

RÉSOLVANT GÉNÉRALISÉ ET THÉORIE SPECTRALE

MOSTAFA MBEKHTA

INTRODUCTION

Ce travail est la suite naturelle des précédents travaux [16], [17, § 2] d'une part, et d'autre part il est destiné à fournir les démonstrations des résultats annoncés dans [19].

Il est bien connu que si A est un opérateur fermé de domaine $D(A)$ et d'image $R(A)$ dans un Hilbert H , alors:

$$(1) \quad \lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow (A - \lambda I) \text{ est inversible,}$$

où encore

$$(2) \quad \lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow N(A - \lambda I) = \{0\} \text{ et } R(A - \lambda I) = H,$$

où $\rho(A)$ et $N(A - \lambda I)$, désignent respectivement l'ensemble résolvant de A et le noyau de $A - \lambda I$. Notons que $R(A, \lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ l'opérateur résolvant (ou la résolvante) de A au point λ est analytique dans l'ouvert $\rho(A)$.

Par ailleurs F. V. Atkinson, [4] a développé la notion d'inverse relatif (ou inverse généralisé); voir aussi [2], [3], [5], [20] (dans ce dernier on trouve une importante bibliographie, ainsi que certaines applications de l'inverse généralisé dans d'autres domaines). Ceci nous amène à définir l'opérateur résolvant généralisé.

Soit $\mathcal{U}$ une partie de $\mathbb{C}$, on dira que A admet un opérateur résolvant généralisé $Rg(A, \lambda)$ dans $\mathcal{U}$ si $\forall \lambda \in \mathcal{U}$, $Rg(A, \lambda)$ est un opérateur borné de H dans $D(A)$ tel que:

$$(A - \lambda I)Rg(A, \lambda)(A - \lambda I) = (A - \lambda I)$$

$$Rg(A, \lambda)(A - \lambda I)Rg(A, \lambda) = Rg(A, \lambda).$$

Il est clair que la notion d'inverse joue un rôle essentiel dans la théorie spectrale.

D'où la question qui nous motive:

Peut-on élaborer une théorie spectrale généralisée, où la notion d'inverse est remplacée par celle d'inverse généralisé?

Une première idée, est de remplacer brutalement la condition " $A - \lambda I$ inversible" par la condition " A admet un résolvant généralisé en λ ". Donc par définition:

$$(1') \quad \lambda \in \rho_f(A) \Leftrightarrow A \text{ admet un résolvant généralisé en } \lambda.$$

Ce qui est équivalent (dans un Hilbert) à:

$$(2') \quad \lambda \in \rho_f(A) \Leftrightarrow R(A - \lambda I) \text{ fermé dans } H.$$

On trouve cette définition (sous la forme (2')) dans Goldberg, [11, Définition VI.7.1].

Remarquons quelques inconvénients de cette définition.

Notons d'abord $\sigma_f(A) = \mathbb{C} \setminus \rho_f(A)$.

(i) $\sigma_f(A)$ peut-être vide, même si A est borné. Par exemple $A = 0$.

(ii) $\sigma_f(A)$ peut ne pas être fermé. Car il existe (voir [6]) un opérateur A avec image fermée et tel que si $0 < |\lambda| \leq 1$ alors $R(A - \lambda I)$ n'est pas fermé.

(iii) Le théorème de l'application spectrale n'est pas vérifié pour $\sigma_f(A)$. Par exemple: soit le polynôme $P(\lambda) = \lambda^2$, $H = \ell^2$ et A définit par

$$A(x_1, x_2, \dots) = \left(0, x_1, 0, \frac{x_3}{3}, 0, \frac{x_5}{5}, \dots \right).$$

Alors $R(A)$ n'est pas fermé par contre $A^2 = 0$ a une image fermée. Donc

$$0 \notin \sigma_f(P(A)) \text{ et } 0 \in P(\sigma_f(A)) \text{ ou encore } P(\sigma_f(A)) \not\subset \sigma_f(P(A)).$$

Il existe T (voir [6]) tel que T a une image fermée et T^2 n'a pas d'image fermée.

Donc $0 \in \sigma_f(P(T))$ et $0 \notin P(\sigma_f(T))$ ou encore $\sigma_f(P(T)) \not\subset P(\sigma_f(T))$.

(iv) $\sigma_f(A)$ n'est pas stable si on perturbe A par des opérateurs nilpotents commutant avec A . Exemple $A = 0$ et N l'opérateur nilpotent défini dans (iii).

Alors $0 \in \sigma_f(A + N)$ par contre $0 \notin \sigma_f(A)$.

Une deuxième idée (celle que nous adoptons ici) est de prendre en considération l'analyticité de $R(A, \lambda)$. Nous appelons *ensemble résolvant généralisé* (ou *ensemble régulier*) de A , qu'on note $\text{reg}(A)$, l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par:

$$(1'') \quad \lambda \in \text{reg}(A) \Leftrightarrow A \text{ admet un résolvant généralisé analytique dans un voisinage } \mathcal{U} \text{ de } \lambda.$$

Le théorème 2.6 de [17] montre que:

$$(2'') \quad \begin{aligned} \lambda \in \text{reg}(A) &\Leftrightarrow R(A - \lambda I) \text{ est fermé et} \\ \forall n \geq 0, N(A - \lambda I)^n &\subseteq R(A - \lambda I). \end{aligned}$$

Notons $\sigma_g(A) = \mathbb{C} \setminus \text{reg}(A)$ le *spectre généralisé* de A , qui est fermé comme complémentaire d'un ouvert ($\text{reg}(A)$) dans $\mathbb{C}$.

Dans le paragraphe 1 on trouve un rappel de résultats sur $\text{reg}(A)$, notamment celui-ci

“ $\text{reg}(A) = \rho(A)$ si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée:

(a) $\dim(H) < \infty$;

(b) A est *décomposable* (classe d'opérateurs qui contient, les *normaux*, les *spectraux* et les *compacts* cf. [7], [23])”.

Le paragraphe 2 est consacré à l'étude de l'ensemble *résolvant généralisé* ($\text{reg}(A)$); le théorème 2.1 en donne plusieurs caractérisations. Le corollaire 2.2 montre que $\sigma_g(A)$ contient la frontière du *spectre* de A ($\sigma(A)$); ceci implique d'une part que si A est borné alors le *spectre généralisé* de A est non vide et d'autre part que si A est fermé tel que $\sigma_g(A)$ est au plus dénombrable alors $\sigma(A)$ est égale à $\sigma_g(A)$; donc $\sigma(A)$ est aussi au plus dénombrable (voir le corollaire 2.5). Nous remarquons que la différence entre $\sigma_g(A)$ et $\sigma_f(A)$ (défini plus haut) est au plus dénombrable; d'où on en déduit que si $\sigma_f(A)$ est dénombrable alors $\sigma(A) = \sigma_g(A)$.

Par ailleurs, nous obtenons des résultats analogues à la *théorie spectrale classique*, notamment sur certaines perturbations de $\sigma_g(A)$ (voir le théorème 4.6). Et nous montrons que si A est borné et si on le perturbe par un opérateur *quasi-nilpotent* commutant avec A alors le *spectre généralisé* de A reste stable (cf. le théorème 4.8).

Nous montrons aussi que le *théorème de l'application spectrale* reste vrai; plus précisément:

— si A est fermé avec $\rho(A) \neq \emptyset$ et P un polynôme dans $\mathbb{C}$ alors

$$P(\sigma_g(A)) = \sigma_g(P(A)).$$

— si A est borné et f une fonction analytique au voisinage $\sigma(A)$ alors

$$f(\sigma_g(A)) = \sigma_g(f(A)).$$

Finalement, notons $c(A)$ la *conorme* de A , définie par:

$$c(A) = \inf\{\|Au\|; u \in D(A) \cap N(A)^\perp \text{ et } \|u\| = 1\} \quad (\text{cf. [11], [13]}).$$

Le corollaire 2.4 implique que $\sigma_g(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lim_{\mu \rightarrow \lambda} c(A - \mu I) = 0\} = \sigma_i(A)$, partie de $\mathbb{C}$ associée à A étudié par Apostol [1].

En général $\lim_{n \rightarrow \infty} [c(A^n)]^{1/n}$ n'existe pas (voir [1], [9]). Cependant nous montrons que :

$$- \text{ si } \lambda \notin \sigma_g(A) \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} [c(A - \lambda I)^n]^{1/n} = d(\lambda, \sigma_g(A))$$

où $d(\lambda, \sigma_g(A))$ est la distance de λ à $\sigma_g(A)$ (voir le théorème 3.1).

Dans le cas où $A - \lambda I$ est *quasi-Fredholm* (classe d'opérateurs qui contient comme cas particulier les *semi-Fredholm* [14]), on montre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [c(A - \lambda I)^n]^{1/n} = d(\lambda, \sigma_g(A) \setminus \{\lambda\}).$$

Ce résultat est une généralisation de [9, Corollary 6]. Le paragraphe 3 est consacré à la démonstration de ces derniers résultats.

