J. OPERATOR THEORY
18(1987), 67–97

REPRÉSENTATION DES PRODUITS CROISÉS D'ALGÈBRES DE GROUPOÏDES

JEAN RENAULT

INTRODUCTION

La désintégration des représentations de l'algèbre de convolution d'un groupoïde muni d'un système de Haar a été obtenue dans [18] sous une hypothèse technique, l'existence de certaines sections. A. Ramsay a montré dans [17] que cette hypothèse est vérifiée quand les mesures de Haar sont diffuses mais qu'elle fait parfois défaut. Nous proposons ici une démonstration qui n'invoque pas cette hypothèse. On utilisera de manière essentielle les idées de A. Connes sur l'intégration non commutative [3]. Après quelques préliminaires, on donnera les éléments de cette théorie nécessaires à la démonstration. Après la démonstration du théorème de désintégration, on en tirera quelques applications. En particulier, il résultera que toute représentation continue de l'algèbre de convolution $C_c(G, \lambda)$ est bornée pour la norme I. Cette propriété est *cruciale* pour établir l'équivalence de Morita de certaines C^*-algèbres de groupoïdes (voir à ce sujet [15]). Le cadre adopté ci est celui de l'algèbre d'un système dynamique (G, Σ, A), où G est un groupoïde localement compact non nécessairement séparé, Σ est une extension de G par un fibré de groupes abéliens et A est un fibré de C^*-algèbres sur lequel Σ opère par automorphismes (voir § 3 pour une définition plus précise). Il recouvre, dans le cas d'un sous-groupe normal abélien, les produits croisés "restreints" ou "tordus" de N. Dang Ngoc [7] et de P. Green [10].

1. PRÉLIMINAIRES

La terminologie des actions de groupes se généralise sans difficulté aux actions de groupoïdes. Contentons-nous de préciser quelques points. Sauf mention contraire, on considèrera des espaces à gauche. Ainsi, si G est un groupoïde et X un G-espace on a une application appelée projection r de X sur $G^{(0)}$ et une application produit de l'ensemble des couples composables (γ, x) avec $s(\gamma) = r(x)$, noté $G*X$, sur X. Si G et X sont topologiques, on supposera que ces applications sont continues et ouvertes. Alors l'application quotient de X sur X/G l'est aussi. On supposera toujours que l'espace des unités $G^{(0)}$ est séparé.

Le *produit* de deux G-espaces X et Y est le G-espace $X*Y$ des couples compatibles (x, y) avec $r(x) = r(y)$, muni de la topologie induite par $X \times Y$ et de l'action diagonale $\gamma(x, y) = (\gamma x, \gamma y)$.

On dit que le G-espace X est *libre* si l'application θ de $G*X$ dans $X \times X$ qui envoie (γ, x) sur $(\gamma x, x)$ est injective.

Si G et X sont localement compacts, on dira que le G-espace X est *propre* si l'application θ est propre, dans le sens que l'image inverse d'un ensemble quasi compact est quasi-compacte. La caractérisation suivante des G-espaces propres sera utilisée: pour tous ensembles quasi-compacts K et L de X, l'ensemble $P(K, L)$ des γ de G tels que K rencontre γL est relativement quasi-compact. Alors l'image d'un ouvert séparé de X par l'application quotient est un ouvert séparé de X/G et X/G est localement compact.

On dit que le G-espace X est *principal* s'il est libre et propre. Alors l'application θ est un homéomorphisme de $G*X$ sur son image dans $X \times X$. L'exemple type de G-espace principal est l'espace G lui-même muni de la multiplication à gauche.

Comme A. Connes l'a remarqué dans [4], il faut modifier la définition de ll'espace $C_c(X)$ des fonctions continues à support compact quand l'espace ocalement compact X n'est pas séparé pour avoir suffisamment de fonctions. Soient donc X un espace localement compact et E un fibré d'espaces de Banach sur X (on utilisera la terminologie de [9] plutôt que la notion équivalente de champ continu d'espaces de Banach). Si U est un ouvert séparé de X, on note $C_c(X, U;E)$ l'espace des sections de E dont la restriction à U est continue à support compact et la restriction au complémentaire de U est nulle. On note $C_c(X; E)$ l'espace vectoriel engendré par les $C_c(X, U; E)$. On munit $C_c(X, U; E)$ de la topologie limite inductive et $C_c(X; E)$ de la topologie la plus fine rendant continues les inclusions des $C_c(X, U; E)$ dans $C_c(X; E)$. Par abus de langage, on appellera aussi cette topologie limite inductive. Si E est le fibré trivial $\mathbf{C}$, l'espace de fonctions correspondant sera noté $C_c(X)$. Le produit de deux fonctions dans $C_c(X)$ n'est pas nécessairement dans $C_c(X)$. Par contre, si $f \in C_c(X)$ et $g \in C_c(Y)$, $f \otimes g \in$ $\in C_c(X \times Y)$. Plus généralement, si X et Y sont fibrés sur le même espace séparé (on prend ici une notion très faible de fibré, où la projection est continue, ouverte et surjective), et si $X*Y$ désigne leur produit fibré, on a encore $f \otimes g \in C_c(X*Y)$. Une mesure sur X est une forme linéaire continue sur $C_c(X)$. La théorie de l'intégration permet de la prolonger à d'autres espaces de fonctions, par exemple à l'espace $B(X)$ des fonctions boréliennes bornées à support quasicompact.

Soient X et Y des espaces localement compacts et π une application continue et ouverte de X sur Y. On appellera *π-système* une famille $\lambda = \{\lambda_y, y \in Y\}$ de mesures telles que

i) λ_y est une mesure sur $\pi^{-1}(y)$,

ii) (continuité) pour tout ouvert séparé U de X tel que $\pi(U)$ soit séparé et tout f dans $C_c(U)$, $\lambda(f)$ défini par $\lambda(f)(y) = \int f d\lambda_y$ est dans $C_c(\pi(U))$.

On vérifie alors que λ est linéaire continue de $C_c(X)$ dans $C_c(Y)$.

On dira que le π-système λ est *plein* si pour chaque y de Y, le support de λ_y est $\pi^{-1}(y)$ tout entier. Alors l'application λ de $C_c(X)$ dans $C_c(Y)$ est surjective. On aura besoin du lemme plus précis suivant.

LEMME 1.1. *Soient X et Y des espaces localement compacts, π une application surjective continue et ouverte de X dans Y et λ un π-système plein. Pour tout ouvert séparé U de X tel que $\pi(U)$ soit séparé et toute fonction g positive de $C_c(\pi(U))$, il existe une fonction positive f de $C_c(U)$ telle que $\lambda(f) = g$.*

Preuve. Soit L le support de g dans $\pi(U)$. Il existe un compact K de U tel que $\pi(K) = L$. Il existe f_1 fonction positive de $C_c(U)$ strictement positive sur K. Alors $g_1 = \lambda(f_1)$ est strictement positive sur L et la fonction $f = ((g/g_1)\circ\pi)f_1$ convient. ▨

On utilisera la construction suivante.

LEMME 1.2. *Soient X, Y et Z des espaces localement compacts, π et τ des applications continues ouvertes et surjectives de X et Y respectivement à valeurs dans Z. On note π_2 la projection du produit fibré $X*Y$ au-dessus de Z sur le deuxième facteur Y. On se donne pour chaque z de Z une mesure λ_z sur $\pi^{-1}(z)$ et on définit $\lambda_{2y} = \lambda_{\tau(y)}\times\varepsilon_y$ sur $\pi_2^{-1}(y)$ pour chaque y de Y. Alors λ est continu si et seulement si λ_2 est continu.*

Preuve. Supposons λ continu. Il suffit de vérifier la propriété (ii) pour un ouvert de $X*Y$ de la forme $U\times V$ où U est un ouvert séparé de X tel que $\pi(U)$ soit séparé et V est un ouvert séparé de V. D'après le théorème de Stone-Weierstrass et la continuité de λ on peut supposer $F\in C_c(U\times V)$ de la forme $F(x,y) = f(x)g(y)$ où $f\in C_c(U)$ et $g\in C_c(V)$. Alors $\lambda_2(F) = (\lambda(f)\circ\tau)g \in C_c(V)$.

Réciproquement, supposons λ_2 continue. Soit U un ouvert séparé de X tel que $\pi(U)$ soit séparé et qu'il existe un ouvert séparé V de Y tel que $\pi(U) = \tau(V)$. Si $f\in C_c(U)$, pour tout $g\in C_c(V)$, $(\lambda(f)\circ\tau)g = \lambda_2(F)\in C_c(V)$, où $F(x,y) = f(x)g(y)$. La restriction de $\lambda(f)\circ\tau$ à V, et par suite la restriction de $\lambda(f)$ à $\pi(U)$ sont donc continues. ▨

Supposons maintenant que X et Y soient des G-espaces et que π soit équivariante. On exige alors que le π-système λ soit équivariant, c'est-à-dire qu'il vérifie

iii) pour tout couple $(\gamma, y) \in G*Y$, $\gamma\lambda_y = \lambda_{\gamma y}$ où $\gamma\lambda_y(f) = \int f(\gamma x)\mathrm{d}\lambda_y(x)$.

En particulier on appelle *système de Haar* un r-système plein équivariant sur le G-espace à gauche G.

LEMME 1.3. *Soient X et Y des G-espaces principaux et π une application équivariante, continue et ouverte de X sur Y.*

i) *Tout π-système équivariant λ induit un système $\dot\lambda$ pour l'application quotient $\dot\pi$ de X/G sur Y/G selon la formule $\dot\lambda(f)(\dot y) = \int f(\dot x)\mathrm{d}\lambda_y(x)$.*

ii) *Réciproquement, étant donné un $\dot\pi$-système τ, il existe un unique π-système équivariant λ tel que $\tau = \dot\lambda$.*

Preuve. On observe que X s'identifie topologiquement au produit fibré de X/G et Y au-dessus de Y/G. Le choix de y dans sa classe $\dot y$ établit un homéomorphisme entre $\pi^{-1}(y)$ et $\dot\pi^{-1}(\dot y)$. L'image de λ_y par cet homéomorphisme est indépendante du choix de y. On la note $\dot\lambda_{\dot y}$. Alors λ_y s'identifie à $\dot\lambda_{\dot y} \times \varepsilon_y$. Il suffit d'appliquer le lemme 1.2. ▨

Notons enfin qu'un π-système λ, où π est une application continue et ouverte de X sur Y se prolonge aux sections de fibrés vectoriels. Plus précisément, étant donné un fibré E d'espaces de Banach sur Y, λ définit une application linéaire continue de $C_c(X; \pi^*E)$ dans $C_c(Y; E)$.

La notion d'extension de groupes se généralise aux groupoïdes. Etant donnés un groupoïde G et un G-fibré de groupes abéliens S, on appelle *extension* de G par S une suite exacte de groupoïdes

$$G^{(0)} \to S \to \Sigma \to G \to G^{(0)}$$

telle que, pour σ dans Σ et t dans S, on ait $\sigma t \sigma^{-1} = \dot\sigma \cdot t$, où on a identifié S et son image dans Σ et noté par $\dot\sigma$ l'image de σ dans G. Si G est localement compact, on suppose en outre que S l'est aussi et que l'action de G est continue. On exige alors que Σ soit un groupoïde localement compact, que l'injection de S dans Σ soit un homéomorphisme sur un fermé de Σ et que la surjection de Σ sur G soit continue et ouverte. On aura à considérer le *produit semi-direct* $S \times \Sigma$. C'est l'ensemble $S*\Sigma$ des couples composables (s, σ) de $S \times \Sigma$, muni de la topologie induite par $S \times \Sigma$ et de la multiplication

$$(s, \sigma)(t, \tau) = (s(\dot\sigma \cdot t), \sigma\tau)$$

définie quand $\sigma\tau$ l'est. C'est aussi un groupoïde localement compact.

Si X est un Σ-espace, X/S est un G-espace et son quotient $(X/S)/G$ s'identifie à X/Σ.

Si X est libre [resp. propre, principal], il en est de même de X/S. On appellera r-système pour le Σ-espace propre X un r-système équivariant pour le G-espace propre X/S.

Si X et Y sont des Σ-espaces principaux, $X*Y$ est un $S\times\Sigma$-espace principal pour l'action définie par

$$(s, \sigma)(x, y) = (s\sigma x, \sigma y).$$

L'espace quotient $X*Y/S\times\Sigma$ s'identifie à $(X/S*Y/S)/G$.

2. CLASSES TRANSVERSES DE MESURES

DÉFINITION 2.1. Soit G un groupoïde localement compact. Une *classe transverse de mesures* m associe à chaque r-système équivariant et continu α sur le G-espace principal localement compact X une classe de mesures $m(\alpha)$ sur l'espace quotient X/G de manière cohérente. Plus précisément m vérifie la propriété suivante: étant donnés des G-espaces principaux localement compacts X et Y, une application π équivariante continue et ouverte de X sur Y, un π-système λ et un r-système β sur Y, on a $m(\beta\circ\lambda) = m(\beta)\circ\dot{\lambda}$ où $\dot{\lambda}$ est le $\dot{\pi}$-système induit par λ.

