J. OPERATOR THEORY
20(1988), 375–380

DISTANCE ENTRE ÉLÉMENTS D'UN SEMI-GROUPE CONTINU DANS UNE ALGÈBRE DE BANACH

A. MOKHTARI

INTRODUCTION

Soit $(a^t)_{t>0}$ un semi-groupe continu et borné à l'origine, et soit A l'algèbre engendrée par $(a^t)_{t>0}$. On se propose ici de démontrer que si $\limsup\limits_{t\to 0^+}\|a^{2t} - a^t\| < 1/4$, alors l'algèbre A est unitaire, et dans ce cas $\limsup\limits_{t\to 0^+}\|a^{2t} - a^t\| = 0$ (théorème 1). J. Esterle avait démontré dans [1] que si A n'a pas d'idempotent non nul, alors $\|a^{2t} - a^t\| \geqslant 1/4$ pour t petit.

Un contre exemple, dans l'algèbre c_0, montre qu'on ne peut remplacer lim sup par lim inf.

La méthode de démonstration du théorème 1 utilise l'idempotent $p(x)$ défini dans [2] pour tout élément x dans une algèbre de Banach tel que $\|x^2 - x\| < 1/4$.

Nous appliquons ensuite le théoréme 1 aux contractions T d'un espace de Banach. La proposition 2 (certainement bien connue) permet de définir dans l'algèbre $A = [(\mathrm{Sp}(1 - T)^n)_{n\geqslant 1}]^-$ le semi-groupe $((1 - T)^r)_{r>0}$.

Nous montrons ainsi (théorème 2) que si A est non unitaire alors $\limsup\limits_{t\to 0^+}\|(1 - T)^{2t} - (1 - T)^t\| \geqslant 1/4$. On donne également en utilisant en particulier le théorème de factorisation de Cohen, d'autres conditions équivalentes au fait que A est non unitaire. Il résulte de la démonstration de [2, théorème 4.4] que si A est non unitaire, et si $\mathrm{sp}(T)\setminus\{1\}$ n'est pas réunion d'une suite de compacts disjoints non vides relativement ouverts alors on a la condition plus forte $\liminf\limits_{t\to 0^+}\|(1-T)^{2t}-(1-T)^t\| \geqslant 1/4$.

La conclusion du théorème 2 est plus faible mais nous n'exigeons ici aucune condition spectrale pour T.

Rappelons qu'on appelle unités approchées bornées séquentielles (u.a.b.s) les suites (e_n) d'une algèbre de Banach commutative A qui sont bornées et vérifient $\|xe_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour tout $x \in A$.

THÉORÈME 1. *Soit $(a^t)_{t>0}$ un semi-groupe continu et borné à l'origine dans une algèbre de Banach, et soit $A = \overline{\mathrm{Sp}(a^t)}_{t>0}$. Alors on a:*

i) $(a^{t_n})_{n\geq 1}$ *est une* u.a.b.s. *pour l'algèbre A si* $t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

ii) $\limsup\limits_{t\to 0^+} \|a^{2t} - a^t\| < 1/4$ *si et seulement si A est unitaire, et dans ce cas l'unité e de A vérifie* $e = \lim\limits_{t\to 0^+} a^t$, *et on a* $\limsup\limits_{t\to 0^+} \|a^{2t} - a^t\| = 0$.

Preuve. i) Pour tout $t > 0$, $t_n + t \xrightarrow[n\to+\infty]{} t$. Comme l'application $t \to a^t$ est continue, on a alors $a^{t_n+t} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a^t$ pour $t > 0$, d'où

$$a^{t_n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^{s_i} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^{t_n} \cdot a^{s_i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^{s_i}$$

pour $s_1, \ldots, s_m > 0$. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbf{C}$. Comme $\sup\|a^{t_n}\| < +\infty$, on a pour tout $x \in A$, $a^{t_n}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, et $(a^{t_n})_n$ est une u.a.b.s. pour A.

ii) Supposons $\|a^{2t} - a^t\| \leq \lambda < 1/4$ pour $0 < t < t_0$, et considérons l'application $h\colon]0, t_0[\to A \oplus \mathbf{C}1$ définie par $h(t) = P(a^t)$ où

$$P(a^t) = 1/2 - (1/2 - a^t)(1 - 4a^t + 4a^{2t})^{-1/2} =$$

$$= 1/2 - (1/2 - a^t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1/2(-1/2-1)\ldots(-1/2-n+1)}{n!} (4a^{2t} - 4a^t)^n.$$