La dernière partie de ce travail, le paragraphe 6, contient essentiellement les deux résultats suivants: Si on note $\text{Reg}(H) = \{A \text{ borné ; } 0 \in \text{reg}(A)\}$ alors $\text{Reg}(H)$ est une réunion dénombrable de fermés et son intérieur est égal à l'ensemble des opérateurs qui sont soit surjectifs soit injectifs à image fermée (cf. le corollaire 6.4 et le théorème 6.5). Nous concluons que $\text{Reg}(H)$ est dense dans H .

Je profite de cette introduction pour remercier M. Akkar et J. P. Labrousse pour tous les conseils et discussions fructueux qui m'ont permis d'élaborer ce travail.

1. PRÉLIMINAIRES

Soit H un espace de Hilbert et A un opérateur fermé de domaine $D(A) \subseteq H$. Notons $N(A)$, $\sigma(A)$ et $\rho(A)$ respectivement le *noyau*, le *spectre* et l'*ensemble résolvant* de A . Par $B(H)$ nous notons l'ensemble de tous les opérateurs bornés dans H .

$c(A)$ désigne la *conorme* de A , définie par

$$c(A) := \inf \{ \|Au\| ; u \in D(A) \cap N(A)^\perp \text{ et } \|u\| = 1 \}$$

$$(c(A) = \infty \Leftrightarrow A = 0).$$

PROPOSITION 1.1. (cf. [11]; [13]). Si A est fermé, alors :

(1) $R(A)$ fermé $\Leftrightarrow c(A) > 0$.

(2) Si $D(A)$ est dense dans H alors $c(A) = c(A^*)$.

DÉFINITION 1.2. Soit $\mathcal{U}$ une partie de $\mathbb{C}$, on dira que A admet un opérateur *résolvant généralisé* $\text{Rg}(A, \lambda)$ dans $\mathcal{U}$ si $\forall \lambda \in \mathcal{U}$, $\text{Rg}(A, \lambda)$ est un opérateur borné de H dans $D(A)$ tel que

$$(A - \lambda I)\text{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I) = (A - \lambda I)$$

$$\text{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I)\text{Rg}(A, \lambda) = \text{Rg}(A, \lambda).$$

REMARQUES. (1) $\text{Rg}(A, \lambda)$ est appelé *résolvant généralisé* (ou *inverse généralisé* [4], [20]) de A au point λ . En général, $\text{Rg}(A, \lambda)$ n'est pas unique. Si toutefois $\lambda \in \rho(A)$ alors $\text{Rg}(A, \lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ l'opérateur *résolvant* habituel.

(2) Si on note $P_\lambda = (A - \lambda I)\text{Rg}(A, \lambda)$ et $Q_\lambda = \text{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I)$, alors P_λ et Q_λ sont des projections telles que $R(P_\lambda) = R(A - \lambda I)$ et $N(Q_\lambda) = N(A - \lambda I)$.

DÉFINITION 1.3. Soit A un opérateur fermé. Notons $\text{reg}(A)$ l'ensemble *résolvant généralisé* (ou l'ensemble *régulier*) de A défini par:

$$\text{reg}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; A \text{ admette un résolvant généralisé analytique dans un voisinage } \mathcal{U} \text{ de } \lambda\}.$$

$\sigma_g(A) = \mathbb{C} \setminus \text{reg}(A)$ sera appelé le *spectre généralisé* de A .

REMARQUES. (1) $\text{reg}(A)$ est ouvert dans $\mathbb{C}$.

(2) $\rho(A) \subseteq \text{reg}(A) \subseteq \rho(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_p(A)$ où $\sigma_r(A)$ et $\sigma_p(A)$ sont respectivement le *spectre résiduel* et le *spectre ponctuel* de A .

DÉFINITION 1.4. Soit A un opérateur fermé, alors A est dit *régulier* si $R(A)$ fermé et $\forall n \geq 0 \ N(A^n) \subseteq R(A)$.

EXEMPLES. (1) A inversible à droite ou inversible à gauche.

(2) A est un opérateur de Goldman-Krashkowsky [12].

(3) A est un opérateur de Kato (cf. [13]) c'est-à-dire tel que $v(A; I) = \infty$ (notation de Kato) et que $R(A)$ fermé. Alors $v(A; I) = \infty \Leftrightarrow \forall n > 0, N(A^n) \subseteq R(A)$.

(4) A est un opérateur de Saphar (cf. [22]), c'est-à-dire en utilisant les termes de Saphar, tel que A soit *parfait* et *régulier*.

(5) A est un opérateur de Labrousse (cf. [14]), c'est-à-dire en utilisant les notations de Labrousse $A \in q\Phi(0)$ (A est *quasi-Fredholm de degré zéro*).

THÉOREME 1.5. (cf. [16]; [17]). Soit A un opérateur fermé, alors:

(i) $\lambda \in \text{reg}(A) \Leftrightarrow A - \lambda I$ est *régulier*;

(ii) si $D(A)$ est dense dans H alors

$$\text{reg}(A^*) = \overline{\text{reg}(A)};$$

(iii) $\text{reg}(A) = \rho(A)$ si l'une des conditions suivantes est vérifiée:

(a) $\dim H < \infty$,

(b) A est *décomposable*.

COROLLAIRE 1.6. Si A est *décomposable* et *semi-Fredholm*, alors A est *Fredholm*.

Démonstration. A semi-Fredholm $\Rightarrow \exists \mathcal{U}$ voisinage de zéro tel que $\forall \lambda \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$, $A - \lambda I$ est régulier (voir [14], Proposition 4.3.1a)). D'après le théorème 1.5(iii), on en déduit que $A - \lambda I$ est inversible $\forall \lambda \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$ et par la continuité de l'indice, on conclut que A est Fredholm. $\square$

PROPOSITION 1.7. Soit $A \in B(H)$ régulier, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) $\exists B \in B(H)$ résolvant généralisé de A en zéro commutant avec A ;
- (b) A est inversible.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b): Soit $u \in H$ alors $u = (I - BA)u + BAu = (I - BA)u + ABu$ or $(I - BA)u \in N(A) \subseteq R(A)$ et $ABu \in R(A)$ donc $H \subseteq R(A) \Rightarrow A$ est surjectif. Par symétric avec l'adjoint, on en déduit que $R(A^*) = H \Rightarrow N(A) = \{0\}$ donc A est inversible.

(b) $\Rightarrow$ (a): on prend $B = A^{-1}$. $\square$

DÉFINITION 1.8. (cf. [22]). Soit A un opérateur fermé; on appelle *cœur* de A , qu'on note $\text{Co}(A)$, le plus grand sous-espace M de H tel que $A(M \cap D(A)) = M$.

PROPOSITION 1.9. (cf. [16], [17]). Soit A un opérateur fermé; alors on a:

- (a) A régulier $\Rightarrow \text{Co}(A) = \bigcap_{n \geq 0} R(A^n)$ est fermé dans H ;
- (b) Si $\{\lambda_j\}$ est une suite de points tous distincts de la composante connexe de $\text{reg}(A)$ contenant zéro et convergent vers zéro, alors $\text{Co}(A) = \bigcap_{j \geq 0} R(A - \lambda_j I)$;
- (c) Si A est régulier avec $D(A)$ dense dans H alors

$$H_0(A)^\perp = \text{Co}(A^*)$$

où

$$H_0(A) = \{u \in D^\infty(A); \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n u\|^{1/n} = 0\};$$

- (d) Si A est régulier alors $\overline{H_0(A)} = \bigcup_{n \geq 0} N(\overline{A^n}) \subseteq \text{Co}(A)$;

- (e) Si A est régulier et $H_0(A)$ est fermé, alors $H_0(A) = \{0\}$;

- (f) Si on note $\text{Reg}(H)$ l'ensemble des opérateurs réguliers et qN l'ensemble des opérateurs quasi-nilpotents, alors:

$$\text{Reg}(H) \cap \text{qN} = \emptyset.$$

Si M est un sous-espace fermé de H , notons P_M la projection orthogonale sur M .

PROPOSITION 1.10. Soient M, N deux sous-espaces fermés de H et P, Q deux projections quelconques sur M et N respectivement, alors:

$$\|P_M - P_N\| \leq \|P - Q\|.$$

Démonstration. On a $PP_M = P_M$, $P_MP = P$ et $QP_N = P_N$, $P_NQ = Q$ d'où

$$(I - P)(P_M - P_N) = PP_N - P_N = (P - Q)P_N,$$

$$(P_M - P_N)P = P - P_NP = (I - P_N)(P - Q),$$

et par conséquent, $P^*(P_M - P_N) = (P^* - Q^*)(I - P_N)$.

Soit maintenant $u \in H$, alors :

$$\begin{aligned} \|u\|^2 + \|(P - P^*)u\|^2 &= \|u\|^2 - (Pu, P^*u) - (P^*u, Pu) + \|Pu\|^2 + \|P^*u\|^2 = \\ &= \|u\|^2 - (Pu, u) - (u, Pu) + \|Pu\|^2 + \|P^*u\|^2 = \\ &= \|(I - P)u\|^2 + \|P^*u\|^2. \end{aligned}$$

Donc si $u = (P_M - P_N)v$, v quelconque de H on a :

$$\begin{aligned} \|(P_M - P_N)v\|^2 + \|(P - P^*)(P_M - P_N)v\|^2 &= \\ = \|(P - Q)P_Nv\|^2 + \|(P^* - Q^*)(I - P_N)v\|^2 &\leq \\ \leq \|P - Q\|^2(\|P_Nv\|^2 + \|(I - P_N)v\|^2) &= \\ = \|P - Q\|^2\|v\|^2 \end{aligned}$$

d'où $\|P_M - P_N\| \leq \|P - Q\|$. ▣

COROLLAIRE 1.11. Soit A un opérateur fermé. Alors

- (a) L'application $\lambda \mapsto P_{N(A - \lambda I)}$ est continue de $\text{reg}(A)$ dans $B(H)$;
- (b) L'application $\lambda \mapsto P_{R(A - \lambda I)}$ est continue de $\text{reg}(A)$ dans $B(H)$.