La proposition suivante fait le lien entre cette définition et celle utilisée par G. Mackey et A. Ramsay (voir par exemple [16]).

PROPOSITION 2.2. (Caractérisation des classes transverses). (Cf. [3] et [14]).

i) *Soit m une classe transverse sur le groupoïde localement compact G. Pour tout r-système α sur le G-espace principal X, la classe de mesure $m(\alpha)\circ\dot{\alpha}_2$ sur $X*X/G$ est invariante par la symétrie qui échange (x, y) et (y, x).*

ii) *Réciproquement, étant donnés un G-espace principal X muni d'un r-système plein α et une classe de mesure μ sur X/G telle que $\mu\circ\dot{\alpha}_2$ soit symétrique, il existe une et une seule classe transverse m sur G telle que $m(\alpha) = \mu$.*

Preuve. i) Par définition, $m(\alpha)\circ\dot{\alpha}_2 = m(\alpha\circ\alpha_2) = m(\alpha\circ\alpha_1) = m(\alpha)\circ\dot{\alpha}_1$, où conformément aux notations du lemme 1.2, α_1 et α_2 sont respectivement les π_1 et π_2-systèmes, π_i étant l'une des projections de $X*X$ sur X, définis par

$$\alpha_1(f)(x) = \int f(x, y)\mathrm{d}\alpha(y) \quad \text{et} \quad \alpha_2(f)(y) = \int f(x, y)\mathrm{d}\alpha(x).$$

L'égalité $\alpha\circ\alpha_2 = \alpha\circ\alpha_1$ résulte du théorème de Fubini.

ii) La démonstration de la réciproque est essentiellement celle de [1, Proposition 3 de la page 41]. Soit β un r-système sur le G-espace principal Y. On forme le G-espace produit $X*Y$ et on note π_1, π_2 les projections sur le premier et le deuxième facteurs et $\dot{\pi}_1$, $\dot{\pi}_2$ les applications quotient. Selon les lemmes 1.2 et 1.3, le r-système α induit un $\dot{\pi}_2$-système $\dot{\alpha}_2$ et β induit un $\dot{\pi}_1$-système $\dot{\beta}_1$. Montrons que l'image de la classe de mesures $\mu \circ \dot{\beta}_1$ par l'application $\dot{\pi}_2$ est une classe de mesures. Fixons donc une mesure μ. D'après la propriété de recollement des mesures, on peut se placer sur un ouvert W image de la trace de $U \times V$ dans $X * Y/G$, où U est un ouvert séparé de X et V un ouvert séparé de Y relativement compact dans un ouvert séparé V_1. On note W_1 l'image de $U \times V_1$. Comme $\dot{\alpha}_2$ est plein, il existe d'après le lemme 1.1 une fonction f positive dans $C_c(W_1)$ telle que $\dot{\alpha}_2(f)$ soit égale à 1 sur $\bar{V}/G$. On fixe une telle fonction et on définit la mesure ν sur V/G par $\nu(h) = \mu \circ \dot{\beta}_1((h \circ \dot{\pi}_2)f)$ pour h dans $C_c(V/G)$. On va montrer que les restrictions à W de $\nu \circ \dot{\alpha}_2$ et de $\mu \circ \dot{\beta}_1$ sont équivalentes. Il en résultera bien que ν est une pseudo-image de $\mu \circ \dot{\beta}_1$ par $\dot{\pi}_2$. Soit donc g une fonction borélienne positive sur W. On a les équivalences suivantes:

$$g = 0 \quad \nu \circ \dot{\alpha}_2\text{-p.p.}$$

$$\iiint g(x, y)\mathrm{d}\alpha(x)f(x', y)\mathrm{d}\beta(y)\mathrm{d}\mu(x') = 0$$

$$\iiint g(x, y)f(x', y)\mathrm{d}\beta(y)\mathrm{d}\alpha(x)\mathrm{d}\mu(x') = 0, \qquad \text{d'après Fubini}$$

$$\iiint g(x', y)f(x, y)\mathrm{d}\beta(y)\mathrm{d}\alpha(x)\mathrm{d}\mu(x') = 0, \qquad \text{d'après la symétrie de } \mu \circ \alpha$$

$$\iint g(x', y)\mathrm{d}\beta(y)\mathrm{d}\mu(x') = 0, \qquad \text{d'après Fubini et le choix de } f$$

$$g = 0 \quad \mu \circ \dot{\beta}_1\text{-p.p.}$$

Appelons $m(\beta)$ la classe de mesures ainsi définie et montrons que l'application qui à β associe $m(\beta)$ est une classe transverse. Soit Z un autre G-espace principal, π une application équivariante de Z sur Y et λ un π-système. La commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} X*Z/G & \longrightarrow & X*Y/G \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z/G & \longrightarrow & Y/G \end{array}$$

montre immédiatement que $m(\beta \circ \lambda) = m(\beta) \circ \dot{\lambda}$.

En utilisant la relation $m(\beta)\circ\dot{\alpha}_2 = \mu\circ\dot{\beta}_1$ et la symétrie de $\mu\circ\dot{\alpha}_1$, on obtient $m(\alpha)\circ\dot{\alpha}_2 = \mu\circ\dot{\alpha}_1 = \mu\circ\dot{\alpha}_2$. Comme $\dot{\alpha}_2$ est surjectif, on a bien $m(\alpha) = \mu$. L'unicité résulte de la même manière de l'égalité $m(\beta)\circ\dot{\alpha}_2 = m(\alpha)\circ\dot{\beta}_1$. ▨

La donnée d'une classe transverse est équivalente à la donnée d'un certain idéal de la σ-algèbre des ensembles boréliens saturés de $G^{(0)}$, comme le montre la proposition suivante.

PROPOSITION 2.3. ([3, proposition 8 de la page 48]). *Soit m une classe transverse sur le groupoïde localement compact G.*

i) *Pour un ensemble borélien saturé A de $G^{(0)}$, la propriété d'être $m(\lambda)$-négligeable est indépendante du r-système λ sur G, pourvu que chacune de ses mesures soit non nulle. On dit alors que A est m-négligeable.*

ii) *Soit (X, α) un G-espace principal muni d'un r-système. Un ensemble borélien A de X/G est $m(\alpha)$-négligeable si et seulement si l'ensemble des u de $G^{(0)}$ tels que $\alpha_u(\pi^{-1}(A))$ soit non nul est m-négligeable, où π est l'application quotient.*

Preuve. i) Soient α et β des r-systèmes sur G composés de mesures non nulles et A un ensemble borélien saturé de $G^{(0)}$. On a les équivalences

$$m(\alpha)(A) = 0$$

$$m(\alpha)\circ\beta(r^{-1}(A)) = 0$$

car les mesures β^u sont non nulles,

$$m(\alpha)\circ\beta(s^{-1}(A)) = 0$$

car $s^{-1}(A) = r^{-1}(A)$,

$$m(\beta)\circ\tilde{\alpha}(s^{-1}(A)) = 0$$

par définition de m, où $\tilde{\alpha}$ est l'image de α par l'application $\gamma \to \gamma^{-1}$,

$$m(\beta)(A) = 0$$

car les mesures α^u sont non nulles.

ii) Soit (Y, β) un G-espace principal muni d'un r-système de mesures non nulles. On forme le produit $X*Y$. Soit A un borélien de X/G. On a les équivalences

$$m(\alpha)(A) = 0$$

$$m(\alpha)\circ\dot{\beta}_1(\dot{\pi}_1^{-1}(A)) = 0$$

car les mesures β_u sont non nulles

$$m(\beta) \circ \dot{\alpha}_2(\dot{\pi}^{-1}(A)) = 0$$

et l'ensemble des $\dot{y}$ de Y/G tels que $\alpha_{r(y)}(\pi^{-1}(A))$ soit non nul est $m(\beta)$-négligeable.

Notons enfin la propriété de cocycle des dérivées de Radon-Nikodym.

LEMME 2.4. *Soit m une classe transverse sur le groupoïde de G. Etant donnés des G-espaces principaux avec r-systèmes $(X, \alpha), (Y, \beta), (Z, \gamma)$ et des mesures $a \in m(\alpha)$, $b \in m(\beta)$ et $c \in m(\gamma)$, l'égalité*

$$\frac{a \circ \beta}{b \circ \alpha}(x, y) \frac{b \circ \gamma}{c \circ \beta}(y, z) \frac{c \circ \alpha}{a \circ \gamma}(x, z) = 1$$

a lieu pour $m(\alpha \circ \beta \circ \gamma)$-presque tout (x, y, z).

Preuve. Elle résulte de la règle de composition des dérivées de Radon-Nikodym:

$$\frac{a \circ \beta \circ \gamma}{b \circ \alpha \circ \gamma} \cdot \frac{b \circ \gamma \circ \alpha}{c \circ \beta \circ \alpha} \cdot \frac{c \circ \alpha \circ \beta}{a \circ \gamma \circ \beta} = 1.$$ ▨

3. INTÉGRATION D'UNE REPRÉSENTATION DE (G, Σ, A)

On se donne dans toute cette section un triplet (G, Σ, A), qu'on appellera *système dynamique*, et qui consiste de:

a) un groupoïde localement compact G admettant un système de Haar λ,

b) une extension Σ de G par un G-fibré de groupes abéliens S localement compact et admettant un système de Haar invariant par l'action de G, noté dt,

c) un Σ-fibré de C^*-algèbres A tel que S soit unitairement implémenté, c'est-à-dire qu'il existe un homomorphisme χ de S dans le fibré unitaire de $M(A)$, où $M(A)$ a pour fibre la C^*-algèbre $M(A_u)$ des multiplicateurs de A_u, tel que l'application de $S*A$ dans A envoyant (s, a) sur $\chi(s)a$ soit continue et que

$$sa = \chi(s)a\chi(s)^{-1} \quad \text{pour} \quad (s, a) \in S*A$$

$$\chi(\sigma s \sigma^{-1}) = \sigma\chi(s) \quad \text{pour} \quad (\sigma, s) \in \Sigma*S.$$

Dans le cas d'un groupe G, on retrouve les systèmes covariants de N. Dang Ngoc [7] et de P. Green [10].

CONSTRUCTION DE L'ALGÈBRE INVOLUTIVE $C_c(G, \Sigma, A)$. Soient $(X, \alpha), (Y, \beta)$ et (Z, γ) des Σ-espaces principaux avec r-systèmes. Définissons les opérations que nous justifierons ci-après.

Pour $f \in C_c(X*Y/S \rtimes \Sigma;\ X*Y*A/S \rtimes \Sigma)$ et $g \in C_c(Y*Z/S \rtimes \Sigma;\ Y*Z*A/S \rtimes \Sigma)$,

$$(\alpha, f, \beta)(\beta, g, \gamma) = (\alpha, f *_\beta g, \gamma)$$

où

$$f *_\beta g(x, z) = \int f(x, y) g(y, z) \mathrm{d}\beta(y)$$

$$(\alpha, f, \beta)^* = (\beta, f^*, \alpha)$$

où

$$f^*(y, x) = f(x, y)^*.$$

Le fibré d'espaces de Banach $X*Y*A \to X*Y$ est muni de l'action équivariante de $S \rtimes \Sigma$:

$$(s, \sigma)(x, y, a) = (s\sigma x, \sigma y, \chi(s)\sigma a).$$

Les sections du fibré quotient $X*Y*A/S \rtimes \Sigma \to X*Y/S \rtimes \Sigma$ peuvent être vues comme des applications f définies sur $X*Y$ à valeurs dans A telles que

i) $f(x, y) \in A_{r(x)}$,

ii) $f(\sigma x, \sigma y) = \sigma f(x, y)$ pour $\sigma \in \Sigma$,

iii) $f(sx, y) = \chi(s) f(x, y)$ pour $s \in S$.

On notera (α, β) l'ensemble des triplets (α, f, β) où $f \in C_c(X*Y/S \times \Sigma;\ X*Y*A/S \times \Sigma)$.

LEMME 3.1. *Pour f dans $C_c(X*Y/S \times \Sigma;\ X*Y*A/S \times \Sigma)$ et g dans $C_c(Y*Z/S \rtimes \Sigma;\ Y*Z*A/S \rtimes \Sigma)$, $f *_\beta g$ est bien défini et appartient à $C_c(X*Z/S \rtimes \Sigma;\ X*Z*A/S \times \Sigma)$.*

Preuve. Posons $F(x, y, z) = f(x, y) g(y, z)$ pour (x, y, z) dans $X*Y*Z$. Comme $F(x, sy, z) = F(x, y, z)$ pour tout s dans S, F appartient à $C_c((X*Y/S*Z)/S \rtimes \Sigma;\ (X*Y/S*Z*A)/S \rtimes \Sigma)$ où $(s, \sigma)(x, y, z, a) = (s\sigma x, \sigma y, \sigma z, \chi(s)\sigma a)$. D'après les lemmes 1.2 et 1.3 β induit une application linéaire de $C_c((X*Y/S*Z)/S \rtimes \Sigma)$ dans $C_c(X*Z/S \rtimes \Sigma)$ et cela reste vrai pour les sections d'un fibré induit. ▨

L'associativité du produit de convolution résulte du théorème de Fubini. On vérifie aisément que $f^* \in C_c(Y*X/S \times \Sigma;\ Y*X*A/S \times \Sigma)$ et que $(f *_\beta g)^* = g^* *_\beta f^*$.