Comme la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{-1/2\,(-1/2-1)\ldots(-1/2-n+1)}{n!} (4a^{2t} - 4a^t)^n$ est normalement convergente sur $]0, t_0[$ car $\|4a^{2t} - 4a^t\| \leq 4\lambda < 1$, et comme l'application $t \to a^t$ est continue, alors h est continue. D'autre part $P(a^t) \in A$ et $P(a^t)$ est un idempotent [2]. Si $P(a^t) \neq P(a^{t'})$, comme $P(a^t)$ et $P(a^{t'})$ sont deux idempotents de l'algèbre commutative A, on a $\|P(a^t) - P(a^{t'})\| \geq 1$.

Donc dans un voisinage de t on a: $P(a^t) = P(a^{t'})$, la fonction h est localement constante et comme elle est continue, elle est constante, donc $P(a^t) = g$ pour $t \in]0, t_0[$. D'après [2, lemme 3.3] $(P(a^{t_n}))_n$ est une u.a.b.s. pour A, pour toute suite de réels $t_n > 0$ telle que $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Soit f un élément quelconque de A: alors $P(a^t)f \xrightarrow[t\to 0^+]{} f$ et $P(a^t)f = fg$ pour $0 < t < t_0$. D'où $gf = fg = f$ pour tout $f \in A$, et A est unitaire. Si A est unitaire d'unité e, comme $(a^{t_n})_n$ est une u.a.b.s. pour A, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{t_n} \cdot e = e$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{t_n} = e$ pour toute suite (t_n) qui converge vers 0, et $\limsup\limits_{t\to 0^+} \|a^{2t} - a^t\| = 0$.

La proposition suivante montre qu'on ne peut remplacer lim sup par lim inf dans le résultat précédent.

PROPOSITION 1. *Il existe dans c_0 un semi-groupe continu $(a^t)_{t>0}$ tel que* $\liminf_{t\to 0^+}\|a^{2t} - a^t\| < 1/4$ *et* $\overline{\mathrm{Sp}(a^t)}$ *est non unitaire.*

Preuve. Posons $f(\delta) = (1/2 + \delta)^2 - (1/2 - \delta)$. On a $f(0) = -1/4$, et il existe $\delta \in]0, 1/2[$ tel que $f(\delta) < 0$. On a $(1/2 + \delta)^{2^{k+1}} < (1/2 - \delta)^{2^k}$ pour $k \geqslant 1$.

Posons $\alpha_n = \dfrac{(1/2 + \delta)^{2^{n+1}} + (1/2 - \delta)^{2^n}}{2}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$. α_n est le milieu du segment $[(1/2 + \delta)^{2^{n+1}}, (1/2 - \delta)^{2^n}]$, et $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

On a $\alpha_n \notin [(1/2 - \delta)^{2^k}, (1/2 + \delta)^{2^k}]$ pour tout n et tout k.

Posons $t_k = 1/2^k$; $k = 1, 2, \ldots$. Alors $\alpha_n^{t_k} \notin [1/2 - \delta, 1/2 + \delta]$.

Considérons la parabole $g(x) = -x^2 + x$, $x \in [0,1]$. $g(0) = g(1) = 0$, le maximum est atteint au point $x = 1/2$; $g(1/2) = 1/4$ et g est symétrique par rapport à $x = 1/2$. On a donc

$$|\alpha_n^{2t_k} - \alpha_n^{t_k}| = \alpha_n^{t_k} - \alpha_n^{2t_k} \leqslant (1/2 - \delta) - (1/2 - \delta)^2 = 1/4 - \delta^2.$$

On a $\sup_{n\geqslant 1}|\alpha_n^{2t_k} - \alpha_n^{t_k}| \leqslant 1/4 - \delta^2 < 1/4$ donc $\liminf_{t\to 0^+}\|a^{2t} - a^t\| < 1/4$ où $a^t = (\alpha_n^t)_{n\geqslant 1}$ est un semi-groupe dans l'algèbre c_0.

La sous-algèbre $A = \overline{\mathrm{Sp}(a^t)}$ de c_0 n'est pas unitaire car toute sous-algèbre unitaire de c_0 est de dimension finie.

On note $\mathbf{C}_0[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes sans termes constants.