Démonstration. (a) Soit $\mu \in \text{reg}(A)$, $\text{reg}(A)$ étant ouvert, alors il existe $\mathcal{U}$ voisinage de μ dans $\mathbb{C}$ tel que $\forall \lambda \in \mathcal{U}$, $\lambda \in \text{reg}(A)$. D'après la remarque (2) qui suit la définition 1.2, on a $\forall \lambda \in \mathcal{U}$, $I - Q_\lambda$ est une projection sur $N(A - \lambda I)$. De la proposition précédente on en déduit que si $\lambda \in \mathcal{U}$ alors

$$\|P_{N(A - \lambda I)} - P_{N(A - \mu I)}\| \leq \|(I - Q_\lambda) - (I - Q_\mu)\| = \|Q_\mu - Q_\lambda\|.$$

De cette inégalité et du fait que Q_λ est analytique dans $\text{reg}(A)$, on en déduit (a).

Pour démontrer (b) il suffit de remplacer $(I - Q_\lambda)$ par P_λ dans la démonstration de (a) et remarquer que P_λ est une projection sur $R(A - \lambda I)$, analytique dans $\text{reg}(A)$. ▣

2. CARACTÉRISATIONS DU SPECTRE GÉNÉRALISÉ

Soit $G \subseteq \mathbb{C}$ et $\{M_\lambda\}_{\lambda \in G}$ est une famille de sous-espaces de H (indexée par G) alors $\text{c.l.m.}\{M_\lambda\}_{\lambda \in G}$ désigne l'adhérence du sous-espace engendré par $\{M_\lambda\}_{\lambda \in G}$.

THÉOREME 2.1. *Soit A un opérateur fermé et $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (I) $\lambda_0 \in \text{reg}(A)$.
- (II) $R(A - \lambda_0 I)$ fermé dans H et l'application $\lambda \mapsto \text{Co}(A - \lambda I)$ est constante dans un voisinage de λ_0 .
- (III) $R(A - \lambda_0 I)$ fermé dans H et $\exists \lambda \neq \lambda_0$ tel que $\text{Co}(A - \lambda I) = \text{Co}(A - \lambda_0 I)$.
- (IV) $R(A - \lambda_0 I)$ fermé dans H et l'application $\lambda \mapsto P_{R(A - \lambda I)}$ est continue en λ_0 .
- (V) $R(A - \lambda_0 I)$ fermé dans H et l'application $\lambda \mapsto P_{N(A - \lambda I)}$ est continue en λ_0 .
- (VI) $R(A - \lambda_0 I)$ fermé dans H et l'application $\lambda \mapsto c(A - \lambda I)$ est continue en λ_0 .
- (VII) $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} c(A - \lambda I) > 0$.
- (VIII) $\lambda_0 \in \bigcup_{\gamma > 0} R(\gamma)'$ où $R(\gamma)'$ est l'ensemble dérivé de $R(\gamma) = \{\lambda \in \mathbb{C} ; c(A - \lambda I) \geq \gamma\}$ (cf. [15]).
- (IX) $A - \lambda_0 I \in \text{q}\Phi$ (cf. [14]) et $N(A - \lambda_0 I) \subseteq \text{c.l.m.}\{N(A - \lambda I)\}_{\lambda \neq \lambda_0}$.
- (X) $A - \lambda_0 I \in \text{P}\Phi$ (cf. [18]) et $\bigcap_{\lambda \in \text{reg}(A)} \text{Co}(A - \lambda I) \subseteq \text{Co}(A - \lambda_0 I)$.

La démonstration du théorème 2.1 sera décomposée en plusieurs propositions qui vont suivre. Mais tout d'abord quelques corollaires.

COROLLAIRE 2.2. *Soit A un opérateur fermé et $\partial\sigma(A)$ dénote la frontière de $\sigma(A)$. Alors :*

$$\partial\sigma(A) \subseteq \sigma_g(A).$$

Démonstration. Montrons que $\partial\sigma(A) \cap \text{reg}(A) = \emptyset$; pour cela soit $\mu \in \partial\sigma(A) \cap \text{reg}(A)$, d'après le théorème 2.1 (V) et (IV) on a, d'une part

$$P_{N(A - \mu I)} = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow \mu \\ \lambda \in \rho(A)}} P_{N(A - \lambda I)} = 0 \Rightarrow N(A - \mu I) = \{0\}.$$

Et d'autre part:

$$P_{R(A - \mu I)} = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow \mu \\ \lambda \in \rho(A)}} P_{R(A - \lambda I)} = I \Rightarrow R(A - \mu I) = H.$$

Donc $\mu \in \rho(A)$ d'où la contradiction car $\partial\sigma(A) \subseteq \sigma(A)$. ▣

COROLLAIRE 2.3. *Soit A un opérateur fermé à domaine dense dans H et G une composante connexe de $\text{reg}(A)$. Alors :*

$$G \cap \rho(A) \neq \emptyset \Rightarrow G \subseteq \rho(A).$$

Démonstration. Soit $\lambda \in G \cap \rho(A)$, on a en particulier $A - \lambda I$ est surjectif donc $\text{Co}(A - \lambda I) = H$, d'après le théorème 2.1 (II) on en déduit que $\forall \lambda \in G$ $\text{Co}(A - \lambda I) = H$ donc $\forall \lambda \in G$, $A - \lambda I$ est surjectif. Par symétrie avec l'adjoint (le théorème 1.5 (ii)), on en déduit que $\forall \lambda \in G$, $A^* - \bar{\lambda}I$ est surjectif donc $\forall \lambda \in G$, $N(A - \lambda I) = \{0\}$ par conséquent $G \subseteq \rho(A)$. $\square$

COROLLAIRE 2.4. Soit A un opérateur fermé, alors

$$\sigma_g(A) = \{\mu \in \mathbb{C} ; \lim_{\lambda \rightarrow \mu} c(A - \lambda I) = 0\}.$$

Démonstration. Se déduit du théorème 2.1 (VII) et du fait que $\lim_{\lambda \rightarrow \mu} c(A - \lambda I)$ existe toujours, voir le lemme qui suit.

LEMME. Soit A un opérateur fermé. Alors $\forall \mu \in \mathbb{C}$, $\lim_{\lambda \rightarrow \mu} c(A - \lambda I)$ existe.

Démonstration. Si $\mu \in \bigcup_{\gamma > 0} R(\gamma)'$ alors le théorème 2.1 (VI) implique que l'application $\lambda \mapsto c(A - \lambda I)$ est continue en μ . Donc $\lim_{\lambda \rightarrow \mu} c(A - \lambda I)$ existe.

Supposons que $\mu \notin \bigcup_{\gamma > 0} R(\gamma)'$ et montrons que $\lim_{\lambda \rightarrow \mu} c(A - \lambda I) = 0$. En effet supposons le contraire c'est-à-dire $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists \lambda \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |\lambda - \mu| < \delta$ et $c(A - \lambda I) > \varepsilon$ ceci implique qu'il existe une suite $(\lambda_j) \in R(\varepsilon)$ convergente vers μ , ou encore $\mu \in R(\varepsilon)'$ ce qui contredit le fait que $\mu \notin \bigcup_{\gamma > 0} R(\gamma)'$. $\square$

REMARQUE. Le corollaire précédent montre que $\sigma_g(A) = \sigma_p(A)$ partie de $\mathbb{C}$ étudié par Apostol (cf. [1]).

COROLLAIRE 2.5. Soit A un opérateur fermé tel que $\rho(A) \neq \emptyset$ alors

$$\sigma_g(A) \text{ est au plus dénombrable} \Rightarrow \sigma(A) = \sigma_g(A).$$

Démonstration. $\sigma_g(A)$ dénombrable $\Rightarrow \text{reg}(A)$ est connexe, d'autre part $\rho(A) \neq \emptyset \Rightarrow \sigma(A) \neq \mathbb{C}$. Le Corollaire 2.3 implique que $\text{reg}(A) = \rho(A)$ d'où $\sigma(A) = \sigma_g(A)$. $\square$

COROLLAIRE 2.6. $\forall \gamma > 0$, $\sigma_g(A) \cap R(\gamma)$ ne possède aucun point d'accumulation. (En particulier si c'est un ensemble borné il est fini.)