On obtient ainsi une $*$-catégorie au sens de [11] que l'on note $C_c(G, \Sigma, A)$. Les opérations produit et involution sont continues pour la topologie limite inductive.

En identifiant $\Sigma*X*A/\Sigma$ à $X*A$, en envoyant (σ, x, a) sur $(\sigma^{-1}x, \sigma^{-1}a)$, on a

$$C_c(\Sigma*X/S \rtimes \Sigma;\ \Sigma*X*A/S \rtimes \Sigma) = C_c(X/S;\ X*A/S).$$

Ses éléments sont des fonctions "continues à support compact modulo S" définies sur X à valeurs dans A telles que

i) $f(x) \in A_{r(x)}$,

ii) $f(sx) = f(x)\chi(s^{-1})$ pour $s \in S$.

Les opérations deviennent

$$f *_\lambda g(x) = \int f(\sigma)[\sigma g(\sigma^{-1}x)] d\lambda(\dot\sigma) \quad \text{pour } f \in C_c(\Sigma/S; \Sigma * A/S) \text{ et } g \in C_c(X/S; X*A/S),$$

$$f *_\alpha g^*(\sigma) = \int f(x)[\sigma g(\sigma^{-1}x)]^* d\alpha(\dot x) \quad \text{pour } f, g \in C_c(X/S; X*A/S),$$

$$f^*(\sigma) = \sigma f(\sigma^{-1})^* \quad \text{pour } f \in C_c(\Sigma/S; \Sigma * A/S).$$

La $*$-algèbre des (λ, f, λ), où $f \in C_c(\Sigma/S; \Sigma * A/S)$ sera parfois dénotée par $C_c(G, \Sigma, A, \lambda)$.

La construction d'une unité approchée donnée par le lemme suivant sera un outil essentiel de la démonstration du théorème de désintégration. Son idée remonte à [10]. Sa mise en œuvre dans le cadre des algèbres de groupoïdes est due à D. Williams [15] (voir aussi [19]).

LEMME 3.2. *Soit (X, α) un Σ-espace principal avec r-système plein. Il existe dans $C_c(G, \Sigma, A, \lambda)$ une unité approchée dans la topologie limite inductive composée d'éléments de la forme $\sum_{i=1}^{n} f_i *_\alpha f_i^*$, où $f_i \in C_c(X/S; X*A/S)$. En fait, la famille que l'on va construire sera une unité approchée dans la topologie limite inductive pour l'action de $C_c(G, \Sigma, A, \lambda)$ sur tout module $C_c(Y/S; Y*A/S)$.*

Preuve. On suit la démonstration de [15]. Soit (e_k) une unité approchée bornée de la C^*-algèbre $C_0(G^{(0)}; A)$. La famille que l'on va construire sera indexée par un compact K de $G^{(0)}$, un voisinage ouvert U de $G^{(0)}$ dans Σ, un nombre positif ε et un indice k. Cet ensemble est dirigé pour la relation $(K, U, \varepsilon, k) \leqslant (K', U', \varepsilon', k')$ ssi $K \subset K'$, $U \supset U'$, $\varepsilon \geqslant \varepsilon'$ et $k \leqslant k'$. On se donne un tel indice. Il existe des ouverts séparés et relativement compacts $V_1, \ldots, V_n$ de X tels que $r(V_1), \ldots, r(V_n)$ recouvrent K et que si $(\sigma x, x)$ appartient à l'un des $V_i \times V_i$, alors σ appartient à U. Soit $b_1, \ldots, b_n$ une partition de l'unité subordonnée à la famille $r(V_1), \ldots, r(V_n)$. Grâce au lemme 1.1, on peut trouver pour chaque i une fonction positive $f_i \in C_c(V_i)$ telle que

$$\left| \int f_i(sx) f_i(t\sigma^{-1}x) ds\, dt\, d\lambda^u(\dot\sigma) d\alpha^u(\dot x) - b_i(u) \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } u \in r(V_i).$$

Ici $\mathrm{d}s$ désigne le système de Haar de S. En prenant au besoin une famille $V_1, \ldots, V_n$ plus fine, on peut supposer que

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \int f_i(sx) f_i(t\sigma^{-1}x) \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\lambda^u(\dot\sigma) \mathrm{d}\alpha^u(\dot x) - (b_i(u)) \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } u \in G^{(0)}.$$

Définissons alors F_i par

$$F_i(x) = \int f_i(sx) e_k \circ r(x) \chi(s) \mathrm{d}s.$$

C'est un élément de $C_c(X/S; X{*}A/S)$. Montrons que $e = e_{K,U,\varepsilon,k} = \sum_{i=1}^{n} F_i *_\alpha F_i^*$ est une unité approchée. D'après l'estimation

$$\int \|e(\sigma)\| \, \mathrm{d}\lambda^u(\dot\sigma) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int f_i(sx) f_i(t\sigma^{-1}x) \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\lambda^u(\dot\sigma) \mathrm{d}\alpha^u(\dot x) \leqslant 1 + \varepsilon$$

il suffit de tester la convergence sur un élément G de $C_c(Y/S; Y{*}A/S)$ de la forme

$$G(y) = \int g(sy) a \circ r(y) \chi(s) \mathrm{d}s$$

où $g \in C_c(W)$, W ouvert séparé de Y et $a \in C_c(G^{(0)}; A)$. Soit L un voisinage compact de $\operatorname{supp} g$ dans W. Pour U suffisamment petit, le support de $e *_\lambda G$, contenu dans $U \cap \operatorname{supp} g$, sera contenu dans L. Soit U_1 un tel voisinage. On peut supposer en outre que $U_1 \cap r^{-1}(r(L))$ est relativement quasicompact. On pose $K = r(L)$. On se donne $\varepsilon > 0$. On choisit k tel que pour tout $u \in G^{(0)}$

$$\|a(u) - e_k(u) e_k(u)^* a(u)\| \leqslant \varepsilon/2M, \quad \text{où } M = \sup|g(y)|, \; y \in Y.$$

Comme l'action de Σ sur A est continue, il existe un voisinage ouvert U_2 de $G^{(0)}$ dans Σ contenu dans U_1 tel que pour tout $\sigma \in U_2 \cap r^{-1}(K)$,

$$(*) \qquad \|a \circ r(\sigma) - e_k \circ r(\sigma) \sigma[e_k^* \circ s(\sigma) a \circ s(\sigma)]\| \leqslant \varepsilon/M.$$

Comme g est continue à support compact, il existe un voisinage ouvert U de $G^{(0)}$ dans Σ contenu dans U_2 tel que pour tout $(\sigma, y) \in U{*}Y$,

$$(**) \qquad |g(\sigma y) - g(y)| \leqslant \varepsilon/N, \quad \text{où } N = \sup\|a(u)\|, \; u \in G^{(0)}.$$

Soit $e = e_{K,U,\varepsilon,k}$. Alors

$$e *_\lambda G(y) = \sum_{i=1}^{n} F_i *_\alpha F_i^* *_\lambda G(y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int f_i(sx) f_i(t\sigma^{-1}x) g(u\sigma^{-1}y) e_k \circ r(\sigma)[\sigma(e_k \circ s(\sigma)\chi(t))]^* \sigma(a \circ s(\sigma)\chi(u)) \mathrm{d}s\mathrm{d}t\mathrm{d}u\mathrm{d}\lambda(\dot\sigma)\mathrm{d}\alpha(\dot x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int \mathrm{d}s\mathrm{d}t\mathrm{d}u\mathrm{d}\lambda(\dot\sigma)\mathrm{d}\alpha(\dot x) \times$$

$$\times f_i(sx) f_i(t\sigma^{-1}x) g(u\sigma^{-1}y) e_k \circ r(\sigma) s\sigma t^{-1}(e_k^* \circ s(\sigma) a s(\sigma)) \chi(s\sigma t^{-1}u\sigma^{-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int f_i(sx) f_i(t\sigma^{-1}x) g(t\sigma^{-1}s^{-1}uy) e_k \circ r(\sigma) s\sigma t^{-1}(e_k^* \circ s(\sigma) a \circ s(\sigma)) \chi(u) \mathrm{d}s\mathrm{d}t\mathrm{d}u\mathrm{d}\lambda(\dot\sigma)\mathrm{d}\alpha(\dot x)$$

(on a changé u en $t\sigma^{-1}s^{-1}u\sigma$) tandis que $G(y)$ vaut, à $\varepsilon\|G(y)\|$ près,

$$\sum_{i=1}^{n} \int f_i(sx) f_i(t\sigma^{-1}x) g(uy) a \circ r(\sigma) \chi(u) \mathrm{d}s\mathrm{d}t\mathrm{d}u\mathrm{d}\lambda(\dot\sigma)\mathrm{d}\alpha(\dot x).$$

Comme les deux expressions sont nulles à moins qu'il existe i tel que sx soit dans V_i et $t\sigma^{-1}x$ dans V_i, $s\sigma t^{-1}$ appartient à U. En outre $r(s\sigma t^{-1}) = r(\sigma) = r(y)$ appartient à K si y est dans L. On peut donc utiliser les estimées précédentes (*) et (**) pour obtenir

$$\|e *_\lambda G(y) - G(y)\| \leqslant 2\varepsilon(1 + \varepsilon) + \varepsilon\|G(y)\|.$$

Ceci montre la convergence uniforme sur L. ∎

Le résultat suivant montre que l'algèbre "tordue" $C_c(G, \Sigma, A, \lambda)$ est un quotient de l'algèbre $C_c(\Sigma, A, \mathrm{d}\sigma)$ où $\mathrm{d}\sigma$ est le système de Haar de Σ obtenu en composant le système de Haar λ de G avec le système de Haar $\mathrm{d}t$ de S, ce qui permet souvent de se réduire à un produit croisé ordinaire. On définit l'application χ par

$$\chi(f)(\sigma) = \int f(t\sigma)\chi(t)\mathrm{d}t \quad \text{pour } f \in C_c(\Sigma; \Sigma * A).$$

L'algèbre involutive $C_c(S, \mathrm{d}t)$ agit par multiplicateurs sur $C_c(\Sigma; A, \mathrm{d}\sigma)$ selon

$$\varphi * f(\sigma) = \int \varphi(t)[tf(t^{-1}\sigma)]\mathrm{d}t \quad \text{pour } \varphi \in C_c(S) \text{ et } f \in C_c(\Sigma; \Sigma * A).$$

LEMME 3.3. *Avec les notations ci-dessus:*

i) *L'application* χ *est un* $*$*-homomorphisme continu pour la topologie limite inductive et surjectif de* $C_c(\Sigma, A, d\sigma)$ *sur* $C_c(G, \Sigma, A, \lambda)$.

ii) *Pour* φ *dans* $C_c(S)$ *et* f *dans* $C_c(\Sigma; \Sigma * A)$, *on a*

$$\chi(\varphi * f) = [\chi(\varphi) \circ r]\chi(f) \quad \text{où} \quad \chi(\varphi)(u) = \int_{S_u} \varphi(t)\chi(t)\, dt.$$

Preuve. Les justifications ont été données dans les préliminaires. Les différentes égalités s'obtiennent par changement de variable et permutation de l'ordre d'intégration. On utilise l'invariance par G du système de Haar de S. ▨

DÉFINITION 3.4. On appelle *représentation du système dynamique* (G, Σ, A) le couple (m, H) d'une classe transverse m sur G et d'un fibré hilbertien mesurable H défini sur un ensemble borélien U de $G^{(0)}$ de saturé m-conégligeable muni d'une action de Σ_U et d'une action de A_U telles que

i) $\sigma(a\xi) = (\sigma a)(\sigma\xi)$ pour $(\sigma, a, \xi) \in \Sigma_U * A_U * H$,

ii) $s\xi = \chi(s)\xi$ pour $(s, \xi) \in S_U * H$.

On dira par abus de langage que H est un (Σ, A)-fibré hilbertien. On dit que la représentation est *non-dégénérée* si pour tout u dans U, la représentation de A_u dans H_u est non-dégénérée. On dit que deux représentations (m, H) et (m', H') sont *équivalentes* si $m = m'$ et s'il existe un borélien U de $G^{(0)}$ de saturé m-conégligeable et un isomorphisme V de H_U sur H'_U entrelace les actions.

