divisible, c'est-à-dire est un  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel. Une base de  $H$  fournit alors un scindage de  $K_{2n-1}(\mathcal{J}_p)$  en la somme directe de  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  et de  $H$ .

4.15. Pour toute algèbre de Banach  $R$  nous avons introduit dans [31], [32] des groupes de  $K$ -théorie "relative"  $K_i^{\text{rel}}(R)$  qui s'insèrent dans des suites exactes

$$K_{i+1}(R) \rightarrow K_{i+1}^{\text{top}}(R) \rightarrow K_i^{\text{rel}}(R) \rightarrow K_i(R) \rightarrow K_i^{\text{top}}(R).$$

Ces groupes mesurent en quelque sorte la “différence” entre la K-théorie algébrique et la K-théorie topologique. Par un formalisme éprouvé en topologie algébrique, on peut aussi introduire des groupes de K-théorie relative à coefficients  $K_i^{rel}(R; \mathbf{Z}/q) = \overline{K}_i^{rel}(R)$ . En particulier,  $\overline{K}_i^{rel}(\mathcal{S}_p) = 0$  d’après le théorème 2.6.

4.16. THÉORÈME. *Soit  $p$  tel que  $1 < p \leq 3$ . Alors le groupe  $K_3^{rel}(\mathcal{S}_p)$  (resp.  $K_3(\mathcal{S}_p)$ ) contient une copie de  $\mathbf{C}$  (resp.  $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ ) en facteur direct.*

*Démonstration.* A l’aide de la définition simpliciale des classes caractéristiques et de la propriété multiplicative du caractère de Chern [31], [32], on peut écrire un diagramme commutatif

$$\begin{CD} K_1^{rel}(\mathbf{C}) \times K_2(\mathcal{S}_p^+) @>>> K_3^{rel}(\mathcal{S}_p^+) \\ @VVV @VVV \\ \overline{\Omega}_0^{top}(\mathbf{C}) \times \overline{Z}_2^{top}(\mathcal{S}_p^+) @>>> \overline{\Omega}_2^{top}(\mathcal{S}_p^+)/\overline{B}_2^{top}(\mathcal{S}_p^+) \end{CD}$$

avec la définition des formes différentielles “non commutatives” donnée dans [9] et [31],[32]. Dans ce diagramme  $\overline{\Omega}_0^{top}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$  et  $K_1^{rel}(\mathbf{C}) \approx \mathbf{C}$ . D’autre part, l’image de  $u_2'$  (cf. 4.8) dans  $\overline{Z}_2^{top}(\mathcal{S}_p^+)$  n’est pas triviale en raison du diagramme commutatif

$$\begin{CD} K_2(\mathcal{S}_p) @>>> K_2^{top}(\mathcal{S}_p) @<<< \approx K_2^{top}(\mathbf{C}) \approx \mathbf{Z} \\ @VVV @VVV @VVV \\ \overline{Z}_2^{top}(\mathcal{S}_p^+) @>>> \overline{H}_2^{top}(\mathcal{S}_p^+) @<<< \overline{H}_2^{top}(\mathbf{C}^+) \approx \mathbf{C} \end{CD}$$

déjà considéré plus haut dans un contexte légèrement différent. Ainsi, par une chasse au diagramme, on voit que le cup-produit par  $u_2'$  définit une injection scindée de  $\mathbf{C} \approx K_1^{rel}(\mathbf{C})$  dans  $K_3^{rel}(\mathcal{S}_p)$  (l’hypothèse  $p \leq 3$  est intervenue dans le fait que l’homomorphisme  $\overline{H}_2^{top}(\mathbf{C}^+) \rightarrow \overline{H}_2^{top}(\mathcal{S}_p^+)$  est une injection scindée; cf. 4.13). D’autre part, on a une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} K_4(\mathcal{S}_p) & \rightarrow & K_4^{top}(\mathcal{S}_p) & \rightarrow & K_3^{rel}(\mathcal{S}_p) & \rightarrow & K_3(\mathcal{S}_p) \rightarrow K_3^{top}(\mathcal{S}_p) \\ & & \cong & & & & \parallel \\ & & \mathbf{Z} & & & & 0 \end{array}$$

Le premier homomorphisme est réduit à 0 d’après 4.13. Puisque le générateur de  $K_4^{top}(\mathcal{S}_p)$  est le cup-produit de  $u_2'$  avec le générateur de Bott de  $K_2^{top}(\mathbf{C})$  (dont l’image dans  $K_1^{rel}(\mathbf{C}) \approx \mathbf{C}$  est  $2j\pi$ ), il en résulte aussitôt que  $K_3(\mathcal{S}_p)$  contient  $\mathbf{C}/2i\pi\mathbf{Z} \approx \mathbf{C}/\mathbf{Z}$  en facteur direct.