Démonstration. Soit λ_0 un point d'accumulation de $\sigma_g(A) \cap R(\gamma)$. Alors il existe une suite $\{\lambda_n\}$ d'éléments de $\sigma_g(A) \cap R(\gamma)$ convergente vers λ_0 ; donc $\lambda_0 \in R(\gamma)'$ par le théorème 2.1 (VIII) on en déduit que $\lambda_0 \notin \sigma_g(A)$ ce qui contredit le fait que $\sigma_g(A)$ est fermé. $\square$

COROLLAIRE 2.7. Soit $\rho_f(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} ; R(A - \lambda I) \text{ est fermé}\}$ (voir Goldberg [11, Définition VI 7.1]). Alors $\sigma_g(A) \cap \rho_f(A)$ est au plus dénombrable.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\rho_f(A) = \bigcup_{n \geq 1} R(1/n)$ et par conséquent que $\sigma_g(A) \cap \rho_f(A) = \bigcup_{n \geq 1} \sigma_g(A) \cap R(1/n)$ donc c'est une réunion dénombrable d'ensembles qui sont au plus dénombrables d'après le corollaire précédent. $\square$

REMARQUE. Le corollaire précédent montre que $\sigma_g(A) \setminus \sigma_f(A)$ est un ensemble au plus dénombrable. Où $\sigma_f(A) = \mathbb{C} \setminus \rho_f(A)$ (le complément de $\rho_f(A)$ dans $\mathbb{C}$).

COROLLAIRE 2.8. Soit A un opérateur fermé avec $\rho(A) \neq \emptyset$ alors

$$\sigma_f(A) \text{ est dénombrable} \Rightarrow \sigma_g(A) = \sigma(A) \text{ est dénombrable.}$$

Démonstration. En effet $\sigma_f(A) \subseteq \sigma_g(A)$ implique que $\sigma_g(A) = \sigma_f(A) \cup \sigma_g(A) \cap \rho_f(A)$.

Or $\sigma_g(A) \cap \rho_f(A)$ est dénombrable d'après le corollaire 2.7 et comme par hypothèse $\sigma_f(A)$ est dénombrable, on en déduit que $\sigma_g(A)$ est dénombrable et le corollaire 2.5 permet de conclure que $\sigma_g(A) = \sigma(A)$, d'où $\sigma(A)$ est dénombrable. $\square$

COROLLAIRE 2.9.

$$\{\lambda \in \mathbb{C} ; A - \lambda I \in q\Phi(d) \text{ avec } d \geq 1\} \subseteq \sigma_p(A).$$

Démonstration. Se déduit du théorème 2.1 (IX). $\square$

PROPOSITION 2.10. (I), (II) et (III) du théorème 2.1 sont équivalentes.

Démonstration. (I) $\Rightarrow$ (II) voir [16, Proposition 1.4.3].

(II) $\Rightarrow$ (III) évident.

(III) $\Rightarrow$ (I) Remarquons que $\lambda \neq \lambda_0 \Rightarrow (A - \lambda I)(N(A - \lambda_0 I)) = N(A - \lambda_0 I)$ ce qui implique $N(A - \lambda_0 I) \subseteq \text{Co}(A - \lambda I) = \text{Co}(A - \lambda_0 I)$ donc $N(A - \lambda_0 I) \subseteq \text{Co}(A - \lambda_0 I) \subseteq R((A - \lambda_0 I)^n) \forall n \geq 0$ et d'après le théorème 1.5 (i) on en déduit (I).

COROLLAIRE 2.11. Si $D(A)$ est dense dans H , alors les conditions suivantes sont équivalentes:

(I) $\lambda_0 \in \text{reg}(A)$;

(II) $R(A - \lambda_0 I)$ fermé dans H et l'application $\lambda \mapsto \overline{H_0(A - \lambda I)}$ est constante dans un voisinage de λ_0 ;

(III) $R(A - \lambda_0 I)$ fermé dans H et $\exists \lambda \neq \lambda_0$ tel que $\overline{H_0(A - \lambda I)} = \overline{H_0(A - \lambda_0 I)}$.

Démonstration. (I) $\Rightarrow$ (II) Se déduit de la proposition 1.9(c) et (II) du théorème 2.1.

(II) $\Rightarrow$ (III) évident.

(III) $\Rightarrow$ (I) $\lambda \neq \lambda_0 \Rightarrow (A - \lambda_0 I)(H_0(A - \lambda I)) = H_0(A - \lambda I) \Rightarrow H_0(A - \lambda I) \subseteq R(A - \lambda_0 I)$ qui est fermé par hypothèse donc $\overline{H_0(A - \lambda I)} \subseteq R(A - \lambda_0 I)$ et par conséquent $\overline{H_0(A - \lambda_0 I)} \subseteq R(A - \lambda_0 I)$ et donc $\forall n \geq 0 \ N((A - \lambda_0 I)^n) \subseteq R(A - \lambda_0 I)$ d'où le théorème 1.5(i) permet de conclure que $\lambda_0 \in \text{reg}(A)$. $\square$

PROPOSITION 2.12. (I), (V), (VI), (VII) et (VIII) du théorème 2.1 sont équivalents.

Démonstration. (I) $\Rightarrow$ (V) Voir le corollaire 1.11(a).

(V) $\Rightarrow$ (VI) L'application $\lambda \mapsto P_{N(A - \lambda I)}$ est continue en λ_0 , implique $\exists \delta > 0$ tel que $|\lambda - \lambda_0| < \delta \Rightarrow \|P_{N(A - \lambda I)} - P_{N(A - \lambda_0 I)}\| < 1$ d'où les opérateurs $I - (P_{N(A - \lambda I)} - P_{N(A - \lambda_0 I)})$ et $I - (P_{N(A - \lambda_0 I)} - P_{N(A - \lambda I)})$ sont inversibles, par conséquent si $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ alors

$$(1) \quad N(A - \lambda I) + N(A - \lambda_0 I)^\perp = H$$

$$(2) \quad N(A - \lambda_0 I) + N(A - \lambda I)^\perp = H.$$

Soit maintenant $u \in N(A - \lambda_0 I)^\perp \cap D(A)$ alors (2) $\Rightarrow u = v + w$ avec $v \in N(A - \lambda I)^\perp$ et $w \in N(A - \lambda_0 I)$.

Par ailleurs

$$(3) \quad v = u - w \Rightarrow \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 \geq \|u\|^2.$$

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda_0 I)u\| &= \|(A - \lambda_0 I)v\| = \|(A - (\lambda_0 + \lambda - \lambda)I)v\| \geq \\ &\geq \|(A - \lambda I)v\| - |\lambda - \lambda_0| \|v\| \geq \\ &\geq c(A - \lambda I)\|v\| - |\lambda - \lambda_0| \|v\|, \end{aligned}$$

(3) implique d'une part, si $\|u\| \neq 0$ alors $\|v\| \neq 0$ et d'autre part $1/\|u\| \geq 1/\|v\|$ donc

$$\frac{\|(A - \lambda_0 I)u\|}{\|u\|} \geq \frac{\|(A - \lambda_0 I)u\|}{\|v\|} \geq c(A - \lambda I) - |\lambda - \lambda_0 I|$$

par conséquent

$$c(A - \lambda_0 I) \geq c(A - \lambda I) - |\lambda - \lambda_0|$$

ou encore

$$c(A - \lambda I) - c(A - \lambda_0 I) \leq |\lambda - \lambda_0|$$

le même raisonnement en utilisant (I), montre que

$$c(A - \lambda_0 I) - c(A - \lambda I) \leq |\lambda - \lambda_0|$$

d'où

$$|c(A - \lambda I) - c(A - \lambda_0 I)| \leq |\lambda - \lambda_0|$$

donc finalement $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha = \min(\delta, \varepsilon); |\lambda - \lambda_0| < \alpha \Rightarrow |c(A - \lambda I) - c(A - \lambda_0 I)| \leq \varepsilon$, ce qui établit (VI).

(VI) $\Rightarrow$ (VII) évident.

(VII) $\Rightarrow$ (VIII) posons $l = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} c(A - \lambda I) > 0$; par définition de la limite,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; |\lambda - \lambda_0| < \delta \Rightarrow |c(A - \lambda I) - l| < \varepsilon;$$

donc si $\varepsilon = l/2$, on en déduit que $\lambda_0 \in R(l/2)'$ d'où (VIII) est démontré.

(VIII) $\Rightarrow$ (I) se déduit du théorème [15] c) et du théorème 1.5(i). ▣

PROPOSITION 2.13. (I) et (IV) du théorème 2.1 sont équivalents.

Démonstration. (I) $\Rightarrow$ (IV). Voir le corollaire 1.11(b).

(IV) $\Rightarrow$ (I). Remarquons d'abord que $\lambda \neq \lambda_0 \Rightarrow \forall n \geq 0 N(A - \lambda_0 I)^n \subseteq R(A - \lambda I)$. En effet si $u \in N(A - \lambda_0 I)^n$ alors $(A - \lambda_0 I)^n u = 0 \Rightarrow [(A - \lambda I) + (\lambda - \lambda_0)I]^n u = 0$ donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (A - \lambda I)^k (\lambda - \lambda_0)^{n-k} u &= 0 \Rightarrow (\lambda - \lambda_0)^n u = \\ &= - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (A - \lambda I)^k (\lambda - \lambda_0)^{n-k} u \end{aligned}$$

donc si $\lambda \neq \lambda_0$ alors $u \in R(A - \lambda I)$, donc

$$u = P_{R(A - \lambda I)} u = ((P_{R(A - \lambda I)} - P_{R(A - \lambda_0 I)})u) + P_{R(A - \lambda_0 I)} u$$

par la continuité de $\lambda \mapsto P_{R(A - \lambda I)}$ en λ_0 et en faisant tendre λ vers λ_0 on voit que $u = P_{R(A - \lambda_0 I)} u \Rightarrow u \in R(A - \lambda_0 I)$ donc $N(A - \lambda_0 I)^n \subseteq R(A - \lambda_0 I)$ et d'après le théorème 1.5(i), on a $\lambda_0 \in \text{reg}(A)$. ▣

PROPOSITION 2.14. Soit A un opérateur fermé. Alors

$$\text{reg}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; A - \lambda I \in \text{q}\Phi \text{ et } N(A - \lambda I) \subseteq \text{c.l.m.}\{N(A - \mu I)\}_{\lambda \neq \mu}\}.$$

REMARQUE. La proposition 2.14 montre que (I) et (IX) du théorème 2.1 sont équivalents.