Soit (m, H) une représentation de (G, Σ, A). Pour tout Σ-espace principal avec r-système (X, α), appelons $H(\alpha)$ l'espace de Hilbert $L^2(X/\Sigma, X*H/\Sigma, m(\alpha))$ des demi-densités de carré intégrable. Un élément de cet espace, noté $\xi\sqrt{\mu}$, consiste d'une mesure μ dans $m(\alpha)$ et d'une section de carré intégrable pour μ du fibré hilbertien $X*H/\Sigma$ sur X/Σ. On remarque que ce fibré n'est défini que sur un ensemble $m(\alpha)$-conégligeable. Etant donnés des Σ-espaces principaux avec r-systèmes (X, α) et (Y, β), définissons $L(\alpha, f, \beta)$ pour f dans (α, β) par

$$(*) \qquad \langle \xi\sqrt{\mu}, L(\alpha, f, \beta)\eta\sqrt{\nu} \rangle = \int \langle \xi(x), f(x, y)\eta(y) \rangle \sqrt{(\mu \circ \beta_1)(\nu \circ \alpha_2)}\,(x, y),$$

où on a écrit $\sqrt{\mu\nu}$ au lieu de $(d\mu/d\nu)^{1/2}\nu$. On vérifie comme plus haut que la fonction à intégrer est définie sur un ensemble $m(\beta \circ \alpha)$-conégligeable de $X*Y/S\times\Sigma$ et que son support est compact.

La norme I sur (α, β) utilisée dans la proposition suivante est définie par

$$\|f\|_I = \max\left(\sup_x \int \|f(x, y)\| \mathrm{d}\beta(y), \sup_y \int \|f(x, y)\| \,\mathrm{d}\alpha(x)\right).$$

PROPOSITION 3.5. (cf. [18], page 52]). i) *Soit (m, H) une représentation de (G, Σ, A). La formule $(*)$ définit une représentation de la $*$-catégorie $C_c(G, \Sigma, A)$ continue pour la topologie limite inductive et bornée pour la norme I, appelée représentation intégrée.*

ii) *Si H est séparable et si la représentation de A dans H est non-dégénérée, alors la représentation intégrée de $C_c(G, \Sigma, A, \lambda)$ est non-dégénérée.*

iii) *Deux représentations équivalentes de (G, Σ, A) donnent des représentations équivalentes de $C_c(G, \Sigma, A)$.*

Preuve. i) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne la majoration

$$|\langle \xi \sqrt{\mu}, L(\alpha, f, \beta)\eta \sqrt{\nu}\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \int \|\xi(x)\| \, \|f(x, y)\| \, \|\eta(y)\| \sqrt{(\mu \circ \beta)(\nu \circ \alpha)}(x, y) \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sup_x \int \|f(x, y)\| \,\mathrm{d}\beta(y)\right]^{1/2} \|\xi \sqrt{\mu}\| \left[\sup_y \int \|f(x, y)\| \,\mathrm{d}\alpha(x)\right]^{1/2} \|\eta \sqrt{\nu}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_I \|\xi \sqrt{\mu}\| \, \|\eta \sqrt{\nu}\|.$$

La relation $L(\alpha, f, \beta)^* = L(\beta, f^*, \alpha)$ est immédiate. Pour montrer $L(\alpha, f *_\beta g, \gamma) = L(\alpha, f, \beta)L(\beta, g, \gamma)$, on peut utiliser l'égalité $L(\beta, g, \gamma)\, \zeta\sqrt{\tau} = \eta\sqrt{\nu}$ avec

$$\eta(y) = \int g(y, z)\, \zeta(z) \left(\frac{\tau \circ \beta}{\nu \circ \gamma}\right)^{1/2} (y, z) \,\mathrm{d}\gamma(z)$$

pour $m(\beta)$ presque tout y.

ii) On fixe $\mu \in m(\lambda)$. On pose $\nu_0 = \sqrt{(\mu \circ \lambda)(\mu \circ \tilde{\lambda})}$. Pour $\xi, \eta \in L^2(G^{(0)}; H, \mu)$ et $f \in C_c(\Sigma/S; \Sigma * A/S)$,

$$\langle \xi, L(f)\eta\rangle = \int \langle \xi \circ r(\sigma), f(\sigma)\sigma\eta \circ s(\sigma)\rangle \,\mathrm{d}\nu_0(\dot{\sigma}).$$

Supposons ξ orthogonal à tous les $L(f)\eta$. Soit $a \in C_0(G^{(0)}; A)$. Pour tout $f \in C_c(\Sigma)$, posons

$$F(\sigma) = \int f(s\sigma) a \circ r(\sigma) \chi(s) \mathrm{d}s.$$

On a alors

$$\langle \xi, L(F)\eta \rangle = \int \langle \xi \circ r(\sigma), a \circ r(\sigma)\sigma\eta \circ s(\sigma) \rangle f(\sigma)\, \mathrm{d}\nu(\sigma) = 0,$$

où $\mathrm{d}\nu$ est la mesure $\mathrm{d}\nu_0\, \mathrm{d}s$ sur Σ. Cela entraîne que

$$\langle \xi \circ r(\sigma), a \circ r(\sigma)\sigma\eta \circ s(\sigma) \rangle = 0 \quad \text{pour } \nu\text{-presque tout } \sigma.$$

Soit (η_n) une suite fondamentale pour H. Il existe un ensemble ν-conégligeable de Σ sur lequel on ait

$$\langle \xi \circ r(\sigma), a \circ r(\sigma)\sigma\eta_n \circ s(\sigma) \rangle = 0 \quad \text{pour tout } n.$$

Il existe donc un ensemble μ-conégligeable de $G^{(0)}$ sur lequel on ait $\langle \xi(u), a(u)\sigma\eta_n \circ s(\sigma) \rangle = 0$ pour tout n et au moins un σ tel que $r(\sigma) = u$. Cela entraîne que $a^*(u)\xi(u) = 0$ et donc que $a^*\xi = 0$. Comme la représentation de $C_0(G^{(0)}; A)$ dans $L^2(G^{(0)}; H; \mu)$ est non dégénérée, ξ est nul.

iii) Soit U un borélien de $G^{(0)}$ de saturé m-négligeable et V un isomorphisme de H_U sur H'_U. Pour tout (X, α), on définit l'isométrie $V(\alpha)$ de $H(\alpha)$ sur $H'(\alpha)$ par $V(\alpha)\xi\sqrt{\mu} = \eta\sqrt{\mu}$ où

$$\eta(x) = V \circ r(x)\xi(x) \quad \text{pour tout } x \text{ tel que } r(x) \in U.$$

On vérifie facilement que

$$L'(\alpha, f, \beta)V(\beta) = V(\alpha)L(\alpha, f, \beta).$$ ▨

4. DÉSINTÉGRATION D'UNE REPRÉSENTATION DE $C_c(G, \Sigma, A, \lambda)$

THÉORÈME 4.1. *Soit (G, Σ, A) un système dynamique au sens de la section précédente et λ un système de Haar pour G. On suppose que Σ a une base dénombrable d'ouverts et que A est séparable. Alors:*

i) *Toute représentation non-dégénérée et continue pour la topologie limite inductive de l'algèbre involutive $C_c(G, \Sigma, A, \lambda)$ dans un espace hilbertien $\mathscr{H}$ séparable est équivalente à une représentation obtenue en intégrant une représentation non-dégénérée de (G, Σ, A).*

ii) *L'intégration établit une équivalence entre la catégorie des représentations non-dégénérées de (G, Σ, A) dans un fibré hilbertien séparable et la catégorie des représentations continues et non-dégénérées de $C_c(G, \Sigma, A, \lambda)$ dans un espace hilbertien séparable.*

On démontre d'abord la première assertion dans le cas où Σ et A sont absents. Plus exactement, Σ est l'extension triviale de G par le cercle S^1 et A est le fibré constant de fibre $\mathbf{C}$. En fait, on aura besoin du résultat un peu plus fort suivant.

PROPOSITION 4.2. *Soit $\mathscr{H}_0$ un sous-espace vectoriel dense d'un espace hilbertien séparable $\mathscr{H}$. On suppose que L est une représentation de l'algèbre $C_c(G, \lambda)$ par des opérateurs de $\mathscr{H}_0$ telle que*

a) *L est non-dégénérée: les combinaisons linéaires des $L(f)\xi$ sont denses dans $\mathscr{H}$,*

b) *L est continue, dans le sens que pour tout ξ, η dans $\mathscr{H}_0$, la forme linéaire $L_{\xi,\eta}(f) = \langle \xi, L(f)\eta \rangle$ est continue pour la topologie limite inductive de $C_c(G)$ et*

c) *L préserve l'involution, c'est-à-dire $\langle \xi, L(f^*)\eta \rangle = \langle L(f)\xi, \eta \rangle$ pour tout ξ, η dans $\mathscr{H}_0$ et tout f dans $C_c(G)$.*

Alors les opérateurs $L(f)$ sont bornés. La représentation de l'algèbre involutive $C_c(G, \lambda)$ dans $\mathscr{H}$ ainsi obtenue est équivalente à une représentation obtenue par intégration à partir d'une représentation non-dégénérée de G.

Preuve. Pour tout ξ, η dans $\mathscr{H}_0$, la forme linéaire $L_{\xi,\eta}$ est une mesure (non positive) sur $C_c(G)$. On la prolonge à l'espace $B(G)$ des fonctions boréliennes bornées à support relativement quasi-compact.

La démonstration consiste en deux étapes: la construction de la classe transverse m et la construction du G-fibré hilbertien H.

a. CONSTRUCTION DE LA CLASSE TRANSVERSE. Nous verrons qu'il existe une unique représentation M de $B(G^{(0)})$ telle que

$$M(h)L(f) = L(hf) \quad \text{pour } h \text{ dans } B(G^{(0)}) \text{ et } f \text{ dans } B(G).$$

Ici $hf(\gamma) = h \circ r(\gamma)f(\gamma)$. Elle définit une classe de mesures sur $G^{(0)}$. Comme la propriété de symétrie de la proposition 2.2 n'est pas immédiate, on va montrer directement qu'elle provient d'une classe transverse. On va associer à chaque (X, α) où X est un G-espace principal (à base dénombrable d'ouverts) et α un r-système sur X une classe de mesures $m(\alpha)$ sur le quotient X/G de la manière suivante. On définit sur $B(X)\otimes\mathscr{H}_0$ la forme sesquilinéaire telle que

$$\langle f\otimes\xi, g\otimes\eta \rangle = \langle \xi, L(f^* *_\alpha g)\eta \rangle$$

où ξ, η sont dans $\mathscr{H}_0, f, g$ dans $B(X)$ et $f^* *_\alpha g(\gamma) = \int \bar{f}(\gamma x)g(x)d\alpha(x)$ (on vérifie comme plus haut que $f *_\alpha g$ est dans $B(G)$). Montrons qu'elle est positive. Il suffit de le vérifier sur des éléments de la forme $\sum_i f_i\otimes\xi_i$ avec f_i dans $C_c(X)$. En utilisant une unité approchée pour l'action de (α, α) sur (α, λ) de la forme donnée par le lemme 3.2 (où les rôles de α et de λ ont été échangés), on peut écrire $\langle \sum_i f_i\otimes\xi_i, \sum_j f_j\otimes\xi_j \rangle$

omme une limite de sommes de termes positifs:

$$\sum_{i,j} \langle \xi_i, L(f_i^* *_\alpha g_k *_\lambda g_k^* *_\alpha f_j)\xi_j\rangle = \|\sum_i L(g_k^* *_\alpha f_i)\xi_i\|^2.$$

On note $H(\alpha)$ le séparé complété de $B(X)\otimes\mathscr{H}_0$ pour ce produit scalaire. On définit pour $h \in B(X/G)$ l'opérateur $M(h)$ sur $B(X)\otimes\mathscr{H}_0$ par

$$M(h)(f\otimes\xi) = hf\otimes\xi \quad \text{où } hf(x) = h(\dot{x})f(x).$$

Il est borné pour la norme de $H(\alpha)$ car

$$\|M(h) \sum_i f_i\otimes\xi_i\|^2 = \|h\|_\infty^2 \|\sum_i f_i\otimes\xi_i\|^2 - \|\sum_i kf_i\otimes\xi_i\|^2$$

où $k(\dot{x}) = (\|h\|_\infty^2 - |h(\dot{x})|^2)^{1/2}$. Il se prolonge donc en un opérateur borné $M(h)$ sur $H(\alpha)$. On obtient ainsi une représentation de la C^*-algèbre abélienne $B(X/G)$. Quand on prend $(X, \alpha) = (G, \lambda)$, on peut identifier $H(\lambda)$ à $\mathscr{H}$ en envoyant $f\otimes\xi$ sur $L(\tilde{f})\xi$, où $\tilde{f}(\gamma) = f(\gamma^{-1})$, car cette application est une isométrie et son image est dense d'après l'hypothèse a). On a alors $M(h)L(f) = L(hf)$. Comme $H(\alpha)$ est séparable, la représentation M de $B(X/G)$ dans $H(\alpha)$ définit une classe de mesure $m(\alpha)$ sur X/G. Pour h dans $B(X/G)$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

$$h = 0 \ m(\alpha)\text{-p.p.}; \quad M(h) = 0$$

et

$$\langle \xi, L(f^* *_\alpha hf)\xi\rangle = 0 \quad \text{pour tout } f \text{ dans } C_c(X) \text{ et tout } \xi \text{ dans } \mathscr{H}_0.$$

Montrons que l'application qui à α associe $m(\alpha)$ est une classe transverse. Soient X et Y deux G-espaces principaux, π une application équivariante de X sur Y, τ un π-système et β un r-système pour Y. Il s'agit de comparer pour h dans $B(X/G)$ les propriétés $h = 0$ $m(\beta \circ \tau)$-p.p. et $h = 0$ $m(\beta) \circ \dot{\tau}$-p.p.