4.17. THÉORÈME. *Pour  $p \leq 2n + 1$ , le groupe  $K_{2n+1}(\mathcal{S}_p)$  contient un  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel de dimension infinie.*

*Démonstration.* Bien que  $\mathcal{S}_p^+$  ne soit pas une  $C^*$ -algèbre, c'est une  $C$ -algèbre dans le sens de [29], p. 233 (c'est-à-dire que  $1 + M^*M$  est inversible pour tout  $M \in \mathcal{S}_p^+$ ). En munissant les fibrés plats de "métriques" dans le sens de [29], p. 235, on définit ainsi un homomorphisme  $K_i(\mathcal{S}_p^+) \rightarrow K_i^{\text{rel}}(\mathcal{S}_p^+)$ . Celui-ci composé avec l'homomorphisme canonique en sens inverse est l'endomorphisme  $x \mapsto x - \bar{x}$  de  $K_i(\mathcal{S}_p^+)$ ,  $x \mapsto \bar{x}$  étant induit par l'application contragrédiente. Si on note  $\tilde{K}_*(R^+)$  le groupe  $K_*(R)$  en général, on a ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{K}_{2n+1}(C^+) & \longrightarrow & \tilde{K}_{2n+1}(\mathcal{S}_p^+) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{K}_{2n+1}^{\text{rel}}(C^+) & \longrightarrow & \tilde{K}_{2n+1}^{\text{rel}}(\mathcal{S}_p^+) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C \approx \overline{\Omega}_{2n}^{\text{top}}(C^+)/\overline{B}_{2n}^{\text{top}}(C^+) & \longrightarrow & \overline{\Omega}_{2n}^{\text{top}}(\mathcal{S}_p^+)/\overline{B}_{2n}^{\text{top}}(\mathcal{S}_p^+).
 \end{array}$$

D'autre part, d'après Borel [4] et Suslin [53],  $K_{2n+1}(\overline{\mathbf{Q}})$  est la somme directe de  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  et d'un groupe uniquement divisible  $H$  (c'est-à-dire d'un  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel) qui est la limite inductive des composantes libres des groupes  $K_{2n+1}$  d'entiers algébriques de corps de nombres. En particulier, ce  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel est de dimension infinie et l'application induite de  $H$  dans  $\overline{\Omega}_{2n}^{\text{top}}(C^+)/\overline{B}_{2n}^{\text{top}}(C^+) \approx \overline{H}_0(C^+) \approx C$  est injective d'après la théorie générale des classes caractéristiques de fibrés plats (cf. Borel [4] et [31], [32]). Le groupe  $K_{2n+1}(\mathcal{S}_p) = \tilde{K}_{2n+1}(\mathcal{S}_p^+)$  contient donc bien un  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel de dimension infinie qui est l'image de  $H$  dans  $\tilde{K}_{2n+1}(\mathcal{S}_p^+)$ .

4.18. REMARQUE. Pour le groupe  $K_3$  nous avons démontré un meilleur résultat en 4.16 (si  $p > 1$ ). J'ignore si les deux  $\mathbf{Q}$ -espaces vectoriels obtenus par l'une ou l'autre des méthodes sont supplémentaires.

4.19. Il existe une manière beaucoup plus conceptuelle de définir un homomorphisme

$$K_{2n+1}^{\text{rel}}(C) \rightarrow C.$$

Le cup-produit par  $(u_{-2})^n \in \tilde{K}_{-2n}(\mathcal{S}_1^+)$  (cf: 3.6) définit en effet un homomorphisme

$$K_{2n+1}^{\text{rel}}(C) \rightarrow \tilde{K}_1^{\text{rel}}(\mathcal{S}_1^+).$$

D'autre part, il n'est pas difficile de construire un homomorphisme "trace"  $\tilde{K}_1^{\text{rel}}(\mathcal{S}_1^+) \rightarrow C$  qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \tilde{K}_2^{\text{top}}(\mathcal{S}_1^+) & \rightarrow & \tilde{K}_1^{\text{rel}}(\mathcal{S}_1^+) & \rightarrow & \tilde{K}_1(\mathcal{S}_1^+) \rightarrow 0 \\
 & & \approx \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & 2i\pi\mathbf{Z} & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C^* \rightarrow 0
 \end{array}$$

où la dernière flèche verticale est le déterminant de Fredholm. Désignons par  $\theta: K_{2n+1}^{rel}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  l'homomorphisme composé et par  $R: K_{2n+1}^{rel}(\mathbb{C}) \rightarrow \bar{\Omega}_{2n}(\mathbb{C}^+)/\bar{B}_{2n}(\mathbb{C}^+) \approx \mathbb{C}$  l'homomorphisme défini dans [31], [32] et utilisé plus haut.

4.20. PROPOSITION. *On a la formule*

$$\theta = \frac{1}{(2i\pi)^{2n}} R.$$

*Démonstration.* Précisons d'abord que, contrairement aux conventions de [9], l'homomorphisme  $S$  de périodicité qui fait passer de  $HC_p$  à  $HC_{p-2}$  et de  $\bar{\Omega}_{2p}$  à  $\bar{\Omega}_{2p-2}$  ne fait pas intervenir de facteur  $2i\pi$ , ce qui nous a été imposé par la définition algébrique du caractère de Chern [31], [32]. D'autre part, il est plus commode ici d'utiliser la définition des groupes  $K_{-i}$  en termes de polynômes laurentiens [3], [24]. Plus précisément  $\tilde{K}_{-2n}(\mathcal{S}_1^+)$  est un quotient bien déterminé de  $\tilde{K}_0(\mathcal{S}_1^+(\mathbb{Z}^{2n}))$  en désignant par  $\mathcal{S}_1^+(\mathbb{Z}^{2n})$  l'anneau  $\mathcal{S}_1^+[t_1, \dots, t_{2n}, t_1^{-1}, \dots, t_{2n}^{-1}]$ . On peut alors écrire les deux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} K_{2n+1}^{rel}(\mathbb{C}) \times \tilde{K}_0(\mathcal{S}_1^+(\mathbb{Z}^{2n})) & \longrightarrow & \tilde{K}_{2n+1}^{rel}(\mathcal{S}_1^+(\mathbb{Z}^{2n})) \\ \text{ch}^{rel} \times \text{ch} \downarrow & & \downarrow \text{ch}^{rel} \\ \mathbb{C} \times \bar{H}_{2n}(\mathcal{S}_1^+(\mathbb{Z}^{2n})) & \longrightarrow & \bar{\Omega}_{2n}(\mathcal{S}_1^+(\mathbb{Z}^{2n}))/\bar{B}_{2n}(\mathcal{S}_1^+(\mathbb{Z}^{2n})) \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}_1^{rel}(\mathcal{S}_1^+) \times K_{2n}(\mathbb{C}(\mathbb{Z}^{2n})) & \longrightarrow & \tilde{K}_{2n+1}^{rel}(\mathcal{S}_1^+(\mathbb{Z}^{2n})) \\ \text{ch}^{rel} \times \text{ch} \downarrow & & \downarrow \text{ch}^{rel} \\ \mathbb{C} \times \bar{H}_{2n}(\mathbb{C}(\mathbb{Z}^{2n})) & \longrightarrow & \bar{\Omega}_{2n}(\mathcal{S}_1^+(\mathbb{Z}^{2n}))/\bar{B}_{2n}(\mathcal{S}_1^+(\mathbb{Z}^{2n})). \end{array}$$