Pour la définition des opérateurs *quasi-Fredholm* ($q\Phi$) voir [14].

Démonstration. Le théorème 1.5(i) implique que si $\lambda \in \text{reg}(A)$ alors $A \in q\Phi(0)$. D'autre part le théorème 2.1(V) implique que si $\lambda \in \text{reg}(A)$ alors $N(A - \lambda I) \subseteq \text{c.l.m.}\{N(A - \mu I)\}_{\mu \neq \lambda}$.

Montrons l'inclusion inverse: soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A - \lambda I \in q\Phi$. Alors $\text{Co}(A - \lambda I)$ est fermé, donc $\text{c.l.m.}\{N(A - \mu I)\}_{\lambda \neq \mu} \subseteq \text{Co}(A - \lambda I)$ et par conséquent

$$N(A - \lambda I) \subseteq \text{Co}(A - \lambda I) \subseteq R(A - \lambda I)^n \quad \forall n \geq 0,$$

ce qui implique que $\text{dis}(A) = 0$ donc $A - \lambda I \in q\Phi(0)$ d'où $\lambda \in \text{reg}(A)$. ▣

PROPOSITION 2.15. Soit A un opérateur fermé. Alors

$$\text{reg}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} ; A - \lambda I \in P\Phi \text{ et } \bigcap_{\mu \in \text{reg}(A)} \text{Co}(A - \mu I) \subseteq \text{Co}(A - \lambda I)\}.$$

REMARQUE. 1) Pour la définition des opérateurs *pseudo-Fredholm* ($P\Phi$) voir [18].

2) La proposition précédente montre que (I) et (X) du théorème 2.1 sont équivalents.

Démonstration. " $\subseteq$ " est évidente. Montrons l'inclusion inverse. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A - \lambda I \in P\Phi$ et (M, N) une décomposition de Kato généralisée (D.K.G.) associée à $A - \lambda I$ (cf. [18]). Supposons que $\lambda \notin \text{reg}(A)$ alors $N \neq \{0\}$. $(A - \lambda I)|_N$ étant *quasi-nilpotent*, on a $\forall \mu \neq \lambda, N \subseteq \text{Co}(A - \mu I)$ d'où $N \subseteq \bigcap_{\mu \in \text{reg}(A)} \text{Co}(A - \mu I) \subseteq \text{Co}(A - \lambda I) \subseteq M$, par conséquent $N = \{0\}$ (car $M \cap N = \{0\}$), contradiction donc $\lambda \in \text{reg}(A)$. ▣

PROPOSITION 2.16. (cf. [1, Lemma 1.4]). Soit $A \in B(H)$ alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- (a) $\mu \in \text{reg}(A)$;
- (b) $R(A - \mu I)$ fermé et $N(A - \mu I) \subseteq \text{c.l.m.}\{N(A - \lambda I)\}_{\lambda \neq \mu}$;
- (c) A admet une représentation de la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

où $A_1 - \mu I$ est injectif et $A_2 - \mu I$ est surjectif.

DÉFINITION 2.17. (cf. [5]). Soit $A \in B(H)$, A est dit *essentiellement normal* si $AA^* - A^*A$ est compact.

PROPOSITION 2.18. Soit $A \in B(H)$, essentiellement normal, d'image fermée dans H . Alors

$$\dim(N(A) \cap R(A)) < \infty.$$

Démonstration. Tout d'abord, on a le lemme suivant, dont la démonstration est classique.

LEMME. Soit $A \in B(H)$ alors on a :

(a) $R(A)$ fermé dans $H \Leftrightarrow R(AA^*)$ fermé dans H .

(b) $N(A) = N(A^*A)$ et $N(A^*) = N(AA^*)$.

Démonstration de la proposition 2.18. Supposons que $N(A) \cap R(A)$ est de dimension infinie, alors il existe une suite orthonormée $u_n \in N(A) \cap R(A)$. A essentiellement normal $\Rightarrow AA^* - A^*A = K$ où K est compact, $u_n \in N(A) \Rightarrow Ku_n = AA^*u_n$. $\{u_n\}$ étant bornée et K compact, on en déduit qu'il existe une sous-suite notée encore u_n tel que Ku_n converge. D'après le lemme précédent, on a $R(AA^*)$ fermé et $u_n \in R(A) = N(A^*)^\perp$; en appliquant la définition de la conorme de AA^* , on en tire que u_n converge donc est de Cauchy d'où la contradiction et donc $\dim(N(A) \cap R(A)) < \infty$. $\square$

COROLLAIRE 2.19. Si $A \in B(H)$, essentiellement normal, alors

$$\text{reg}(A) \subseteq \rho_\Phi(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} ; A - \lambda I \text{ est Fredholm}\}.$$

Démonstration. Se déduit de la proposition précédente et du fait que, si $\lambda \in \text{reg}(A)$, alors $R(A - \lambda I)$ est fermé et $N(A - \lambda I) \subseteq R(A - \lambda I)$, donc $\dim N(A - \lambda I) < \infty$. Par symétrie de l'adjoint, on en déduit que $\dim N(A^* - \bar{\lambda}I) < \infty$. $\square$

COROLLAIRE 2.20. Si $A \in B(H)$, essentiellement normal et semi-Fredholm, alors A est Fredholm.

Démonstration. A semi-Fredholm $\Rightarrow \exists \mathcal{U}$ voisinage de zéro dans $\mathbb{C}$ tel que $\forall \lambda \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$ $A - \lambda I$ est régulier, et comme A essentiellement normal $\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C}$, $A - \lambda I$ est essentiellement normal, on en déduit que (le corollaire 2.19) $\forall \lambda \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$, $A - \lambda I$ est Fredholm donc $\text{Ind}(A - \lambda I) < \infty \forall \lambda \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$, la continuité de l'indice permet de conclure que A est Fredholm. $\square$

3. SUR LE RAYON RÉSOUVANT GÉNÉRALISÉ

Dans ce paragraphe, on supposera que A est fermé et $\rho(A) \neq \emptyset$ de sorte que, si P est un polynôme dans $\mathbb{C}$, alors $P(A)$ est un opérateur fermé (voir [8, page 602]).

Si $\lambda_0 \in \text{reg}(A)$, notons

$$\delta(A - \lambda_0 I) = \sup\{\delta > 0 ; \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda - \lambda_0| < \delta \Rightarrow \lambda \in \text{reg}(A)\}$$

$\delta(A - \lambda_0 I)$ est le rayon du plus grand disque de centre λ_0 , contenu dans $\text{reg}(A)$. Ce nombre sera appelé le rayon résolvant généralisé de λ_0 (voir [10, Théorème 3.5]).

Notons aussi que $\delta(A - \lambda_0 I) = d(\lambda_0, \sigma_g(A))$ où $d(\lambda_0, \sigma_g(A))$ est la distance de λ_0 à $\sigma_g(A)$.

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant:

THÉOREME 3.1. *Soit A un opérateur fermé avec $\rho(A) \neq \emptyset$ et $\lambda_0 \in \text{reg}(A)$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} [c(A - \lambda_0 I)^n]^{1/n}$ existe et on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [c(A - \lambda_0 I)^n]^{1/n} = d(\lambda_0, \sigma_g(A)).$$

REMARQUES. (1) Ce théorème est démontré dans [9] dans le cas des opérateurs de Fredholm.

(2) Theorem 3.5 de [10] est un cas particulier du théorème 3.1.

Pour la démonstration du théorème 3.1 on aura besoin de quelques résultats préliminaires et on supposera que $\lambda_0 = 0$.

LEMME 3.2. *Soit A un opérateur fermé, $0 \in \text{reg}(A)$ et $c = c(A) > 0$. Alors*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| < c \Rightarrow \lambda \in \text{reg}(A).$$

Démonstration. (cf. [14, Proposition 4.1.2a)).