La propriété $h = 0$ $m(\beta \circ \tau)$-p.p. s'écrit:

(1) $\quad \langle \xi, L(f^* *_{\beta\circ\tau} hf)\xi\rangle = 0 \quad$ pour tout f dans $C_c(X)$ et tout ξ dans $\mathscr{H}_0$.

En prenant f de la forme

$$f(x) = k(\dot{x})g \circ \pi(x)$$

où k est dans $C_c(X/G)$ et g dans $C_c(Y)$, on obtient

$$f^* *_{\beta\circ\tau} hf = g^* *_\beta \dot{\tau}(\bar{k}hk)g,$$

d'où

$$\dot{\tau}(\overline{k}hk) = 0 \ m(\beta)\text{-p.p.}, \quad \text{ou encore} \quad h = 0 \ m(\beta) \circ \dot{\tau}\text{-p.p.}.$$

Réciproquement, si $h = 0$ $m(\beta) \circ \dot{\tau}$-p.p., on a (1) pour tout ξ dans $\mathscr{H}_0$ et tout f de la forme $f(x) = k(\dot{x})g \circ \pi(x)$ où k est dans $C_c(X/G)$ et g dans $C_c(Y)$. Or d'après le théorème de Stone-Weierstrass (qu'on applique sur des ouverts séparés $U \times V$) $C_c(X/G) \otimes C_c(Y)$ est dense dans $C_c(X)$. Par continuité, l'égalité (1) reste vraie pour tout f dans $C_c(X)$ et on a bien $h = 0$ $m(\beta \circ \tau)$-p.p.

On n'utilisera par la suite que la propriété de symétrie de la classe de mesure $m(\lambda) \circ \lambda$, c'est-à-dire $m(\lambda) \circ \lambda = m(\lambda) \circ \tilde{\lambda}$. Pour le reste de la démonstration, on choisit un représentant μ de la classe $m(\lambda)$ et une dérivée de Radon-Nikodym $\delta = \dfrac{\mu \circ \tilde{\lambda}}{\mu \circ \lambda}$. On notera ν_0 la mesure symétrique $\sqrt{(\mu \circ \lambda)(\mu \circ \tilde{\lambda})}$.

b. CONSTRUCTION DU G-FIBRÉ HILBERTIEN.

LEMME 4.3. *Pour tout ξ, η dans $\mathscr{H}_0$, la mesure $L_{\xi,\eta}$ est absolument continue par rapport à $m(\lambda) \circ \lambda$.*

Preuve. Soit f une fonction positive dans $B(G)$ nulle $m(\lambda) \circ \lambda$-p.p., alors il existe une partie N de $G^{(0)}$ négligeable pour $m(\lambda)$ telle que pour tout $u \notin N$, f est nulle λ^u-p.p.. Alors pour tout g, h dans $C_c(G)$, $fg * h = (k \circ r)(fg * h)$ où k est la fonction caractéristique de N. Ainsi $L(fg)L(h) = M(k)L(fg)L(h)$ est nul. Il résulte de (a) et de (c) que $L(fg)$ est nul. ▨

D'après ce lemme, il existe pour tout ξ, η de $\mathscr{H}_0$ une fonction $\rho_{\xi,\eta}$ localement ν_0-intégrable telle que

$$\langle \xi, L(f)\eta \rangle = \int f\rho_{\xi,\eta}\, d\nu_0 \quad \text{pour tout } f \text{ dans } C_c(G).$$

Définissons alors pour u dans $G^{(0)}$ et f, g dans $C_c(G^u)$

$$\langle f \otimes \xi, g \otimes \eta \rangle_u = \int \overline{f}(\gamma)g(\gamma')\, \rho_{\xi,\eta}(\gamma^{-1}\gamma')\delta^{1/2}(\gamma)\delta^{1/2}(\gamma')\, d\lambda^u(\gamma)\, d\lambda^u(\gamma').$$

LEMME 4.4. *Avec ces notations:*

i) *Pour tout h dans $C_c(G^{(0)})$ et tout f, g dans $C_c(G)$, on a*

$$\int h(u) \langle f \otimes \xi, g \otimes \eta \rangle_u\, d\mu(u) = \langle L(f)\xi, M(h)L(g)\eta \rangle.$$

ii) *Pour $m(\lambda)$ ∘ λ-presque tout γ et tout f, g dans $C_c(G)$, on a*

$$\langle \gamma \cdot f \otimes \xi, \gamma \cdot g \otimes \eta \rangle_{r(\gamma)} = \delta(\gamma) \langle f \otimes \xi, g \otimes \eta \rangle_{s(\gamma)}$$

où $\gamma \cdot f(\gamma') = f(\gamma^{-1}\gamma')$ pour γ' dans $G^{r(\gamma)}$.

Preuve. i) On calcule le terme de gauche:

$$\int \bar{f}(\gamma) hg(\gamma') \rho_{\xi,\eta}(\gamma^{-1}\gamma') \, \delta^{1/2}(\gamma)\delta^{1/2}(\gamma') \, d\lambda^u(\gamma') \, d\lambda^u(\gamma') \, d\mu(u).$$

On remplace $\mu \circ \lambda$ par $\delta^{-1}\mu \circ \tilde{\lambda}$:

$$= \int \overline{f}(\gamma) \, hg(\gamma'^{-1}) \, \rho(\gamma^{-1}\gamma'^{-1})\delta^{1/2}(\gamma)\delta^{1/2}(\gamma') \, d\lambda^{s(\gamma')}(\gamma) \, d\lambda^u(\gamma') \, d\mu(u).$$

On utilise la propriété de cocycle donnée par le lemme 2.4 $\delta(\gamma)\delta(\gamma') = \delta(\gamma\gamma')$ et on remplace γ par $\gamma'^{-1}\gamma$:

$$= \int \bar{f}(\gamma'^{-1}\gamma) \, hg(\gamma'^{-1}) \, \rho(\gamma^{-1})\delta^{1/2}(\gamma) \, d\lambda^u(\gamma) \, d\lambda^u(\gamma') \, d\mu(u).$$

On utilise Fubini et la définition du produit de convolution:

$$= \int f^* * hg(\gamma^{-1})\rho(\gamma^{-1})\delta^{1/2}(\gamma) \, d(\mu \circ \lambda)(\gamma) =$$

$$= \int f^* * hg(\gamma)\rho(\gamma) \, d\nu_0(\gamma) = \langle \xi, L(f^* * hg)\eta \rangle = \langle L(f)\xi, M(h)L(g)\eta \rangle.$$

ii) Pour tout φ dans $C_c(G)$, on a

$$\int \varphi(\gamma)\langle \gamma \cdot f \otimes \xi, \gamma \cdot g \otimes \eta \rangle_{r(\gamma)} \, d\lambda^u(\gamma) \, d\mu(u) =$$

$$= \int \varphi(\gamma)\bar{f}(\gamma^{-1}\gamma_1) \, g(\gamma^{-1}\gamma_2) \, \rho(\gamma_1^{-1}\gamma_2)\delta^{1/2}(\gamma_1)\delta^{1/2}(\gamma_2) \, d\lambda^u(\gamma_1) \, d\lambda^u(\gamma_2) \, d\lambda^u(\gamma) \, d\mu(u).$$

On change (γ_1, γ_2) en $(\gamma\gamma_1, \gamma\gamma_2)$ et on utilise la propriété de cocycle de δ:

$$= \int \varphi(\gamma)\delta(\gamma)\langle f \otimes \xi, g \otimes \eta \rangle_{s(\gamma)} \, d\lambda^u(\gamma) \, d\mu(u).$$ ▨

On choisit une base orthonormale (ξ_i) dans $\mathscr{H}_0$ et une suite totale (φ_j) de $C_c(G)$. D'après (i) $\langle f\otimes\xi, f\otimes\xi\rangle_u$ est positif μ-presque partout. On peut trouver un ensemble μ-conégligeable U de $G^{(0)}$ tel que $\langle\ ,\ \rangle_u$ définisse une forme sesquilinéaire positive sur le sous-espace rationnel de $C_c(G)\otimes\mathscr{H}$ engendré par les $\varphi_j\otimes\xi_i$ pour tout u appartenant à U. D'après la continuité de l'intégrale, la positivité de $\langle\ ,\ \rangle_u$ subsiste sur le sous-espace complexe engendré par les $f_i\otimes\xi_i$, où f_i est dans $C_c(G)$. On appelle H_u son séparé complété et on note $f_i\otimes_u\xi_i$ l'image de $f_i\otimes\xi_i$ dans H_u. On fait de H, réunion disjointe des H_u quand u parcourt U, un fibré hilbertien mesurable en prenant les $(\varphi_j\otimes_u\xi_i)$ comme suite fondamentale de sections mesurables.

D'après (ii), il existe un ensemble $\mu\circ\lambda$-conégligeable V de G tel que pour tout γ de $V\cap G|U$,

$$L(\gamma)(f\otimes\xi) = \delta^{-1/2}(\gamma)\gamma\cdot f\otimes\xi$$

définisse une isométrie du sous-espace rationnel engendré par les $\varphi_j\otimes\xi_i$ à valeurs dans $H_{r(\gamma)}$. Alors $L(\gamma)$ se prolonge en une isométrie de $H_{s(\gamma)}$ sur $H_{r(\gamma)}$. Comme l'ensemble des γ de $G|U$ tels que $L(\gamma)$ se prolonge en une isométrie de $H_{s(\gamma)}$ sur $H_{r(\gamma)}$ est stable par multiplication et qu'il contient une partie $\mu\circ\lambda$-conégligeable, il contient aussi, d'après [16, lemma 5.2], une réduction $G|U'$ où U' est une partie de U μ-conégligeable. En remplaçant au besoin U par U', on définit bien ainsi une structure de $G|U$-fibré hilbertien sur H. La mesurabilité de l'action se vérifie immédiatement: pour tout ξ,η dans $\mathscr{H}_0$ et tout f, g dans $C_c(G)$, l'application qui à γ associe

$$\langle f\otimes_{r(\gamma)}\xi, L(\gamma)g\otimes_{s(\gamma)}\eta\rangle_{r(\gamma)} =$$

$$= \int \bar{f}(\gamma_1)g(\gamma^{-1}\gamma_2)\rho(\gamma_1^{-1}\gamma_2)\delta^{1/2}(\gamma_1)\delta^{1/2}(\gamma_2)\delta^{-1/2}(\gamma)\, d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma_1)\, d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma_2)$$

est mesurable.

Il existe une unique isométrie V de $\mathscr{H}$ sur $L^2(G^{(0)}, \mu; H)$ envoyant le vecteur $L(f)\xi_i$, où f est dans $C_c(G)$ sur la section $f\otimes\xi_i = (f\otimes_u\xi_i)$. En effet l'égalité

$$\int\langle f\otimes_u\xi, g\otimes_u\eta\rangle_u\, d\mu(u) = \langle L(f)\xi, L(g)\eta\rangle$$

donnée par le lemme montre que V est bien définie sur le sous-espace engendré par les $L(f)\xi_i$ et que c'est une isométrie. Comme ce sous-espace est dense, V se prolonge à $\mathscr{H}$ tout entier. L'image de V contient une suite fondamentale de sections de carré intégrable et elle est stable par multiplication par une fonction de $C_c(G^{(0)})$; c'est donc $L^2(G^{(0)}, \mu; H)$ tout entier.