Dans ces deux diagrammes il convient de noter que chacun des caractères de Chern notés  $\text{ch}$  a une signification légèrement différente. Dans le premier diagramme il est de nature topologique: il donne par la "trace" la classe fondamentale du tore multipliée par  $(2i\pi)^{2n}$ . Dans le second diagramme il donne exactement la classe fondamentale du tore comme on le démontre aisément par cup-produit. La proposition se démontre alors par simple chasse au diagramme.

4.21. THÉORÈME. *On a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} K_{2n+1}^{rel}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & K_{2n+1}(\mathbb{C}) \\ \frac{R}{(2i\pi)^{2n}} \downarrow & & \downarrow \theta' \\ \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \end{array}$$

où  $\theta'(x) = \det(x \cup (u_{-2})^n)$ ,  $\det$  désignant le déterminant de Fredholm. En particulier, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & K_{2n+1}(\mathbb{C}) & \\
 \theta' \swarrow & & \searrow \frac{R'}{(2i\pi)^{2n}} \\
 \mathbb{C}^* & \xrightarrow{L} & \mathbb{C}
 \end{array}$$

où  $L(\lambda) = \text{Log}(\lambda\bar{\lambda})$  et où  $R'$  est le régulateur de Borel [4].

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de ce qui précède.

### APPENDICE I

#### DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME D'EXCISION MODULO $q$ EN K-THÉORIE ALGÈBRIQUE ET HERMITIENNE

Soit  $I$  un anneau quelconque (éventuellement sans élément unité). On dira que  $I$  est un *idéal excisif* pour la K-théorie algébrique modulo  $q$  si, pour tout carré cartésien d'anneaux

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & A_1 \\
 \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\
 A_2 & \longrightarrow & A'
 \end{array}$$

avec  $I \approx \text{Ker } \varphi_1$  et  $\varphi_1$  surjectif, on a

$$K_n(\varphi_1; \mathbb{Z}/q) \approx K_n(\varphi_2; \mathbb{Z}/q)$$

pour tout  $n$ . En particulier, on a une suite exacte de K-groupes à coefficients (qu'on note  $\bar{K}$ ):

$$\bar{K}_{n+1}(A_1) \oplus \bar{K}_{n+1}(A_2) \rightarrow \bar{K}_{n+1}(A') \rightarrow \bar{K}_n(A) \rightarrow \bar{K}_n(A_1) \oplus \bar{K}_n(A_2) \rightarrow \bar{K}_n(A')$$

Le théorème suivant est essentiellement dû à Weibel [61] et Charney [8].

**THÉORÈME 1.** *Soit  $I$  un anneau tel que  $\tilde{H}_*(I; \mathbb{Z}/q) = 0$  ( $I$  étant considéré comme groupe abélien). Alors  $I$  est excisif pour la K-théorie à coefficients dans  $\mathbb{Z}/q$ .*

*Démonstration.* Soit

$$0 \rightarrow I \rightarrow R \xrightarrow{\varphi} R/I = R' \rightarrow 0$$

une suite exacte d'anneaux. Soit  $E(R')$  le sous-groupe de  $GL(R')$  engendré par les

matrices élémentaires,  $GL'(R)$  le sous-groupe de  $GL(R)$  défini par le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} GL'(R) & \longrightarrow & GL(R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E(R') & \longrightarrow & GL(R') \end{array}$$

Soit enfin  $F_{R,I}$  la fibre homotopique de l'application

$$BGL'(R)^+ \rightarrow BE(R')^+.$$

On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} BGL(I) & \longrightarrow & F_{R,I} \\ \downarrow & & \downarrow \\ BGL'(R) & \longrightarrow & BGL'(R)^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ BE(R') & \longrightarrow & BE(R')^+ \end{array}$$

Avant de démontrer le théorème, nous allons d'abord voir qu'il suffit de montrer que l'application  $BGL(I) \rightarrow F_{R,I}$  induit un isomorphisme en homologie modulo  $q$ . Pour cela, nous allons utiliser de manière essentielle le délaçage de la  $K$ -théorie algébrique décrit dans [59], ce qui permet d'ailleurs de définir les groupes  $K_i$  et  $K_i(\ ; \mathbf{Z}/q)$  pour tout  $i \in \mathbf{Z}$ . Ce délaçage est obtenu en remplaçant les anneaux  $A$  considérés par leur "suspension"  $SA = S\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} A$  (cf. [23], [29], [34], [59]): on a alors  $\Omega BGL(SA)^+ \sim K_0(A) \times BGL(A)^+$  de manière naturelle. On peut noter ici que si  $\tilde{H}_*(I; \mathbf{Z}/q) = 0$ , on a aussi  $\tilde{H}_*(SI; \mathbf{Z}/q) = 0$  car  $S\mathbf{Z}$  est sans torsion.