LEMME 3.3. *Soit A un opérateur fermé et $\rho(A) \neq \emptyset$. Alors*

$$0 \in \text{reg}(A) \Rightarrow c(A^n) \geq [c(A)]^n \quad \forall n \geq 1.$$

Démonstration. Par induction sur n . Pour $n = 1$ c'est évident. Supposons que c'est vrai à l'ordre n . Soit $u \in D(A^{n+1}) \cap N(A^{n+1})^\perp$; par ailleurs A fermé et $\rho(A) \neq \emptyset \Rightarrow A^n$ est fermé donc $N(A^n)$ est fermé et par conséquent $H = N(A^n) \oplus N(A^n)^\perp$ donc $Au = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in N(A^n)$ et $u_2 \in N(A^n)^\perp$, $Au \in D(A^n)$ et $u_1 \in D(A^n)$ impliquent que $u_2 \in D(A^n)$. D'autre part $0 \in \text{reg}(A) \Rightarrow A$ régulier $\Rightarrow N(A^n) \subseteq R(A)$, donc $Au = u_1 + u_2 \Rightarrow u_2 \in R(A) \Rightarrow \exists v_2 \in D(A) \cap N(A)^\perp$ tel que $u_2 = Av_2$ donc $Au = u_1 + Av_2 \Rightarrow A^{n+1}u = A^{n+1}v_2 \Rightarrow u - v_2 \in N(A^{n+1})$ donc $\exists w \in N(A^{n+1})$ tel que $u - v_2 = w \Rightarrow v_2 = u - w$, or $u \perp w$ donc $\|v_2\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 \geq \|u\|^2$. Donc finalement

$$\begin{aligned} \|A^{n+1}u\| &= \|A^n(Av_2)\| \geq c(A^n)\|Av_2\| \geq [c(A)]^n\|Av_2\| \geq \\ &\geq [c(A)]^n c(A)\|v_2\| \geq [c(A)]^{n+1}\|u\| \end{aligned}$$

d'où

$$\|A^{n+1}u\| \geq [c(A)]^{n+1}\|u\| \quad \text{donc} \quad c(A^{n+1}) \geq [c(A)]^{n+1}. \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE 3.4. *Si A est régulier et $\rho(A) \neq \emptyset$ alors $\forall n \geq 0$, $R(A^n)$ est fermé.*

Démonstration. On utilise le lemme 3.3 et le fait que $c(A^n) > 0 \Rightarrow R(A^n)$ fermé (voir la proposition 1.1). $\square$

LEMME 3.5. $\lambda \in \text{reg}(A)$ alors $c(A - \lambda I) \geq \|Rg(A, \lambda)\|^{-1}$.

Démonstration. On supposera $\lambda = 0$. Soit $u \in D(A) \cap N(A)^\perp$, $u \neq 0$. $Rg(A, 0)$ étant le résolvant généralisé de A en 0, on a en particulier $Rg(A, 0)(H) \subseteq D(A)$ et $ARg(A, 0)Au = Au$ donc $u - Rg(A, 0)Au \in N(A)$ ce qui implique $(I - P_{N(A)})[u - Rg(A, 0)Au] = 0$ donc $u = (I - P_{N(A)})Rg(A, 0)Au$ donc

$$\|u\| \leq \|I - P_{N(A)}\| \|Rg(A, 0)\| \|Au\| \leq \|Rg(A, 0)\| \|Au\|$$

donc $\|u\| \leq \|Rg(A, 0)\| \|Au\|$ et par définition de la conorme on en déduit que $c(A)^{-1} \leq \|Rg(A, 0)\|$ et donc $c(A) \geq \|Rg(A, 0)\|^{-1}$. $\square$

LEMME 3.6. Soit A un opérateur fermé, $\rho(A) \neq \emptyset$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$A^k - \lambda^k I \text{ régulier} \Rightarrow A - \lambda I \text{ régulier.}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que

$$N(A - \lambda I) \subseteq N(A^k - \lambda^k I) \subseteq R((A^k - \lambda^k I)^n) \subseteq R((A - \lambda I)^n) \quad \forall n \geq 0.$$

Donc

$$N(A - \lambda I) \subseteq R((A - \lambda I)^n) \quad \forall n \geq 0.$$

Reste à montrer que $R(A - \lambda I)$ est fermé. Comme $\rho(A) \neq \emptyset$, soit $\beta \in \rho(A)$ et notons $S = (A - \beta I)^{-1} \in B(H)$.

$$A^k - \lambda^k I = B_k(A - \lambda I) \quad \text{avec} \quad B_k = \lambda^{k-1}I + \lambda^{k-2}A + \dots + A^{k-1};$$

on peut écrire

$$B_k = c_0 I + c_1(A - \beta I) + \dots + c_{k-1}(A - \beta I)^{k-1} \quad \text{où } c_i \in \mathbb{C};$$

d'où

$$B_k S^{k-1} = c_0 S^{k-1} + c_1 S^{k-2} + \dots + c_{k-1} I \in B(H).$$

Montrons maintenant que $R(A - \lambda I)$ est fermé. Soit $u_n \in R(A - \lambda I)$ tel que $u_n \rightarrow u$ dans H . Comme $u_n \in R(A - \lambda I)$ et $B_k S^{k-1} \in B(H)$, on en déduit d'une part que $u_n = (A - \lambda I)v_n$ avec $v_n \in D(A)$, et d'autre part $B_k S^{k-1}u_n = B_k S^{k-1}(A - \lambda I)v_n \rightarrow B_k S^{k-1}u$; or S commute avec A , donc $B_k(A - \lambda I)S^{k-1}v_n = (A^k - \lambda^k I)S^{k-1}v_n \rightarrow B_k S^{k-1}u \in R(A^k - \lambda^k I)$ (car $R(A^k - \lambda^k I)$ est fermé); donc $\exists v \in D(A)$ tel que $B_k S^{k-1}u = (A^k - \lambda^k I)v = B_k(A - \lambda I)v$, donc $B_k(S^{k-1}u - (A - \lambda I)v) = 0$, ce qui implique $S^{k-1}u - (A - \lambda I)v \in N(B_k) \subseteq N(A^k - \lambda^k I) \subseteq R(A - \lambda I)$ donc $S^{k-1}u \in R(A - \lambda I)$ et finalement $u \in R(A - \lambda I)$. $\square$

PROPOSITION 3.7. Soit A fermé, $\rho(A) \neq \emptyset$. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) A régulier;
- (b) $\forall n > 0$ A^n régulier;
- (c) $\exists k > 0$ tel que A^k régulier.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) D'après le corollaire 3.4, on a $\forall n > 0$, $R(A^n)$ fermé; et d'autre part le lemme 2.4 de [17] implique que $\forall j \geq 0$, $\forall n \geq 0$, $N(A^j) \subseteq R(A^n)$; d'où (b).

(b) $\Rightarrow$ (c) évident.

(c) $\Rightarrow$ (a) On utilise la même démonstration que le lemme 3.6 avec $\lambda = 0$. $\square$

Démonstration du théorème 3.1. On supposera que $\lambda_0 = 0$. L'existence de $\lim_{n \rightarrow \infty} [c(A^n)]^{1/n}$, se déduit du lemme 3.3 (voir [21, Problem 98]), en plus on a $\lim_{n \rightarrow \infty} [c(A^n)]^{1/n} = \sup_{n \geq 1} [c(A^n)]^{1/n}$.

Montrons que $r(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} [c(A^n)]^{1/n} \leq \delta(A)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < r(A)$; alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $|\lambda^N| < c(A^N)$. D'après la proposition 3.7, A étant régulier, A^N est régulier, et d'après le lemme 3.2 on en déduit que $A^N - \lambda^N I$ est régulier, d'où $A - \lambda I$ est régulier (voir le lemme 3.6), donc si $|\lambda| < r(A)$ alors $\lambda \in \text{reg}(A)$, par conséquent $r(A) \leq \delta(A)$.

Réciproquement, soit $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{C} ; |\lambda| < \delta(A)\} \subseteq \text{reg}(A)$ donc il existe $\text{Rg}(A, \lambda)$ analytique dans Δ , résolvant généralisé de A , donc pour $\lambda \in \Delta$ on a

$$\text{Rg}(A, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n A_n$$

avec

$$(1) \quad \{\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|^{1/n}\}^{-1} \geq \delta(A).$$

Notons

$$(2) \quad I - \text{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n Q_n.$$

Par définition de $\text{Rg}(A, \lambda)$ on a $(A - \lambda I)(I - \text{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I)) = 0$, donc $(A - \lambda I) \sum_{n \geq 0} \lambda^n Q_n = 0$, d'où $AQ_0 = 0$ et $AQ_n = Q_{n-1}$, ce qui implique $R(Q_n) \subseteq D(A^{n+1})$ et $A^{n+1}Q_n = 0$, d'autre part (2) implique $Q_0 = I - A_0A$ et $Q_n = -A_nA + A_{n-1}$ donc si $u \in D(A^{n+1})$ alors

$$(3) \quad Q_0u = u - A_0Au \quad \text{et} \quad Q_nA^n u = -A_nA^{n+1}u + A_{n-1}A^n u.$$

Montrons maintenant par induction que

$$\forall n \geq 0 \quad A^{n+1}A_nA^{n+1}u = A^{n+1}u \quad \text{si } u \in D(A^{n+1}).$$