Le lemme montre aussi que pour f, f_i, f_j dans $C_c(G)$,

$$\langle L(f_i)\xi_i, L(f)L(f_j)\xi_j\rangle = \int f(\gamma)\langle f_i \otimes_{r(\gamma)} \xi_i, L(\gamma)f_j \otimes_{s(\gamma)} \xi_j\rangle_{r(\gamma)} \mathrm{d}\nu_0(\gamma).$$

L'égalité $\langle \xi, L(f)\eta\rangle = \langle V\xi, L'(f)V\eta\rangle$, où L' désigne la représentation intégrée que l'on vient de construire, a donc lieu pour ξ et η dans le sous-espace vectoriel engendré par les $L(f)\otimes\xi_i$, où f est dans $C_c(G)$. Elle reste vraie d'après (a) pour ξ et η dans $\mathscr{H}_0$. Par suite, $L(f)$ coïncide avec $V^*L'(f)V$ sur $\mathscr{H}_0$ et il est borné. ▨

La désintégration des représentations de la C^*-algèbre $C_0(G^{(0)}; A)$ où A est un fibré séparable de C^*-algèbres sur l'espace localement compact $G^{(0)}$ est bien connue:

LEMME 4.5. *Soient μ une mesure sur $G^{(0)}$, H un fibré hilbertien mesurable sur $G^{(0)}$ et M une représentation de la C^*-algèbre $C_0(G^{(0)}; A)$ dans $L^2(G^{(0)}, \mu; H)$ par des opérateurs décomposables. Alors*

i) *il existe pour tout u dans $G^{(0)}$ une représentation M_u de A_u dans H_u telle que pour tout a dans $C_0(G^{(0)}; A)$ on ait*

$$M(a) = \int^{\oplus} M_u(a_u)\mathrm{d}\mu(u).$$

ii) *L'action de A sur H est mesurable.*

iii) *La représentation M est non-dégénérée si et seulement si pour presque tout u la représentation M_u est non-dégénérée.*

Preuve. i) D'après [8, lemme 8.3.1] il existe pour tout $u \in G^{(0)}$ une représentation M_u de $C_0(G^{(0)}; A)$ dans H_u telle que $M = \int^{\oplus} M_u \mathrm{d}\mu(u)$. Les représentations M et M_u se prolongent à $C_0(G^{(0)})$. D'après l'unicité de la désintégration de M, il existe un ensemble conégligeable U tel que pour tout $u \in U$ et tout $h \in C_0(G^{(0)})$ on ait $M_u(h) = h(u)$, et donc pour tout $a \in C_0(G^{(0)}; A)$, $M_u(ha) = h(u)M_u(a)$. Alors $M_u(a)$ est nul si a_u est nul et M_u se factorise à travers A_u. Pour $u \notin U$, on redéfinit $M_u = 0$.

ii) Comme le champs de représentations (M_u) est mesurable, l'action de A sur H est mesurable.

iii) On sait qu'une intégrale hilbertienne de représentations est non-dégénérée si et seulement si presque toutes ses composantes sont non-dégénérées. ▨

Passons maintenant au cas général. Comme dans le cas classique du produit croisé par un groupe (voir par exemple [10]), on remarque que les algèbres involutives $C_c(\Sigma, \mathrm{d}\sigma)$ où $\mathrm{d}\sigma$ est le système de Haar $\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\lambda$, et $C_c(G^{(0)}; A)$ agissent sur l'algèbre involutive $C_c(G, \Sigma, A, \lambda)$ comme multiplicateurs à gauche selon les formules, pour f dans $C_c(\Sigma/S; \Sigma * A/S)$

$$\varphi * f(\sigma) = \int \varphi(\tau)[\tau f(\tau^{-1}\sigma)]\, d\tau \quad \text{pour } \varphi \text{ dans } C_c(\Sigma)$$

et

$$hf(\sigma) = h \quad r(\sigma) f(\sigma) \quad \text{pour } h \text{ dans } C_c(G^{(0)}; A).$$

Les vérifications sont similaires à celles qui ont été faites lors de la définition du produit de convolution. On vérifie aussi que ces opérations sont compatibles avec les involutions:

$$(\varphi * f)^* * g = f^* * (\varphi^* * g) \quad \text{pour } \varphi \in C_c(\Sigma) \text{ et } f, g \in C_c(\Sigma/S; \Sigma * A/S)$$

$$(hf)^* * g = f^* * (h^* g) \quad \text{pour } h \in C_c(G^{(0)}; A) \text{ et } f, g \in C_c(\Sigma/S; \Sigma * A/S)$$

et continues pour la topologie limite inductive. De plus, si (φ_α) est une unité approchée pour $C_c(\Sigma, d\sigma)$ comme celle construite dans le lemme 3.2, c'est aussi une unité approchée pour cette action de $C_c(\Sigma, d\sigma)$ sur $C_c(\Sigma/S; \Sigma * A/S)$ et si (e_k) est une unité approchée de $C_c(G^{(0)}; A)$, c'est aussi une unité approchée pour l'action de $C_c(G^{(0)}; A)$ sur $C_c(\Sigma/S; \Sigma * A/S)$.

LEMME 4.6. *Soit L une représentation continue et non-dégénérée de l'algèbre involutive $C_c(G, \Sigma, A, \lambda)$ dans un espace hilbertien séparable $\mathscr{H}$. Alors il existe une unique représentation continue et non-dégénérée de $C_c(\Sigma, d\sigma)$ qu'on notera encore L, et une unique représentation non-dégénérée M de la C^*-algèbre $C_0(G^{(0)}; A)$ telles que pour tout f dans $C_c(\Sigma/S; \Sigma * A/S)$*

$$L(\varphi * f) = L(\varphi)L(f) \quad \textit{pour } \varphi \textit{ dans } C_c(\Sigma)$$

$$L(hf) = M(g)L(f) \quad \textit{pour } h \textit{ dans } C_c(G^{(0)}; A).$$

Preuve. Soit $\mathscr{H}_0$ le sous-espace vectoriel engendré par les $L(f)\xi$ où ξ est dans $\mathscr{H}$ et f est dans $C_c(\Sigma/S, \Sigma * A/S)$. On utilise comme dans [13, page 317] une unité approchée de $C_c(G, \Sigma, A, \lambda)$ pour montrer que les formules

$$L(\varphi) \sum_i L(f_i)\xi_i = \sum_i L(\varphi * f_i)\xi_i$$

et

$$M(h) \sum_i L(f_i)\xi_i = \sum_i L(hf_i)\xi_i$$

définissent bien des opérateurs $L(\varphi)$ et $M(h)$ sur $\mathscr{H}_0$. Montrons que cette représentation L de l'algèbre $C_c(\Sigma, d\sigma)$ vérifie les conditions de la proposition 4.2. Pour montrer (a), on utilise une unité approchée pour l'action de $C_c(\Sigma, d\sigma)$ sur $C_c(\Sigma/S; \Sigma*A/S)$. Pour montrer (b), on utilise la continuité de L et la continuité de l'action de $C_c(\Sigma, d\sigma)$ sur $C_c(\Sigma/S; \Sigma*A/S)$. Pour montrer (c) on utilise la compatibilité de l'action avec l'involution. Les opérateurs $L(\varphi)$ sont donc bornés et, en les prolongeant, on obtient une représentation continue et non-dégénérée de l'algèbre involutive $C_c(\Sigma, d\sigma)$ dans $\mathscr{H}$. Pour montrer que les opérateurs $M(h)$ sont bornés, on procède comme dans le cas scalaire pour écrire

$$\|M(h) \sum_i L(f_i)\xi_i\|^2 = \|h\|^2\|\sum_i L(f_i)\xi_i\|^2 - \|\sum_i L(kf_i)\xi_i\|^2$$

où $\|h\| = \sup\|h(u)\|$, $u \in G^{(0)}$ et $k(u) = (\|h\|^2 - h^*(u)h(u))^{1/2}$.

Il est donc licite de prolonger ces opérateurs à $\mathscr{H}$, puis M à la C^*-algèbre $C_0(G^{(0)}; A)$. Pour montrer qu'elle est non-dégénérée, on utilise une unité approchée pour l'action de $C_c(G^{(0)}; A)$ sur $C_c(\Sigma/S; \Sigma*A/S)$.

Fin de la démonstration de (i). On désintègre la représentation de $C_c(\Sigma, d\sigma)$ obtenue dans le lemme précédent au moyen de la proposition 4.2. La classe transverse sur Σ qu'elle fournit induit une classe transverse sur G telle que $m(\lambda) = m(d\sigma)$. On fixe comme dans la démonstration de la proposition un représentant μ dans $m(\lambda)$. Soient $U \subset G^{(0)}$ l'ensemble $m(\lambda)$-conégligeable et H le Σ_U-fibré hilbertien obtenus. On identifie $\mathscr{H}$ à $L^2(G^{(0)}, \mu; H)$. Comme les opérateurs $M(h)$ où $h \in C_c(G^{(0)})$ sont diagonaux, les opérateurs $M(a)$ où $a \in C_0(G^{(0)}; A)$ sont décomposables. D'après le lemme 4.5, H est aussi doté d'une action de A. Pour montrer que les actions de $\Sigma|U$ et de $A|U$ sur H sont compatibles, montons L en une représentation $L \circ \chi$ de $C_c(\Sigma, A, d\sigma)$, où χ est l'homomorphisme du lemme 3.3. En utilisant une unité approchée pour $C_c(G, \Sigma, A, \lambda)$, on voit que pour h dans $C_c(G^{(0)}; A)$ et pour φ dans $C_c(\Sigma)$, on a

$$L \circ \chi(h\varphi) = M(h)L(\varphi) \quad \text{où } h\varphi(\sigma) = h \circ r(\sigma)\varphi(\sigma)$$

$$L \circ \chi(\varphi h) = L(\varphi)M(h) \quad \text{où } \varphi h(\sigma) = \varphi(\sigma)\sigma h \circ s(\sigma).$$

Cela s'écrit encore

$$\text{(1)} \qquad \langle \xi, L \circ \chi(h\varphi)\eta \rangle = \int \langle \xi \circ r(\sigma), h \circ r(\sigma)\varphi(\sigma)\sigma\eta \circ s(\sigma) \rangle d\nu(\sigma)$$

et

$$\text{(2)} \qquad \langle \xi, L \circ \chi(\varphi h)\eta \rangle = \int \langle \xi \circ r(\sigma), \varphi(\sigma)\sigma[h \circ s(\sigma)\eta \circ s(\sigma)] \rangle d\nu(\sigma)$$

où on a posé $d\nu = dt\, d\nu_0$.

Comme les combinaisons linéaires des $h\varphi$, où $h \in C_c(G^{(0)}; A)$ et $\varphi \in C_c(\Sigma)$ sont denses dans $C_c(\Sigma; \Sigma * A)$, la première égalité reste vraie pour tout $f \in C_c(\Sigma; \Sigma * A)$:

$$\langle \xi, L \circ \chi(f)\eta \rangle = \int \langle \xi \circ r(\sigma), f(\sigma)\sigma\eta \circ s(\sigma)\rangle \, d\nu(\sigma).$$

En l'appliquant à $f = \varphi h$ et en comparant avec la deuxième égalité, on obtient

$$\sigma[h \circ s(\sigma)\eta \circ s(\sigma)] = \sigma h \circ s(\sigma)\sigma\eta \circ s(\sigma) \quad \text{pour presque tout } \sigma.$$

En utilisant la séparabilité de $C_c(G^{(0)}; A)$ et de H, on voit que l'ensemble des σ de Σ tels que $\sigma(a\xi) = (\sigma a)(\sigma\xi)$ pour tout $a \in A_{s(\sigma)}$ et tout $\xi \in H_{s(\sigma)}$ contient une partie conégligeable. Comme il est stable par multiplication, il contient, d'après l'argument déjà utilisé, une réduction $\Sigma|U'$ où U' est une partie de U μ-conégligeable. Quitte à réduire U, on supposera que l'égalité a lieu partout.