Soit maintenant

$$0 \rightarrow I \rightarrow R_1 \rightarrow R_1/I = R'_1 \rightarrow 0$$

une autre suite exacte d'anneaux et soit  $\theta: R \rightarrow R_1$  un homomorphisme d'anneaux qui coïncide avec l'identité sur l'idéal  $I$ . Alors  $\theta$  induit une application  $\bar{\theta}: F_{R,I} \rightarrow F_{R_1,I}$  qui induit un isomorphisme en homologie mod  $q$  d'après l'hypothèse. D'autre part, quitte à remplacer les anneaux  $R, R_1$  et  $I$  par leurs suspensions, on peut supposer que

$$\Pi_1(F_{R,I}) \approx H_1(F_{R,I}) \approx \Pi_1(F_{R_1,I}) \approx H_1(F_{R_1,I})$$

car il y a excision au niveau des groupes  $K_0$  [39].

Posons pour alléger les notations  $X = F_{R,I}, X_1 = F_{R_1,I}$  et désignons par  $\tilde{X}$  et  $\tilde{X}_1$  les revêtements universels de  $X$  et  $X_1$  respectivement. On a alors le diagramme

commutatif de fibrations

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X} & \longrightarrow & \tilde{X}_1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \longrightarrow & X_1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 K(\Pi, 1) & = & K(\Pi_1, 1)
 \end{array}$$

avec  $\Pi = \Pi_1(X) = K_1(\varphi) = \Pi_1 = \Pi_1(X_1) = K_1(\varphi_1)$ . Puisque  $X$  et  $X_1$  sont des espaces de lacets [59],  $\Pi = \Pi_1$  opère trivialement sur l'homologie de  $\tilde{X}$  et  $\tilde{X}_1$ . Puisque  $H_*(X; \mathbf{Z}/q) \approx H_*(X_1; \mathbf{Z}/q)$  par hypothèse, le théorème de comparaison sur les suites spectrales montre que  $H_*(\tilde{X}; \mathbf{Z}/q) \approx H_*(\tilde{X}_1; \mathbf{Z}/q)$ , donc  $\Pi_*(\tilde{X}; \mathbf{Z}/q) \approx \Pi_*(\tilde{X}_1; \mathbf{Z}/q)$  d'après le théorème de Hurewicz mod  $q$  pour les espaces simplement connexes [42]. Donc  $\Pi_*(X; \mathbf{Z}/q) \approx \Pi_*(X_1; \mathbf{Z}/q)$  d'après la suite exacte d'homotopie mod  $q$  des espaces fibrés. La même suite exacte montre ainsi que

$$K_i(\varphi; \mathbf{Z}/q) \approx \Pi_i(F_{R,I}; \mathbf{Z}/q) \approx \Pi_i(F_{R,I}; \mathbf{Z}/q) \approx K_i(\varphi_1; \mathbf{Z}/q)$$

pour  $i \geq 2$ . En utilisant de nouveau le délaçage de la  $K$ -théorie mentionné plus haut, on en déduit que  $K_i(\varphi; \mathbf{Z}/q) \approx K_i(\varphi_1; \mathbf{Z}/q)$  pour tout  $i \in \mathbf{Z}$ .

Il nous reste à montrer l'essentiel, à savoir que l'application  $BGL(I) \rightarrow F_{R,I}$  induit un isomorphisme en homologie modulo  $q$ . En appliquant le théorème de comparaison sur les suites spectrales, ceci sera démontré si on montre que  $E(R')$  (ou, ce qui revient au même,  $E(R)$ ) opère trivialement sur  $H_*(GL(I); \mathbf{Z}/q)$ . Soit donc  $x \in E_n(R)$ . Dans  $E_{2n}(R)$  on peut écrire  $x$  sous forme d'un produit de matrices de la forme

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Si  $y \in GL_n(I)$  et si  $x'$  est de la première forme par exemple,  $x'$  opère sur  $y$  par la transformation

$$\tau_{x'}: y \mapsto \begin{pmatrix} y & (y - 1)\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Désignons par  $U_{2n}(I)$  le groupe formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec  $\alpha \in GL_n(I)$  et  $\beta \in M_n(I)$ . On a une projection évidente

$$\rho: U_{2n}(I) \rightarrow GL_n(I).$$

Admettons provisoirement le lemme suivant qui sera démontré plus loin :

LEMME. *La projection  $U_{2n}(I) \rightarrow GL_n(I)$  induit un isomorphisme en homologie modulo  $q$ .*

Il en résulte aussitôt que l'homomorphisme canonique

$$H_*(U_{2n}(I)) \rightarrow H_*(GL_{2n}(I))$$

coïncide avec l'homomorphisme composé

$$H_*(U_{2n}(I)) \rightarrow H_*(GL_n(I)) \rightarrow H_*(GL_{2n}(I))$$

puisque l'inclusion  $GL_n(I) \rightarrow U_{2n}(I)$  induit l'homomorphisme inverse de la projection  $\rho$  (tous les groupes d'homologie sont pris à coefficients dans  $\mathbf{Z}/q$ ).