Pour $n = 0$ on a $Q_0 u = u - A_0 A u$ et comme $A Q_0 u = 0$ on en déduit que $A u = A A_0 A u$. Supposons qu'on a $A^n A_{n-1} A^n u = A^n u$ pour $u \in D(A^n)$; soit maintenant $u \in D(A^{n+1})$, alors $A^n u \in D(A)$, par hypothèse d'induction on a $A^n A_{n-1} A^n u = A^n u \in D(A)$, ce qui implique $A_{n-1} A^n u \in D(A^{n+1})$; (3) $\Rightarrow Q_n A^n u = -A_n A^{n+1} u + A_{n-1} A^n u$ et comme $Q_n A^n u$ et $A_{n-1} A^n u$ sont dans $D(A^{n+1})$, on en déduit que $A_n A^{n+1} u \in D(A^{n+1})$. D'autre part (2) et (3) impliquent

$$0 = A^{n+1} Q_n A^n u = -A^{n+1} A_n A^{n+1} u + A^{n+1} A_{n-1} A^n u,$$

donc

$$A^{n+1} A_n A^{n+1} u = A^{n+1} A_{n-1} A^n u = A(A^n A_{n-1} A^n u) = A(A^n u) = A^{n+1} u,$$

d'où

$$\forall n \geq 0 \quad A^{n+1} A_n A^{n+1} u = A^{n+1} u \quad \text{si } u \in D(A^{n+1}).$$

En remarquant que seule cette dernière égalité intervient dans la démonstration du lemme 3.5, on en déduit que $c(A^{n+1}) \geq \|A_n\|^{-1}$ ceci et (1) impliquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [c(A^n)]^{1/n} \geq \{\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}\}^{-1} \geq \delta(A)$$

d'où finalement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [c(A^n)]^{1/n} = \delta(A). \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE 3.8. Si $\lambda \notin \sigma_g(A)$ alors $\|\text{Rg}(A, \lambda)\| \geq \frac{1}{d(\lambda, \sigma_g(A))}$.

Démonstration. Le lemme 3.3 $\Rightarrow c(A - \lambda I)^n \geq [c(A - \lambda I)]^n \Rightarrow [c(A - \lambda I)^n]^{1/n} \geq c(A - \lambda I)$. D'autre part le lemme 3.5, implique $[c(A - \lambda I)^n]^{1/n} \geq \|\text{Rg}(A, \lambda)\|^{-1}$; en passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$, et en appliquant le théorème 3.1, on achève la démonstration du corollaire. $\blacksquare$

COROLLAIRE 3.9. Soit A un opérateur fermé tel que $A \in \text{q}\Phi$ (cf. [14]). Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} c(A^n)^{1/n}$ existe et est égale au rayon du plus grand disque centré en zéro qui est inclus dans $\text{reg}(A) \cup \{0\}$.

Démonstration. Soit $A \in \text{q}\Phi(d)$; si $d = 0$ c'est à dire A régulier, alors on applique le théorème 3.1. Supposons maintenant que $d \geq 1$ et soit (M, N) une décomposition de Kato de degré d associée à A . Posons P_M et P_N les projections respectivement sur M et N , suivant la décomposition $H = M \oplus N$. Notons $A_0 = A|_M$; $N \subseteq N(A^d)$ implique que si $n \geq d$ et $u \in D(A^n)$ alors $P_M u \in D(A^n)$

d'une part et d'autre part $A^n u = A_0^n P_M u$. Donc si $u \in D(A^n)$ alors

$$\begin{aligned} \|(I - P_{N(A^n)})u\| &= \|(I - P_{N(A^n)})(P_M u + P_N u)\| = \|(I - P_{N(A^n)})P_M u\| = \\ &= \|(I - P_{N(A^n)})(I - P_{N(A_0^n)})P_M u\| \leq \|(I - P_{N(A_0^n)})P_M u\| = \\ &= \|(I - P_{N(A_0^n)})P_M(I - P_{N(A^n)})P_M u\| \leq \|P_M(I - P_{N(A^n)})P_M u\| \leq \\ &\leq \|P_M\| \|(I - P_{N(A^n)})P_M u\|. \end{aligned}$$

D'où

$$\|(I - P_{N(A^n)})u\| \leq \|(I - P_{N(A_0^n)})P_M u\| \leq \|P_M\| \|(I - P_{N(A^n)})P_M u\|.$$

Maintenant si $u \in N(A^n)^\perp \cap D(A^n)$ alors

$$\begin{aligned} \|A^n u\| &= \|A_0^n P_M u\| \geq c(A_0^n) \|(I - P_{N(A_0^n)})P_M u\| \geq c(A_0^n) \|(I - P_{N(A^n)})P_M u\| \geq \\ (*) \quad &\geq c(A_0^n) \|u\| \quad \text{d'où} \quad c(A^n) \geq c(A_0^n). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} c(A^n) \|(I - P_{N(A_0^n)})P_M u\| &\leq c(A^n) \|P_M\| \|(I - P_{N(A^n)})P_M u\| \leq \\ &\leq \|P_M\| \|A^n(I - P_{N(A^n)})u\| = \|P_M\| \|A_0^n P_M u\| = \\ &= \|P_M\| \|A_0^n(I - P_{N(A_0^n)})P_M u\|. \end{aligned}$$

Donc on en déduit

$$c(A^n) \leq \|P_M\| c(A_0^n).$$

D'où en appliquant (*) on a

$$c(A_0^n) \leq c(A^n) \leq \|P_M\| c(A_0^n).$$

Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [c(A^n)]^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} [c(A_0^n)]^{1/n}.$$

D'autre part $\text{reg}(A_0) = \text{reg}(A) \cup \{0\}$; le théorème 3.1 permet de conclure. ▣

REMARQUE. Remarquons que le corollaire 3.9 est une généralisation de [9, Corollary 6].

4. PERTURBATIONS DU SPECTRE GÉNÉRALISÉ

DÉFINITION 4.1. Soit $A \in B(H)$ est *régulier*, on dit que $T \in B(H)$ est *A-régulier* s'il existe M sous-espace fermé de H vérifiant:

- (a) $N(A) \subseteq M$,
- (b) $A(M) = M$,
- (c) $T(M) \subseteq M$.

REMARQUES. (1) Si $A \in B(H)$, *régulier* et $T \in B(H)$ commute avec A alors T est *A-régulier*. En effet posons $M = \text{Co}(A)$ qui est fermé et contient $N(A)$ (A est *régulier*) d'où (a); par définition de $\text{Co}(A)$ on a (b); reste à montrer (c),

$$A(T(\text{Co}(A))) = T(A(\text{Co}(A))) = T(\text{Co}(A)) \Rightarrow T(\text{Co}(A)) \subseteq \text{Co}(A).$$

(2) Si $A \in B(H)$ est inversible à droite ou à gauche alors $\forall T \in B(H)$, T est *A-régulier*. En effet si A est inversible à droite (respectivement à gauche) on posera $M = H$ (respectivement $M = \{0\}$) et on vérifie facilement que $\forall T \in B(H)$, T est *A-régulier*.

LEMME 4.2. Soit $A \in B(H)$, *régulier* et M un sous-espace fermé de H tels que $N(A) \subseteq M$ et $A(M) = M$. Alors

$$\overline{H_0(A)} \subseteq M \subseteq \text{Co}(A).$$

Démonstration. Montrons par induction que $\forall n > 0$, $N(A^n) \subseteq M$. $n = 1$ est vérifié par hypothèse. Supposons que $N(A^n) \subseteq M$ et soit $u \in N(A^{n+1})$, donc $A^n u \in N(A) \subseteq M = A^{n+1}(M)$ ce qui implique $\exists v \in M$ tel que $A^n u = A^{n+1}v$, donc $u - Av \in N(A^n) \subseteq M$ par hypothèse d'induction, et comme $Av \in M$ on en déduit que $u \in M$. Donc $\forall n > 0$, $N(A^n) \subseteq M$, par conséquent $\bigcup_{n>0} \overline{N(A^n)} \subseteq M$. La proposition 1.9(e), permet de conclure la première inclusion; la seconde inclusion se déduit de la définition du $\text{Co}(A)$. $\square$

LEMME 4.3. Soit $A, T \in B(H)$, A *régulier*. Alors

T est *A-régulier* si et seulement si T^* est A^* -*régulier*.

Démonstration. "seulement si". Supposons que T est *A-régulier*, donc par définition $\exists M$ sous-espace fermé de H vérifiant (a), (b) et (c) de la Définition 4.1, d'après le lemme 4.2, $H_0(A) \subseteq M \subseteq \text{Co}(A)$ ce qui implique $\text{Co}(A)^\perp \subseteq M^\perp \subseteq H_0(A)^\perp$. A *régulier* implique (voir la proposition 1.9(c)) $H_0(A^*) = \text{Co}(A)^\perp$ et $\text{Co}(A^*) = H_0(A)^\perp$ donc

$$N(A^*) \subseteq H_0(A^*) \subseteq M^\perp \subseteq \text{Co}(A^*), \quad T(M) \subseteq M \Rightarrow T^*(M^\perp) \subseteq M^\perp.$$

Par ailleurs $A^*(M^\perp) \subseteq M^\perp$, il reste à montrer que $M^\perp \subseteq A^*(M^\perp)$; soit $u \in M^\perp \subseteq \text{Co}(A^*)$ alors $\exists v \in \text{Co}(A^*)$ tel que $u = A^*v$, montrons que $v \in M^\perp$. Soit $w \in M = A(M)$, donc $\exists w_1 \in M$ tel que $w = Aw_1$. $(w, v) = (Aw_1, v) = (w_1, A^*v) = (w_1, u) = 0$ car $u \in M^\perp$ et $w_1 \in M$, donc $v \in M^\perp$ d'où $A^*(M^\perp) = M^\perp$. Donc finalement on a montré que $N(A^*) \subseteq M^\perp$, $A^*(M^\perp) = M^\perp$ et $T^*(M^\perp) \subseteq M^\perp$, c'est à dire T^* est A^* -régulier.