Pour montrer l'égalité $t\xi = \chi(t)\xi$ pour $(t, \xi) \in S * H$, on utilise l'égalité (ii) du lemme 3.3 qui donne

$$L \circ \chi(\varphi * f) = M(\chi(\varphi))L \circ \chi(f) \quad \text{pour } \varphi \in C_c(S) \text{ et } f \in C_c(\Sigma; \Sigma * A).$$

En comparant les coefficients de ces deux opérateurs avec $f = h\psi$, où $h \in C_c(G^{(0)}; A)$ et $\psi \in C_c(\Sigma)$, on obtient

$$\langle \xi \circ r(\sigma), t[h \circ r(\sigma)\sigma\eta \circ s(\sigma)]\rangle = \langle \xi \circ r(\sigma), \chi(t)h \circ r(\sigma)\sigma\eta \circ s(\sigma)\rangle$$

pour presque tout $(t, \sigma) \in S * \Sigma$. En faisant parcourir à ξ, η et h des suites fondamentales, on trouve un ensemble conégligeable W de Σ tel que pour tout $\sigma \in W$, presque tout $t \in S_{r(\sigma)}$ et tout $(\xi, \eta, a) \in H_{r(\sigma)} \times H_{s(\sigma)} \times A_{r(\sigma)}$ on ait

$$\langle \xi, t(a\sigma\eta)\rangle = \langle \xi, \chi(t)a\sigma\eta\rangle.$$

Comme la représentation de $A_{r(\sigma)}$ dans $H_{r(\sigma)}$ est non dégénérée, cela entraîne que $t\xi = \chi(t)\xi$ pour tout $\xi \in H_{r(\sigma)}$. Comme l'ensemble des t de $S_{r(\sigma)}$ qui satisfont cette relation est multiplicatif, on a en fait l'égalité pour tout $t \in S_{r(\sigma)}$. Il existe donc une partie U' de U μ-conégligeable telle que l'égalité $t\xi = \chi(t)\xi$ ait lieu pour tout $(t, \xi) \in S_u \times H_u$ et tout $u \in U'$. On remplace U par U'. On a alors pour tout $f \in C_c(\Sigma; \Sigma * A)$

$$\langle \xi, L \circ \chi(f)\eta \rangle = \int \langle \xi \circ r(\sigma), f(t\sigma)\chi(t)\sigma\eta \circ s(\sigma)\rangle dt \, d\nu_0(\dot\sigma) =$$

$$= \int \langle \xi \circ r(\sigma), \chi(f)(\sigma)\sigma\eta \circ s(\sigma)\rangle d\nu_0(\dot\sigma).$$

Comme χ est surjective, on a bien pour tout $f \in C_c(\Sigma/S; \Sigma * A/S)$

$$\langle \xi, L(f)\eta \rangle = \int \langle \xi \circ r(\sigma), f(\sigma)\sigma\eta \circ s(\sigma) \rangle \, d\nu_0(\dot{\sigma}).$$

Pour la deuxième assertion, il ne reste plus qu'à montrer que si deux représentations (m, H) et (m', H') de (G, Σ, A) ont des représentations intégrées L et L' équivalentes, alors elles sont équivalentes. Considérons d'abord les représentations M et M' de $C_0(G^{(0)})$ obtenues par passage aux multiplicateurs. Comme elles sont équivalentes, on a $m(\lambda) = m'(\lambda)$, d'où $m = m'$ d'après la proposition 2.2. On choisit μ dans $m(\lambda)$. On a donc une isométrie V de $L^2(G^{(0)}, \mu, H)$ dans $L^2(G^{(0)}, \mu, H')$ qui entrelace les représentations. Comme elle commute aux opérateurs diagonaux, elle est décomposable. Considérons maintenant les représentations M et M' de $C_c(G^{(0)}; A)$ obtenues par passage aux multiplicateurs. Comme V les entrelace, il existe un ensemble μ-conégligeable U_1 de $G^{(0)}$ tel que pour tout $u \in U_1$ on ait

$$V(u)M(a) = M'(a)V(u) \quad \text{pour tout } a \in A_u.$$

Considérons enfin les représentations L et L' de $C_c(\Sigma, d\sigma)$ obtenues par passage aux multiplicateurs. La relation $VL(f) = L'(f)V$ pour $f \in C_c(\Sigma)$ devient

$$\int f(\sigma) \langle \xi \circ r(\sigma), \; V \circ r(\sigma) L(\sigma) \eta \circ s(\sigma) \rangle \, d\nu(\sigma) =$$

$$= \int f(\sigma) \langle \xi \circ r(\sigma), \; L'(\sigma) V \circ s(\sigma) \eta \circ s(\sigma) \rangle \, d\nu(\sigma).$$

On obtient donc que, pour presque tout $\sigma \in \Sigma$,

$$\langle \xi \circ r(\sigma), \; V \circ r(\sigma) L(\sigma) \eta \circ s(\sigma) \rangle = \langle \xi \circ r(\sigma), \; L'(\sigma) V \circ s(\sigma) \eta \circ s(\sigma) \rangle.$$

Selon l'argument maintenant familier, on en déduit l'existence d'un ensemble U_2 μ-conégligeable tel que pour tout $\sigma \in \Sigma | U_1$, on ait $V \circ r(\sigma) L(\sigma) = L'(\sigma) V \circ s(\sigma)$. Avec $U = U_1 \cap U_2$, on a bien un isomorphisme V de H_U sur H'_U qui entrelace les actions.

REMARQUE 4.7. On a en fait montré une version plus forte du théorème, où les hypothèses sont celles de la proposition 3. Il suffit d'avoir un sous-espace dense $\mathscr{H}_0$ de $\mathscr{H}$ et une représentation de l'algèbre $C_c(G, \Sigma, A, \lambda)$ par des opérateurs de $\mathscr{H}_0$, a priori non bornés, satisfaisant les conditions (a), (b) et (c), pour obtenir la conclusion. En particulier, cela s'applique à la représentation GNS construite à partir d'une forme linéaire positive et continue pour la topologie limite inductive sur l'algèbre involutive $C_c(G, \Sigma, A, \lambda)$.

COROLLAIRE 4.8. *Toute représentation de $C_c(G, \Sigma, A, \lambda)$ continue pour la topologie limite inductive est bornée pour la norme I.*

5. APPLICATION À L'ÉQUIVALENCE DE MORITA DE CERTAINS PRODUITS CROISÉS

On ne considèrera dans cette section que des systèmes dynamiques (G, Σ, A) séparables, c'est-à-dire tels que Σ ait une base dénombrable d'ouverts et A soit séparable, des représentations non-dégénérées dans des espaces hilbertiens séparables, et des fibrés d'espaces de Banach séparables.

Soit (G, Σ, A) un système dynamique muni d'un système de Haar λ. La C^*-norme universelle de $C_c(G, \Sigma, A, \lambda)$ est définie par

$$\|f\| = \sup\|L(f)\|, \quad L \text{ représentation continue de } C_c(G, \Sigma, A, \lambda).$$

D'après le corollaire 4.8, $\|f\|$ est majoré par $\|f\|_I$. On s'assure que $\|f\|$ est nul seulement si f est nul en construisant une famille de représentations fidèles, par exemple des représentations induites à partir de représentations de A (voir [18] ou [10]). C'est donc une norme de C^*-algèbre. On note $C^*(G, \Sigma, A, \lambda)$ la C^*-algèbre obtenue par complétion. D'autre part, on définit sur la $*$-catégorie $C_c(G, \Sigma, A)$ la C^*-norme universelle par, pour chaque couple de Σ-espaces principaux avec r-systèmes (X, α) et (Y, β) et f dans $C_c(X*Y/S\times\Sigma; X*Y*A/S\times\Sigma)$,

$$\|(\alpha, f, \beta)\| = \sup\|L(\alpha, f, \beta)\|,$$

L représentation continue de la $*$-catégorie $C_c(G, \Sigma, A)$.

Pour les mêmes raisons, c'est une norme de C^*-catégorie (au sens de [11]). On note $C^*(G, \Sigma, A)$ la C^*-catégorie obtenue par complétion et $C^*(\alpha, \beta)$ la complétion de (α, β). Il résulte du théorème de désintégration que toute représentation continue de la $*$-algèbre $C_c(G, \Sigma, A, \lambda)$ se prolonge en une représentation continue de la $*$-catégorie $C_c(G, \Sigma, A)$. Par suite la norme de la C^*-catégorie coïncide avec la norme de la C^*-algèbre $C^*(G, \Sigma, A, \lambda)$. Dans la $*$-catégorie $C_c(G, \Sigma, A)$, G n'occupe pas de position privilégiée. En effet, on obtient la même $*$-catégorie en partant du système dynamique $(\underline{G}, \underline{\Sigma}, \underline{A})$ induit par le Σ-espace principal X:

$$\underline{\Sigma} = X*X/\Sigma, \quad \underline{G} = X*X/S\times\Sigma \quad \text{et} \quad \underline{A} = X*A/\Sigma.$$

De plus, un système de Haar $\underline{\lambda}$ sur $\underline{G}$ définit un r-système plein α sur X et $C^*(\lambda, \alpha)$ est un bimodule d'équivalence pour les C^*-algèbres $C^*(G, \Sigma, A, \lambda)$ et $C^*(\underline{G}, \underline{\Sigma}, \underline{A}, \underline{\lambda})$.

On va généraliser ce résultat en autorisant comme dans [2] ou [6] une équivalence de Morita entre A et $\underline{A}$.

On peut élargir la $*$-catégorie $C_c(G, \Sigma, A)$ de la manière suivante:

DÉFINITION 5.1. Etant donné un système dynamique (Σ, A), on dira qu'un fibré $\mathscr{E}$ d'espaces de Banach au-dessus de l'espace X est un (Σ, A)-C^*-fibré si

i) X est un Σ-espace (à gauche),

ii) $\mathscr{E}$ est un Σ-fibré (à gauche), c'est-à-dire qu'il est muni d'une action équivariante de Σ par des isométries,

iii) $\mathscr{E}$ est un fibré de C^*-modules (à droite) sur A, c'est-à-dire que chaque fibré $\mathscr{E}_x$ est un C^*-module (à droite) sur $A_{r(x)}$, l'action comme une application de $\mathscr{E}*A$ dans $\mathscr{E}$ et le produit scalaire comme une application de $\mathscr{E}*\mathscr{E}$ dans A étant continus,

iv) les actions de Σ et de A sont compatibles, c'est-à-dire qu'on a

$$\langle \sigma\varphi, \sigma\psi \rangle = \sigma\langle \varphi, \psi \rangle \quad \text{pour tout } (\sigma, \varphi, \psi) \in \Sigma*\mathscr{E}*\mathscr{E}$$

et

$$\sigma(\varphi a) = (\sigma\varphi)(\sigma a) \quad \text{pour tout } (\sigma, \varphi, a) \in \Sigma*\mathscr{E}*A.$$

On remarque comme dans [2] que la deuxième condition résulte de la première si l'image du produit scalaire est dense.

Si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont deux fibrés de C^*-modules sur A, de bases respectives X et Y, on peut former le fibré $\mathscr{K}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ au dessus de $X*Y$. Il a pour fibre l'espace de Banach $\mathscr{K}(\mathscr{E}_x, \mathscr{F}_y)$ des opérateurs compacts du C^*-module $\mathscr{F}_y$ dans le C^*-module $\mathscr{E}_x$. Sa topologie est la plus fine qui rende continue l'application de $\mathscr{E}*\mathscr{F}$ dans $\mathscr{K}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ qui à (φ, ψ) associe l'opérateur de rang fini $\theta_{\varphi,\psi}$ où $\theta_{\varphi,\psi}(\zeta) = \varphi\langle\psi, \zeta\rangle$.

Si (G, Σ, A) est un système dynamique et si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont deux (Σ, A)-C^*--fibrés, on définit une action équivariante de $S\times\Sigma$ sur $\mathscr{K}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ par

$$(s, \sigma)T(\varphi) = s\sigma T[\sigma^{-1}(\varphi\chi(s))]$$

où $T \in \mathscr{K}(\mathscr{E}_x, \mathscr{F}_y)$, $(s, \sigma) \in S*\Sigma_{r(x)}$ et $\varphi \in \mathscr{F}_{\sigma y}$.

Les objets de la nouvelle $*$-catégorie consisteront des triplets $(X, \alpha, \mathscr{E})$ où X est un Σ-espace principal, α un r-système sur X et $\mathscr{E}$ un (Σ, A)-C^*-fibré au-dessus de X.

Les flèches entre les objets $(X, \alpha, \mathscr{E})$ et $(Y, \beta, \mathscr{F})$ seront des éléments $f \in C_c(X*Y/S\times\Sigma; \mathscr{K}(\mathscr{E}, \mathscr{F})/S\times\Sigma)$, qu'on notera aussi (α, f, β). Ce sont des fonctions "continues à support compact modulo $S\times\Sigma$" définies sur $X*Y$ à valeurs dans $\mathscr{K}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ telles que

i) $f(x, y) \in \mathscr{K}(\mathscr{E}_x, \mathscr{F}_y)$

ii) $f(\sigma x, \sigma y) = \sigma f(x, y)\sigma^{-1}$

iii) $f(sx, y)\varphi = sf(x, y)\varphi\chi(s)$.

Etant donnés trois objets $(X, \alpha, \mathcal{E})$, $(Y, \beta, \mathcal{F})$, $(Z, \gamma, \mathcal{G})$ et deux flèches

$$f \in C_c(X * Y/S \times \Sigma; \mathcal{K}(\mathcal{E}, \mathcal{F})/S \times \Sigma), \quad g \in C_c(Y * Z/S \times \Sigma; \mathcal{K}(\mathcal{F}, \mathcal{G})S \times \Sigma)$$

on compose f et g selon la même règle que dans la section 3:

$$(\alpha, f, \beta)(\beta, g, \gamma) = (\alpha, f *_\beta g, \gamma)$$

où

$$f *_\beta g(x, z) = \int f(x, y) g(y, z) \mathrm{d}\beta(\dot{y}).$$

Ici $f(x, y)g(y, z)$ est le composé des opérateurs $f(x, y)$ et $g(y, z)$. On vérifie comme dans le lemme 3.1 que $f *_\beta g$ est bien défini et appartient à $C_c(X * Z/S \times \Sigma; \mathcal{K}(\mathcal{E}, \mathcal{G})/S \times \Sigma)$.