Ainsi, si  $(\tau_{x'})_*: H_*(GL_n(I)) \rightarrow H_*(U_{2n}(I))$  désigne l'homomorphisme induit par  $\tau_{x'}$ , on voit que l'homomorphisme composé

$$H_*(GL_n(I)) \xrightarrow{(\tau_{x'})_*} H_*(U_{2n}(I)) \rightarrow H_*(GL_{2n}(I))$$

coïncide avec l'homomorphisme composé

$$H_*(GL_n(I)) \xrightarrow{(\tau_{x'})_*} H_*(U_{2n}(I)) \xrightarrow{\text{Id}} H_*(GL_n(I)) \rightarrow H_*(GL_{2n}(I)).$$

Donc l'automorphisme intérieur par  $x'$  induit l'identité sur  $H_*(GL(I)) = \varinjlim H_*(GL_n(I))$ . On démontre un résultat analogue si  $x'$  s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

*Démonstration du lemme.* On a une fibration

$$BT_{2n}(I) \rightarrow BU_{2n}(I) \rightarrow BGL_n(I)$$

où  $T_{2n}(I) \approx I^{n^2}$  désigne le groupe abélien formé des matrices s'écrivant sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $\lambda \in M_n(I)$ . La suite spectrale de Hochschild-Serre s'écrit donc

$$H_p(\mathrm{GL}_n(I); H_r(\mathrm{T}_{2n}(I); \mathbf{Z}/q)) \Rightarrow H_{p+r}(\mathrm{U}_{2n}(I); \mathbf{Z}/q).$$

Puisque  $H_0(\mathrm{T}_{2n}; \mathbf{Z}/q) \approx \mathbf{Z}/q$  et que  $H_r(\mathrm{T}_{2n}(I); \mathbf{Z}/q) = 0$  pour  $r \neq 0$ , cette suite spectral dégénère et on trouve bien le résultat annoncé.

REMARQUE 1. Si  $I$  est uniquement  $q$ -divisible,  $\tilde{H}_*(I; \mathbf{Z}/q) = 0$ . En effet, si  $p$  est un diviseur premier de  $q$ , il suffit de démontrer que  $\tilde{H}_*(I; \mathbf{Z}/p) = 0$ , ce qui résulte de [6], théorème 6.4, par exemple.

REMARQUE 2. En fait, nous avons démontré un peu plus que le théorème annoncé, à savoir l'isomorphisme

$$H_*(\mathrm{BGL}(I); \mathbf{Z}/q) \approx H_*(F_{R,I}; \mathbf{Z}/q).$$

En outre, si l'idéal  $I$  vérifie la relation  $(\mathrm{RS})_n$ , R. Charney a démontré que  $H_i(\mathrm{BGL}_m(I); \mathbf{Z}/q) \approx H_i(\mathrm{BGL}(I); \mathbf{Z}/q)$  pour  $m \geq 2i + n + 3$ .

Le théorème précédent se généralise au cas où  $A, A_1, A_2$  et  $A'$  sont des anneaux hermitiens, la  $K$ -théorie étant remplacée par la "L-théorie" dans le sens de [26], [29], [30]. Pour simplifier, on supposera que 2 est inversible dans tous les anneaux considérés. La construction  $\dagger$  de Quillen s'applique à l'espace classifiant du groupe  $\varepsilon$ -orthogonal infini  ${}_\varepsilon\mathrm{O}(A)$  et on pose  ${}_\varepsilon\mathrm{L}_n(A) = \Pi_n(\mathrm{B}_\varepsilon\mathrm{O}(A)^\dagger)$  pour  $n \geq 1$ . En outre, le sous-groupe des commutateurs de  ${}_\varepsilon\mathrm{O}(A)$  est engendré par les matrices  $\varepsilon$ -élémentaires, c'est-à-dire les matrices  $2n \times 2n$  de la forme (cf. [60])

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

avec  ${}^t\bar{\lambda} = -\varepsilon\lambda$ . Si  $I$  est un anneau hermitien (éventuellement sans élément unité), on désigne par  $I_\varepsilon$  le sous-groupe de  $I$  formé des éléments  $u$  tels que  $\bar{u} = -\varepsilon u$ .

THÉORÈME 2. Soit  $I$  un anneau hermitien tel que  $\tilde{H}_*(I; \mathbf{Z}/q) = \tilde{H}_*(I_\varepsilon; \mathbf{Z}/q) \cdots = 0$  ( $I$  et  $I_\varepsilon$  étant considérés comme groupes abéliens). Alors  $I$  est excisif pour la  ${}_\varepsilon\mathrm{L}$ -théorie à coefficients dans  $\mathbf{Z}/q$ . En particulier, pour tout carré cartésien d'anneaux hermitiens

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_1 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ A_2 & \longrightarrow & A' \end{array}$$

avec  $\varphi_1$  surjectif et  $I = \mathrm{Ker} \varphi_1$ , on a une suite exacte de  ${}_\varepsilon\mathrm{L}$ -groupes à coefficients dans

$\mathbf{Z}/q$  (notés  ${}_{\varepsilon}\bar{\mathbf{L}}$ ):

$${}_{\varepsilon}\bar{\mathbf{L}}_{n+1}(A_1) \oplus {}_{\varepsilon}\bar{\mathbf{L}}_{n+1}(A_2) \rightarrow {}_{\varepsilon}\bar{\mathbf{L}}_{n+1}(A') \rightarrow {}_{\varepsilon}\bar{\mathbf{L}}_n(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}\bar{\mathbf{L}}_n(A_1) \oplus {}_{\varepsilon}\bar{\mathbf{L}}_n(A_2) \rightarrow {}_{\varepsilon}\bar{\mathbf{L}}_n(A').$$

*Démonstration.* Elle est analogue à celle du théorème 1 compte tenu de la remarque suivante. Si  $\Psi: R \rightarrow R'$  est un homomorphisme surjectif d'anneaux hermitiens, l'homomorphisme de groupes associé  ${}_{\varepsilon}\mathbf{O}(R) \rightarrow {}_{\varepsilon}\mathbf{O}(R')$  induit un homomorphisme surjectif pour les sous-groupes de commutateurs (qui sont engendrés par les matrices  $\varepsilon$ -élémentaires).