PROPOSITION 2. *Soit T une contraction sur un espace de Banach, et soit* $A = \overline{\{P(1 - T)\}}_{P\in \mathbf{C}_0[X]}$ *l'algèbre engendrée par $(1 - T)$. Pour tout $r > 0$, on pose*

$$(1 - T)^r = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}(-T)^n;$$

on a alors:

i) $(1 - T)^r$ *est bien définie et appartient à A;*

ii) *l'ensemble* $((1 - T)^r)_{r>0}$ *est un semi-groupe continu dans A.*

Preuve. Posons $\alpha_{n,r} = \dfrac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}$ pour $n > 0$, $r > 0$. On a

$$\alpha_{n,r+r'} = \sum_{p=0}^{n} \alpha_{p,r} \cdot \alpha_{n-p,r'}. \tag{1}$$

Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{n,r}| < +\infty$ pour $0 < r < 1$ il résulte du théorème sur le produit des séries absolument convergentes que $\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{n,r}| < +\infty$ pour tout $r > 0$. Donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{n,r}(-T)^n$ converge pour tout $r > 0$, et il résulte de (1) que $(1-T)^{r+r'} = (1-T)^r(1-T)^{r'}$ pour $r > 0$, $r' > 0$.

Vérifions que $(1-T)^r \in A$.

Posons $Q_m(x) = 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}(-x)^n$. Alors:

$$Q_m(1) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}(-1)^n -$$

$$- \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}(-1)^n =$$

$$= - \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}(-1)^n.$$

Donc $\lim_{m\to+\infty} Q_m(1) = 0$.

Posons $P_m(x) = Q_m(x) + \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}(-1)^n$. $P_m(1) = 0$ pour tout m, donc $P_m(T) \in A$. On a $\lim_{m\to\infty} P_m(T) = \lim_{m\to\infty} Q_m(T) - \lim_{m\to+\infty} Q_m(1) = (1-T)^r$ d'où $(1-T)^r \in A$ car A est fermée.

Soit $r \in [a, b] \subset]0, 1[$. Alors:

$$\left|\frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}\right| = \frac{r(1-r)\dots(n-r-1)}{n!} \leqslant \frac{r(1-a)\dots(n-1-a)}{n!} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1-a)(2-a)\dots(n-1-a)}{n!} = \frac{1}{a}\left[\frac{a(1-a)\dots(n-1-a)}{n!}\right].$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(1-a)\dots(n-1-a)}{n!}$ est convergente, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}(-T)^n$ est normalement convergente sur tout compact de $]0, 1[$ donc $(1-T)^r$ est continue sur $]0, 1[$, ce qui implique la continuité sur $]0, +\infty[$ car on a un semi-groupe. $((1-T)^r)_{r>0}$ est donc un semi-groupe continu dans A.

THÉORÈME 2. *Soit T une contraction sur un espace de Banach E, et soit $A = [\mathrm{Sp}(1-T)^n_{n\geqslant 1}]^-$ l'algèbre engendrée par $(1-T)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

i) $\limsup\limits_{t\to 0^+} \|(1-T)^{2t} - (1-T)^t\| < 1/4$;

ii) $\limsup\limits_{t\to 0^+} \|(1-T)^{2t} - (1-T)^t\| = 0$;

iii) *A est unitaire;*

iv) *$I_m(1-T)$ est fermée;*

v) $I_m(1-T) = I_m(1-T)^2$;

vi) $(1-T) = (1-T)^2 v$ *avec* $v \in A$;

vii) $(1-T) = (1-T)^2 U$ *avec* $U \in L(E)$.

Preuve. Soit $F = A \cdot E = \{y = fx \,|\, f \in A \text{ et } x \in E\}$. Alors on a:

1) $I_m(f) \subset F$, pour $f \in A$.

2) $\mathrm{Ker}(1-T) \subset \ker(f)$, pour $f \in A$.

3) $F \cap \mathrm{Ker}(1-T) = \{0\}$.

4) $F = [I_m(1-T)]^-$.

(1) et (2) résultent immédiatement de la définition de A.

Soit $x \in F \cap \mathrm{Ker}(1-T)$. Il existe $f \in A$, et $y \in E$ tel que $x = fy = (\lim\limits_{m\to+\infty} (1-T)^{1/m} \cdot f)y$ d'après le théorème 1(i). Donc $x = \lim\limits_{m\to+\infty} (1-T)^{1/m} x = 0$ d'après (2), et on a la propriété (3).