L'involution est définie comme précédemment par

$$f^*(y, x) = f(x, y)^*.$$

La propriété cruciale pour nous est que toute représentation (m, H) du système dynamique (G, Σ, A) peut encore être intégrée pour donner une représentation de cette $*$-catégorie. On procède comme dans 3.5. On associe à $(X, \alpha, \mathcal{E})$ l'espace de Hilbert $H(\alpha) = L^2(X/\Sigma; \mathcal{E} \otimes_A H/\Sigma; m(\alpha))$. Ici $\mathcal{E} \otimes_A H$ dénote le produit tensoriel sur A de $\mathcal{E}$ et de H. C'est le fibré hilbertien sur X dont la fibre au-dessus de x est le complété séparé de $\mathcal{E}_x \otimes H_{r(x)}$ pour le produit scalaire

$$\langle \varphi \otimes \xi, \psi \otimes \eta \rangle = \langle \xi, \langle \varphi, \psi \rangle \eta \rangle.$$

Sa structure mesurable est définie par les sections $\varphi \otimes \xi$ où $\varphi \in C_c(X; \mathcal{E})$ et ξ est une section mesurable du fibré H. Il est muni de l'action équivariante de Σ par des isométries:

$$\sigma(\varphi \otimes \xi) = \sigma\varphi \otimes \sigma\xi.$$

En outre $\mathcal{K}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ opère de $\mathcal{F} \otimes_A H$ dans $\mathcal{E} \otimes_A H$ selon la formule

$$T(\varphi \otimes \xi) = T\varphi \otimes \xi.$$

Etant donnés $(X, \alpha, \mathcal{E})$, $(Y, \beta, \mathcal{F})$ et $f \in C_c(X * Y/S \times \Sigma; \mathcal{K}(\mathcal{E}, \mathcal{F})/S \times \Sigma)$, on définit l'opérateur $L(\alpha, f, \beta)$ de $H(\beta)$ dans $H(\alpha)$ par

$$\langle \xi \sqrt{\mu}, L(\alpha, f, \beta)\eta\sqrt{\nu} \rangle = \int \langle \xi(x), f(x, y)\eta(y) \rangle \sqrt{(\mu \circ \beta)(\nu \circ \alpha)}\,\dot{(x, y)}$$

pour $\xi\sqrt{\mu} \in H(\alpha)$ et $\eta\sqrt{\nu} \in H(\beta)$.

D'après le théorème de désintégration, toute représentation continue de cette $*$-catégorie est obtenue ainsi. Par suite la C^*-norme universelle de cette $*$-catégorie coïncide avec la norme de la C^*-algèbre $C^*(G, \Sigma, A, \lambda)$. Il en résulte les deux résultats suivants.

COROLLAIRE 5.2. *Soit* (G, Σ, A) *un système dynamique avec système de Haar* λ. *Tout triplet* $(X, \alpha, \mathscr{E})$ *consistant d'un* Σ*-espace principal* X, *d'un r-système* α *sur* X *et d'un* (Σ, A)-C^**-fibré* $\mathscr{E}$ *au-dessus de* X *définit un* C^**-module sur la* C^**-algèbre* $C^*(G, \Sigma, A, \lambda)$.

Explicitons ce C^*-module en partant d'un fibré $\mathscr{E}$ de C^*-modules à gauche sur A. On note $\mathscr{E}^*$ le fibré de C^*-modules à droite correspondant. On identifie $\Sigma{*}X/\Sigma$ à X en envoyant (σ, x) sur $\sigma^{-1}x$ et $\mathscr{K}(\Sigma{*}A, \mathscr{E}^*)/\Sigma$ à $\mathscr{E}$. Le C^*-module est la complétion de $C_c(X/S; \mathscr{E}/S)$ dont les éléments sont des sections φ "continues à support compact modulo S" telles que

$$\varphi(sx) = s(\chi(s^{-1})\varphi(x)) \quad \text{pour } (s, x) \in S{*}X.$$

La structure de module est donnée par

$$f\varphi(x) = \int f(\sigma)[\sigma\varphi(\sigma^{-1}x)]\mathrm{d}\lambda(\dot{\sigma}) \quad \text{pour } f \in C_c(\Sigma/S; \Sigma{*}A/S).$$

Le produit scalaire est donné par

$$\langle\varphi, \psi\rangle(\sigma) = \int \langle\varphi(x), \sigma\psi(\sigma^{-1}x)\rangle\, \mathrm{d}\alpha(\dot{x}) \quad \text{pour } \varphi, \psi \in C_c(X/S; \mathscr{E}/S).$$

Le corollaire et sa démonstration restent valides si on suppose seulement que X est un Σ-espace propre.

DÉFINITION 5.3. On dira que deux systèmes dynamiques (G, Σ, A) et $(\underline{G}, \underline{\Sigma}, \underline{A})$ sont *équivalents* s'il existe un espace X et un fibré $\mathscr{E}$ d'espaces de Banach au-dessus de X tels que

i) X est une équivalence (voir [15]) de Σ et $\underline{\Sigma}$ compatible avec les extensions, c'est-à-dire telle que $SX = X\underline{S}$,

ii) $\mathscr{E}$ est (Σ, A)-C^*-fibré à gauche et un $(\underline{\Sigma}, \underline{A})$-$C^*$-fibré à droite tel que les actions à gauche et à droite commutent,

iii) pour tout $x \in X$, $\mathscr{E}_x$ est un bimodule d'équivalence de $A_{r(x)}$ et $\underline{A}_{s(x)}$.

On appellera *équivalence* des systèmes dynamiques (G, Σ, A) et $(\underline{G}, \underline{\Sigma}, \underline{A})$ un tel fibré $(\mathscr{E}, X)$.

COROLLAIRE 5.4. *Toute équivalence* $(\mathscr{E}, X)$ *des systèmes dynamiques* (G, Σ, A) *et* $(\underline{G}, \underline{\Sigma}, \underline{A})$ *définit un bimodule d'équivalence des* C^**-algèbres* $C^*(G, \Sigma, A, \lambda)$ *et* $C^*(\underline{G}, \underline{\Sigma}, \underline{A}, \underline{\lambda})$, *où* λ *et* $\underline{\lambda}$ *sont des systèmes de Haar de* G *et de* $\underline{G}$ *respectivement.*

Preuve. Les deux algèbres font partie de la $*$-catégorie qu'on vient de décrire. En effet, en notant par $\mathscr{E}^*$ le fibré de C^*-modules à droite sur A correspondant au fibré de C^*-modules à gauche $\mathscr{E}$, on remarque que $C_c(\Sigma/S; \Sigma * A/S)$ s'identifie à $C_c(X*X/S\times\Sigma; \mathscr{K}(\mathscr{E}^*, \mathscr{E}^*)/S\times\Sigma)$. L'identification de Σ à $X*X/\Sigma$ est décrite dans [15]. En utilisant la condition (i) de la définition 5.3, on identifie $G = \Sigma/S$ à $X*X/S\times\Sigma$. L'isomorphisme des fibrés $\Sigma * A$ et $\mathscr{K}(\mathscr{E}^*, \mathscr{E}^*)/\Sigma$ est le suivant: à $T \in \mathscr{K}(\mathscr{E}^*_x, \mathscr{E}^*_y)$ on associe $(\sigma, a) \in \Sigma * A$, où $\sigma = \dot{(\overline{x, y})}$ et $a \in A_{s(x)} = \mathscr{K}(\mathscr{E}^*_x, \mathscr{E}^*_y)$ est défini par $a(\xi^*) = T(\xi^*\sigma)$ pour $\xi^* \in \mathscr{E}^*_x$. En outre le système de Haar λ de G définit un r-système plein α sur X/S, tel que pour tout $x \in X$ et pour tout $f \in C_c(X/S)$,

$$\int f(\dot{y})\,\mathrm{d}\alpha^{r(x)}(\dot{y}) = \int f(\dot{x}\gamma)\,\mathrm{d}\lambda^{s(x)}(\gamma).$$

On vérifie alors que l'identification de $C_c(G, \Sigma, A, \lambda)$ et de $C_c(X*X/S\times\Sigma; \mathscr{K}(\mathscr{E}^*, \mathscr{E}^*)/S\times\Sigma)$ est un isomorphisme de $*$-algèbres. Le bimodule $C_c(\Sigma * X/S\times\Sigma; \mathscr{K}(\Sigma * A, \mathscr{E}^*)/S\times\Sigma) = C_c(X/S; \mathscr{E}/S)$ vérifie toutes les conditions requises pour être une équivalence, à l'exception peut-être de la densité des images des produits scalaires. La situation étant symétrique, il suffit d'étudier le produit scalaire à valeurs dans $C_c(G, \Sigma, A, \lambda)$. Plutôt que de généraliser le lemme 3.2, on va montrer que toute représentation (m, H) nulle sur l'image du produit scalaire est nulle. Pour tout $f \in C_c(X/S; \mathscr{E}/S)$, l'opérateur $L(\lambda, f, \alpha)$ est nul. Soient (ξ_i) et (φ_n) des suites fondamentales pour H et $\mathscr{E}$. En explicitant l'équation $\langle \xi, L(\lambda, f, \alpha)\eta\rangle = 0$ on peut obtenir un ensemble conégligeable V de X tel que pour tout $x \in V$

$$\langle \xi_i \circ r(x), \langle \varphi_m(x), \varphi_n(x)\rangle \xi_j \circ r(x)\rangle = 0$$

pour tous i, j, m et n. Comme le produit scalaire de $\mathscr{E}_x \times \mathscr{E}_x$ dans $A_{r(x)}$ a une image dense, on obtient pour tout $a \in A$

$$\langle \xi_i \circ r(x), a\xi_j \circ r(x)\rangle = 0.$$

Comme la représentation de $A_{r(x)}$ dans $H_{r(x)}$ est non dégénérée, cela entraîne que $H_{r(x)} = 0$. On obtient ainsi que H_u est nul sur un ensemble conégligeable, et par conséquent la représentation (m, H) est nulle.

REMARQUE 5.5. i) La construction des C^*-modules décrite dans le corollaire 5.2 est bien connue, du moins dans le cadre des C^*-algèbres associées aux feuilletages (voir par exemple [5] ou [12]).

ii) Nous renvoyons le lecteur à [15] dans le cas des groupoïdes et à [2] et à [6] dans le cas des produits croisés par un groupe pour des exemples de systèmes dynamiques équivalents.

Remerciements. L'auteur tient à exprimer sa gratitude au Mathematical Sciences Research Institute, où une partie de ce travail a été effectuée. Une remarque de I. Raeburn lui a permis de rectifier la définition 5.3. D'autres remarques et corrections lui ont été fournies par A. Ramsay.

RÉFÉRENCES

1. BOURBAKI, N., *Integration*, Chap. 7–8, Hermann, Paris, 1963.
2. COMBES, F., Crossed products and Morita equivalence, *Proc. London Math. Soc.* (*3*), **49**(1984), 289–306.
3. CONNES, A., Sur la théorie non commutative de l'intégration, in *Lecture Notes in Mathematics*, **725**, Springer-Verlag, Berlin, 1979, pp. 19–143.
4. CONNES, A., A survey of foliations and operator algebras, in *Proc. Sympos. Pure Math.*, **38**(1982), pp. 521–628.
5. CONNES, A.; SKANDALIS, G., The longitudinal index for foliations, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **20**(1984), 1139–1183.
6. CURTO, R.; MUHLY, P.; WILLIAMS, D., Cross products of strongly Morita equivalent C^*-algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **90**(1984), 528–530.
7. DANG NGOC, N., Produits croisés restreints et extensions de groupes, preprint, 1975.
8. DIXMIER, J., *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
9. FELL, J., *Induced representations and Banach *-algebraic bundles*, Lecture Notes in Mathematics, **582**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
10. GREEN, P., The local structure of twisted covariance algebras, *Acta Math.*, **140**(1978), 191–250.
11. GHEZ, P.; LIMA, R.; ROBERTS, J., W^*-categories, *Pacific J. Math.*, **120**(1985), 79–109.
12. HILSUM, M.; SKANDALIS, G., Stabilité des C^*-algèbres de feuilletages, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **33**(1983), 201–208.
13. JOHNSON, B., An introduction to the theory of centralizers, *Proc. London Math. Soc.*, **14**(1964), 299–340.
14. KASTLER, D., On A. Connes' noncommutative integration theory, *Commun. Math. Phys.*, **85**(1982), 99–120.
15. MUHLY, P.; RENAULT, J.; WILLIAMS, D., Equivalence and isomorphism for groupoid C^*-algebras, *J. Operator Theory*, **17**(1987), 3–22.
16. RAMSAY, A., Virtual groups and group actions, *Adv. in Math.*, **6**(1971), 253–322.
17. RAMSAY, A., Topologies for measured groupoids, *J. Funct. Anal.*, **47**(1982), 314–343.
18. RENAULT, J., *A groupoid approach to C*-algebras*, Lecture Notes in Mathematics, **793**, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
19. RIEFFEL, M., Applications of strong Morita equivalence to transformation group C^*-algebras, in *Proc. Sympos. Pure Math.*, **38**(1982), pp. 299–310.

JEAN RENAULT
Département de Mathématique,
Université Pierre et Marie Curie,
Tours 45–46, 5-e étage,
4, place Jussieu, Paris,
France.

Received April 8, 1986.