## REFERENCES

1. ARAKI, S.; TODA, H., Multiplicative structures in mod  $q$  cohomology theories. I, II, *Osaka J. Math.*, 2 (1965), 71—115; 3 (1966), 81—120.
2. ATIYAH, M. F., *K-theory*, Benjamin, New-York, 1964.
3. BASS, H., *Algebraic K-theory*, Benjamin, New-York, 1968.
4. BOREL, A., Stable real cohomology of arithmetic groups, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 7(1974), 235—272.
5. BROWDER, W., Algebraic K-theory with coefficients  $\mathbf{Z}/p$ , in *Springer Lecture Notes in Math.*, 657(1978), 40—84.
6. BROWN, K. S., *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Math., 87, Springer-Verlag, 1982.
7. BROWN, L.; SCHOCHET, C.,  $K_1$  of the compact operators is zero, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 59 (1976), 119—122.
8. CHARNEY, R., On the problem of homology stability for congruence subgroups, à paraître.
9. CONNES, A., Non-commutative differential geometry, *Publ. Math. IHES*, 62(1985), 257—360.
10. CONNES, A., A survey of foliations and operator algebras, in *Proceedings of Symp. in Pure Math.*, 38(1982), 521—628.
11. CORACH, G.; LAROTANDA, A.M., A stabilization theorem for Banach algebras, Prépublication Buenos-Aires, 1983.
12. FACK, T., K-théorie bivariante de Kasparov, in *Séminaire Bourbaki*, 605(1983).
13. GABBER, O., K-theory of Henselian pairs, à paraître.
14. GILLET, H.; THOMASON, R., The K-theory of strict Hensel local rings and a theorem of Suslin, à paraître.
15. GROTHENDIECK, A., *Produits tensoriels topologiques*, Mem. Amer. Math. Soc., 16(1955).
16. DE LA HARPE, P.; BROWN, L.; SCHOCHET, C., Perfection du groupe de Fredholm, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 290(1980), 151—154.
17. DE LA HARPE, P.; KAROUBI, M., Perturbations compactes des représentations d'un groupe dans un espace de Hilbert. I, *Bull. Soc. Math. France Suppl. Mém.*, 46(1976), 41—65.
18. DE LA HARPE, P.; MC DUFF, D., Acyclic groups of automorphisms, *Comment. Math. Helv.*, 58(1983), 48—71.
19. DE LA HARPE, P.; SKANDALIS, G., Sur la simplicité essentielle du groupe des inversibles et du groupe unitaire dans une  $C^*$ -algèbre simple, à paraître.
20. HAUSMANN, J. C.; HUSEMOLLER, D., Acyclic maps, *Enseignement Math.*, XXV (1979), 53—75.
21. HERMAN, R. H.; VASERSTEIN, L., The stable range of  $C^*$ -algebras, à paraître.
22. KAROUBI, M., Algèbres de Clifford et K-théorie, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 1(1968), 161—270.