Soit $y \in F$; il existe $x \in E$, et $f \in A$ tel que $y = fx$. On a $y = (\lim\limits_{n\to+\infty} (1-T)u_n)x = \lim\limits_{n\to+\infty} ((1-T)(u_n x)) \in [I_m(1-T)]^-$. On a donc (4) d'après le théorème de factorisation [3] qui implique que F est fermée, car $[I_m(I-T)]^- \subset [F]^-$. Supposons que l'algèbre A est unitaire, et soit g l'unité de A. On a d'après le théorème 1, $g = \lim\limits_{n\to\infty} (1-T)^{1/n}$, donc pour n assez grand $(1-T)^{1/n}$ est inversible et par suite $1-T$ est inversible. Soit h l'inverse de $(1-T)$; $(1-T)h = g$ d'où $I_m(g) \subset I_m(1-T)$, et comme $g(1-T) = 1-T$, on a $I_m(1-T) \subset I_m(g)$ donc $I_m(1-T) = I_m(g)$.

Comme g est un idempotent, $I_m(1-T)$ est fermée. D'autre part $(1-T)^2 h = (1-T)g = 1-T$ donc iii) implique iv) et vi).

Supposons $I_m(1-T)$ fermée. Alors $I_m(1-T) = F$, et d'après le théorème de factorisation [3], on a $F = AF$. Par suite on a: $(1-T)F = (1-T)(AE) = A((1-T)E) = AF = F$ d'où $(1-T)^2 F = (1-T)F = F = I_m(1-T)$ donc $I_m(1-T) = I_m(1-T)^2$, et (iv) implique (v).

Supposons que $I_m(1-T) = I_m(1-T)^2$. Alors on a d'après une propriété algébrique élémentaire bien connue $E = I_m(1-T) + \mathrm{Ker}(1-T)$; on a alors:

(5) $I_m(1-T) = F$. En effet soit $y \in F \subset E$, $y = y_1 + y_2$ où $y_1 \in I_m(1-T)$, $y_2 \in \mathrm{Ker}(1-T)$. Comme $y_1 \in I_m(1-T) \subset F$ alors $y - y_1 \in F \cap \mathrm{Ker}(1-T) = \{0\}$ donc $I_m(1-T) = F$; par suite $E = I_m(1-T) \oplus \mathrm{Ker}(1-T)$, et d'après le théorème de factorisation, $I_m(1-T) = F$ est fermée.

Soit g la projection de E sur F parallèlement à Ker $(1 - T)$: alors pour tout $f \in A$, pour tout $x \in \mathrm{Ker}(1 - T)$, et pour tout $y \in I_m(1 - T) = F$

$$(fg)(x + y) = f[g(x + y)] = f(y)$$

$$(gf)(x + y) = f(x + y) = f(y).$$

On obtient $gf = fg = f$ pour tout $f \in A$.

Considérons l'application $(1 - T)|F: F \to F$; comme $\mathrm{Ker}(1 - T) \cap I_m(1 - T) = \{0\}$ et comme $F = I_m(1 - T) = I_m(1 - T)^2 = (1 - T)F$, $(1 - T)|F$ est bijective; donc il existe $s \in L(F)$ tel que $(1 - T)s = 1_F$. Comme $(1 - T)sg = g$, $g = \lim_{n \to \infty} (1 - T)^{1/n} \cdot g = \lim_{n \to \infty} (1 - T)^{1/n} \in A$, l'algèbre A est unitaire. Donc (v) implique (iii), et (iii), (iv), (v) sont équivalents.

Trivialement vi) implique vii), et vii) implique v).

Les conditions de (iii) à (vii) sont donc équivalentes, et le fait que (i), (ii) et iii) sont équivalentes résulte du théorème 1.

BIBLIOGRAPHIE

1. Esterle, J., Quasimultipliers, representations of H^∞, and the closed ideal problem for commutative Banach algebras, in *Proceedings of the Long Beach Conference on radical Banach algebras and automatic continuity* (1981), Lectures Notes in Mathematics, 975, Springer-Verlag, pp. 65–162.
2. Berkani, M.; Esterle, J., Banach algebras with left sequential approximate identities close to their square, in *Operators in indefinite metric spaces, scattering theory and other topics*, Birkhäuser Verlag, 1987, pp. 29–40.
3 Hewitt, E.; Ross, K., *Abstract harmonic analysis. II*, Springer-Verlag, Berlin – New-York, 1970.
4 Zemanek, J., Idempotents in Banach algebras, *Bull. London Math. Soc.*, 11(1979), 177–183.

A. MOKHTARI
UER de Mathématiques et Informatique,
Université de Bordeaux I,
351, cours de la libération,
33405 Talence,
France.

Received March 24, 1988.