23. KAROUBI, M., Foncteurs dérivés et K-théorie, in *Springer Lecture Note*, **136**(1970), 107–186.
24. KAROUBI, M., La périodicité de Bott en K-théorie générale, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **4**(1971), 63–95.
25. KAROUBI, M., Matrices de Jacobi, périodicité de Bott et  $C^*$ -algèbres, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **268**(1969), 710.
26. KAROUBI, M., Périodicité de la K-théorie hermitienne, in *Springer Lecture Note*, **313**(1973), 301–411.
27. KAROUBI, M., K-théorie algébrique de certaines algèbres d'opérateurs, in *Springer Lecture Note*, **725**(1979), 254–290.
28. KAROUBI, M., *K-theory. An introduction*, Grundlehren, **226**, Springer-Verlag, 1978.
29. KAROUBI, M., Théorie de Quillen et homologie du groupe orthogonal, *Ann. of Math.*, **112** (1980), 207–257.
30. KAROUBI, M., Le théorème fondamental de la K-théorie hermitienne, *Ann. of Math.*, **112** (1980), 259–282.
31. KAROUBI, M., Connexions, courbure et classes caractéristiques en K-théorie algébrique, in *Canadian Math. Soc. Proceedings*, vol. 2, Part I, 1982, pp. 19–27.
32. KAROUBI, M., Notes aux *C. R. Acad. Sci. Paris*, **297**(1983), pp. 381, 447, 513 et 557.
33. KAROUBI, M., Relations between algebraic K-theory and Hermitian K-theory, *J. Pure Appl. Algebra*, **34**(1984), 259–263.
34. KAROUBI, M.; VILLAMAYOR, O., K-théorie algébrique et K-théorie topologique, *Math. Scand.*, **28**(1971), 265–307.
35. KUIPER, N., The homotopy type of the unitary group of Hilbert space, *Topology*, **3**(1965), 19–30.
36. LODAY, J. L., K-théorie algébrique et représentations de groupes, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **9**(1976), 309–377.
37. LODAY, J. L.; QUILLEN, D., Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices, *Comment. Math. Helv.*, **59**(1984), 565–591.
38. MAC LANE, S., *Homology*, Grundlehren, **114**, Springer-Verlag, 1975.
39. MILNOR, J., *Introduction to algebraic K-theory*, Annals of Math. Studies, **72**, Princeton University Press, 1971.
40. MILNOR, J., On the homology of Lie groups made discrete, *Comment. Math. Helv.*, **58**(1983), 72–85.
41. MILNOR, J.; STASHEFF, D., *Characteristic classes*, Annals of Math. Studies, **76**, Princeton University Press, 1974.
42. NEISENDORFER, J., *Primary homotopy groups*, Mem. Amer. Math. Soc., **232**(1980).
43. PALAIS, R.S., On the homotopy type of certain group of operators., *Topology*, **3**(1965), 271–279.
44. PEDERSEN, G. K.,  *$C^*$ -algebras and their automorphism groups*, Academic Press, 1979.
45. QUILLEN, D., Cohomology of groups, in *Congrès International des mathématiciens*, Nice, 1970.
46. QUILLEN, D., On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field, *Ann. of Math.*, **96**(1972), 552–586.
47. RIEFFEL, M. A., Dimension and stable rank in the K-theory of  $C^*$ -algebras, *Proc. London Math. Soc.*, **46**(1983), 301–333.
48. SCHOCHET, C., Topological methods for  $C^*$ -algebras. II: Geometric resolutions and the Kunnetth formula, *Pacific J. Math.*, **98**(1982), 443–458.
49. SCHWARTZ, L., *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1957.
50. SIMON, B., *Trace ideals and their applications*, London Mathematical Society, Lecture Note Series, **35**, Cambridge University Press.
51. SWAN, R. G., Excision in algebraic K-theory, *J. Pure Appl. Algebra*, **21**(1971), 221–252.
52. SUSLIN, A., On the K-theory of algebraically closed fields, *Invent. Math.*, **73**(1983), 241–246.

53. SUSLIN, A., On the K-theory of local fields, à paraître.
54. TAKESAKI, M., *Theory of operator algebras. I*, Springer-Verlag; 1979.
55. VAN DER KALLEN, W., Homology stability for general linear groups, *Invent. Math.*, **60**(1980), 269–295.
56. VAN DER KALLEN, W., A note on excision for  $K_2$ , in *Springer Lecture Note*, **1046**(1984), pp. 173–177.
57. VAN DER KALLEN, W., A case of stability for the homology of linear groups, Appendix 2 of this paper.
58. VASERSTEIN, L., Stable range of rings and dimension of topological spaces (Russian), *Funkcional. Anal. Priložen.*, **5:2** (1971), 17–27.
59. WAGONER, J. B., Deforming classifying spaces in algebraic K-theory, *Topology*, **11**(1972), 340–370.
60. WALL, C. T. C., *Surgery on compact manifolds*, Academic Press, 1970.
61. WEIBEL, C., Mayer-Vietoris sequences and module structures on  $NK_*$ , in *Springer Lecture Note*, **854**(1981), pp. 466–493.
62. WOOD, R., Banach algebras and Bott periodicity, *Topology*, **4**(1966), 371–389.

MAX KAROUBI  
 UÉR de Mathématiques,  
 Université Paris VII,  
 2 Place Jussieu, Paris,  
 France.

Received September 9, 1984.

## APPENDIX 2

### A CASE OF STABILITY FOR THE HOMOLOGY OF LINEAR GROUPS

by WILBERD VAN DER KALLEN

In this appendix we describe how R. Charney's paper [2] implies the following result:

**THEOREM.** *Let  $A$  be an associative ring (not unitary) of finite stable rank such that the canonical map  $A \otimes_A A \rightarrow A$  is an isomorphism. Then, if  $i \leq 2$ , the stabilisation maps*

$$H_i(E_n(A); \mathbf{Z}) \rightarrow H_i(E(A); \mathbf{Z}) \quad \text{and} \quad H_i(\mathrm{GL}_n(A); \mathbf{Z}) \rightarrow H_i(\mathrm{GL}(A); \mathbf{Z})$$

*are isomorphisms for  $n$  sufficiently large.*

**REMARK.** This theorem is used in § 4 of [3] where it is noticed that any  $C^*$ -algebra  $A$  is isomorphic with the algebraic tensor product  $A \otimes_A A$ .

The idea of the proof is to use a qualitative version of Charney's theorem 5.2 in [2], restricting attention to homology in dimension  $\leq 2$ . Here "qualitative version" means that both in the theorem and in the proof all inequalities that involve  $n$  are replaced by the sentence "for  $n$  sufficiently large". In order to satisfy the conditions of her theorem qualitatively, we shall prove first the following lemma:

**LEMMA.** *For  $n \geq 5$ , the image of  $H_2(E_{n-1}(A); \mathbf{Z})$  in  $H_2(E_n(A); \mathbf{Z})$  is pointwise fixed under the action of the symmetric group  $\Sigma_n$ .*

As usual we consider two intermediate groups, one of which is the semi-direct product  $A^{n-1} \rtimes E_{n-1}(A)$  generated by the elementary matrices  $e_{ij}(a)$  with  $a \in A$ ;  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j < n$ ,  $i \neq j$  (the other is the "mirror image" along the diagonal). We have the following analogue of the lemma in the appendix of [3]:

**SUBLEMMA.** *For  $n \geq 5$ , the map  $H_2(E_{n-1}(A); \mathbf{Z}) \rightarrow H_2(A^{n-1} \rtimes E_{n-1}(A); \mathbf{Z})$  is an isomorphism.*

*Proof of the sublemma.* As  $AA = S$ , the groups  $E_{n-1}(A)$ ,  $A^{n-1} \rtimes E_{n-1}$  are perfect and we may use the theory of universal central extensions [4]. For  $x, y \in A^{n-1} \rtimes E_{n-1}(A)$ , let us write  $\{x, y\}$  for the commutator  $[x', y']$  in the universal central extension  $G$  of  $A^{n-1} \rtimes E_{n-1}(A)$  with  $x'$  a lift of  $x$  and  $y'$  a lift of  $y$ . Recall that Steinberg's trick tells that  $\{x, y\}$  does not depend on the choice of lifts. By a familiar play with commutator identities [5], one shows

$$(1) \quad \{e_{ij}(a), e_{jn}(bc)\} = \{e_{ik}(ab), e_{kn}(c)\}$$

for  $a, b, c \in A$  and  $i, j, k, n$  distinct. Now, if  $m$  is chosen distinct from  $i, j, k, n$ , one sees

$$\{e_{ij}(a), e_{jn}(bc)\} = \{e_{ik}(ab), e_{kn}(c)\} = \{e_{im}(a), e_{mn}(bc)\}$$

so that the left hand side of (1) is independent of  $j$  (and the right hand side is independent of  $k$ ). In particular, (1) tells that

$$\{e_{ij}(a), e_{jn}(bc)\} = \{e_{ij}(ab), e_{jn}(c)\}$$

(this looks similar to the identity  $a \otimes bc = ab \otimes c$  in  $A \otimes_A A$ ). Playing a little bit further with commutator identities as in [5], one sees that there is a homomorphism of groups

$$\varphi_i: A \otimes_A A \rightarrow G$$

sending  $a \otimes b$  to  $\{e_{ij}(a), e_{jn}(b)\}$ . Therefore, we may put  $x_{in}(a) = \varphi_i(\sum b_r \otimes c_r)$  for  $a \in A$ , where  $\sum b_r \otimes c_r$  is chosen such that it maps to  $a$  under the isomorphism  $A \otimes_A A \approx A$ . One has Steinberg relations such as  $\{e_{ij}(a), e_{jn}(b)\} = x_{in}(ab)$  so that the situation is as follows:  $G$  is the semi-direct product of the universal central extension

of  $E_{n-1}(A)$  with the normal subgroup of  $G$  generated by the  $x_{in}(a)$ ,  $a \in A$ ,  $1 \leq i < n$ . Moreover this normal subgroup is isomorphic to its image in  $E_n(A)$  (cf. [4], Lemma 9.14). The sublemma follows.

*Proof of the lemma.* It is the same proof as in [2], 5.5.

*Proof of the theorem.* We embed  $A$  as an ideal in a unitary ring  $R$  of finite stable rank [7]. As  $AA = A$ , the perfect group  $E_n(A)$  is normal in  $E_n(R)$  for  $n \geq 3$  and thus equals the group  $E_n(R, A)$  of [1] (compare with Theorem 4.4 of [3]). The usual stability theorems (see [1]) thus imply that the map

$$GL_n(A)/E_n(A) \rightarrow GL(A)/[GL(A), GL(A)]$$

is an isomorphism for  $n$  sufficiently large. In particular,  $E_n(A) = GL_n(A) \cap [GL(A), GL(A)]$  for  $n$  sufficiently large.

Now that we know how to deal with  $H_i(E_n(A); \mathbf{Z})$  in the theorem let us turn to the group  $GL_n(A)$ . Then the statement follows by a comparison in low dimensions of the Hochschild-Serre spectral sequences of the extensions

$$1 \rightarrow E_n(A) \rightarrow GL_n(A) \rightarrow GL_n(A)/E_n(A) \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow E(A) \rightarrow GL(A) \rightarrow GL(A)/E(A) \rightarrow 1.$$

REMARK. Together with the appendix of [3], these arguments yield a somewhat different proof of excision for  $K_2$  of  $A$  (compare with [6]).

#### REFERENCES

1. BASS, H., *Algebraic K-theory*, Benjamin, New-York, 1968.
2. CHARNEY, R., On the problem of homology stability for congruence subgroups, *Comm. Algebra* to appear.
3. KAROUBI, M., Homologie de groupes discrets associés à des algèbres d'opérateurs, see ahead.
4. MILNOR, J., *Introduction to algebraic K-theory*, Annals Math. Studies, 72, Princeton University Press, 1971.
5. STEIN, M. R.; VAN DER KALLEN, W., On the Schur multipliers of Steinberg and Chevalley groups over commutative rings, *Math. Z.*, 155(1977), 83–94.
6. VAN DER KALLEN, W., A note on excision for  $K_2$ , in *Springer Lecture Notes*, 1046(1984), 173–177.
7. VASERSTEIN, L., Stable rank of rings and dimension of topological spaces (Russian), *Funkcional Anal. i Priložen.*, 5: 2(1971), 17–27.

WILBERD VAN DER KALLEN  
 Rijksuniversiteit Utrecht,  
 Mathematisch Instituut,  
 Budapestlaan 6, Postbus 80.010,  
 3508 TA Utrecht,  
 The Netherlands.

Received September 9, 1984.