La réciproque s'obtient par symétrie avec l'adjoint. $\square$

LEMME 4.4. Soit $A \in B(H)$, régulier et M sous-espace fermé de H tel que $N(A) \subseteq M$ et $A(M) = M$. Alors, il existe $\mathcal{U}$ voisinage de zéro et $\text{Rg}(A, \lambda)$ résolvant généralisé de A analytique dans $\mathcal{U}$, vérifiant

$$\forall \lambda \in \mathcal{U} \quad \text{Rg}(A, \lambda) : M \hookrightarrow M.$$

Démonstration. Montrons d'abord que $\text{Rg}(A, 0) : M \hookrightarrow M$ (où $\text{Rg}(A, 0)$ est un résolvant généralisé quelconque de A en zéro). Soit $u \in M = A(M)$ alors $\exists v \in M$ tel que $u = Av$ donc

$$v - \text{Rg}(A, 0)u = v - \text{Rg}(A, 0)Av = (I - \text{Rg}(A, 0)A)v \in N(A) \subseteq M$$

donc $v - \text{Rg}(A, 0)u \in M$ et $v \in M$, impliquent que $\text{Rg}(A, 0)u \in M$.

Vérifions que $N(\text{Rg}(A, 0)|_M) = \{0\}$. Soit $u \in M$ et $\text{Rg}(A, 0)u = 0$, avec les notations précédentes on a $v = v - \text{Rg}(A, 0)Av \in N(A)$, d'où $v \in N(A)$ et donc $u = Av = 0$.

Soit maintenant $\mathcal{U} = \{\lambda \in \mathbb{C} ; |\lambda| < \|\text{Rg}(A, 0)\|^{-1}\}$. Pour $\lambda \in \mathcal{U}$ posons:

$$\text{Rg}(A, \lambda) = \text{Rg}(A, 0)(I - \lambda \text{Rg}(A, 0))^{-1} = (I - \lambda \text{Rg}(A, 0))^{-1} \text{Rg}(A, 0).$$

$\text{Rg}(A, \lambda)$ ainsi défini est un résolvant généralisé de A analytique dans $\mathcal{U}$ (voir démonstration du théorème 2.6 de [17]). En développant $\text{Rg}(A, \lambda)$ en série de Neumann et en utilisant le fait que $\text{Rg}(A, 0) : M \hookrightarrow M$, on en déduit la preuve du lemme. $\square$

COROLLAIRE 4.5. Soit $A, T \in B(H)$; alors T est A -régulier $\Rightarrow \exists \mathcal{U}$ voisinage de zéro tel que T est $(A - \lambda I)$ -régulier $\forall \lambda \in \mathcal{U}$.

Démonstration. On définit $\mathcal{U}$ et $\text{Rg}(A, \lambda)$ pour $\lambda \in \mathcal{U}$, comme dans le lemme précédent. Par ailleurs, le théorème 2.1 (I) et (II) implique que $\text{Co}(A) = \text{Co}(A - \lambda I)$ et $\overline{H_0(A)} = \overline{H_0(A - \lambda I)}$ pour tout λ dans la composante connexe de $\text{reg}(A)$ contenant zéro. Puisque T est A -régulier, par définition il existe M sous-espace fermé de H tel que $N(A) \subseteq M$, $A(M) = M$ et $T(M) \subseteq M$. D'après le lemme 4.3 on a: $\overline{H_0(A)} \subseteq M \subseteq \text{Co}(A)$, donc $\forall \lambda \in \mathcal{U} \quad \overline{H_0(A - \lambda I)} \subseteq M \subseteq \text{Co}(A - \lambda I)$, ce qui implique.

$\forall \lambda \in \mathcal{U}$, $N(A - \lambda I) \subseteq M$, il reste à montrer $(A - \lambda I)(M) = M$. $(A - \lambda I)(M) \subseteq M$ étant évidente, il suffit de montrer que $M \subseteq (A - \lambda I)(M)$. Soit $u \in M \subseteq \text{Co}(A - \lambda I)$, donc $u = (A - \lambda I)v$ avec $v \in \text{Co}(A - \lambda I)$, donc $\text{Rg}(A, \lambda)u = \text{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I)v$ donc

$$(A - \lambda I)\text{Rg}(A, \lambda)u = (A - \lambda I)\text{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I)v = (A - \lambda I)v = u.$$

D'où $\forall u \in M$, $u = (A - \lambda I)\text{Rg}(A, \lambda)u$ pour tout $\lambda \in \mathcal{U}$, et comme $\text{Rg}(A, \lambda)(M) \subseteq M$ (voir le lemme précédent), on en déduit que $M \subseteq (A - \lambda I)(M)$. Donc finalement $\forall \lambda \in \mathcal{U}$, $N(A - \lambda I) \subseteq M$, $(A - \lambda I)(M) = M$ et $T(M) \subseteq M$ c'est-à-dire que $\forall \lambda \in \mathcal{U}$ T est $(A - \lambda I)$ -régulier.

THÉORÈME 4.6. Soit $A \in B(H)$, régulier. Il existe $\delta > 0$ tel que si $T \in B(H)$ avec $\|T\| < \delta$ alors :

$$T \text{ est } A\text{-régulier} \Rightarrow A - T \text{ est régulier.}$$

Démonstration. Posons $\mathcal{U} = \{\lambda \in \mathbb{C} ; |\lambda| < (1/2)\|\text{Rg}(A, 0)\|^{-1}\}$ et $\text{Rg}(A, \lambda)$ pour $\lambda \in \mathcal{U}$ comme dans le lemme 4.4. Montrons que $\forall \lambda \in \mathcal{U}$, $\|\text{Rg}(A, \lambda)\| < 2\|\text{Rg}(A, 0)\|$.

$$\begin{aligned} \text{Rg}(A, \lambda) &= \text{Rg}(A, 0)(I - \lambda \text{Rg}(A, 0))^{-1} \Rightarrow \text{Rg}(A, \lambda)(I - \lambda \text{Rg}(A, 0)) = \\ &= \text{Rg}(A, 0) \Rightarrow \text{Rg}(A, \lambda) - \lambda \text{Rg}(A, \lambda)\text{Rg}(A, 0) = \text{Rg}(A, 0). \end{aligned}$$

D'après la définition de $\text{Rg}(A, \lambda)$ on voit que $\text{Rg}(A, \lambda)$ commute avec $\text{Rg}(A, 0)$, d'où

$$-\text{Rg}(A, \lambda) + \lambda \text{Rg}(A, 0)\text{Rg}(A, \lambda) + \text{Rg}(A, 0) = 0$$

donc

$$\text{Rg}(A, \lambda) = \text{Rg}(A, 0)(I + \lambda \text{Rg}(A, \lambda))$$

donc

$$\|\text{Rg}(A, \lambda)\| \leq \|\text{Rg}(A, 0)\| \sum_{j \geq 0} (|\lambda| \|\text{Rg}(A, 0)\|)^j < \|\text{Rg}(A, 0)\| \sum_{j \geq 0} (1/2)^j$$

d'où

$$\|\text{Rg}(A, \lambda)\| < 2\|\text{Rg}(A, 0)\|.$$

Posons $\delta = (1/2)\|\text{Rg}(A, 0)\|^{-1}$. Soit maintenant $T \in B(H)$ avec $\|T\| < \delta$, alors $\forall \lambda \in \mathcal{U}$, $\|T\text{Rg}(A, \lambda)\| < 1$ et $\|\text{Rg}(A, \lambda)T\| < 1$; en effet

$$\|T\text{Rg}(A, \lambda)\| \leq \|T\| \|\text{Rg}(A, \lambda)\| \leq \|T\| \cdot 2\|\text{Rg}(A, 0)\| \leq \|T\|\delta^{-1} < 1.$$

Donc $I - T\text{Rg}(A, \lambda)$ et $I - \text{Rg}(A, \lambda)T$ sont inversibles $\forall \lambda \in \mathcal{U}$. Remarquons aussi

que

$$\forall \lambda \in \mathcal{U} \quad \text{Rg}(A, \lambda)(I - \text{TRg}(A, \lambda))^{-1} = (I - \text{Rg}(A, \lambda)T)^{-1}\text{Rg}(A, \lambda).$$

Pour vérifier cette égalité, il suffit de multiplier par $(I - \text{Rg}(A, \lambda)T)$ et $(I - \text{TRg}(A, \lambda))$ respectivement à gauche et à droite de l'égalité.

Pour $\lambda \in \mathcal{U}$, posons par définition:

$$\text{Rg}(A - T, \lambda) = \text{Rg}(A, \lambda)(I - \text{TRg}(A, \lambda))^{-1} = (I - \text{Rg}(A, \lambda)T)^{-1}\text{Rg}(A, \lambda).$$

Il est clair que $\text{Rg}(A - T, \lambda)$ ainsi défini est analytique dans $\mathcal{U}$; montrons que c'est un *résolvant généralisé* de $A - T$ dans $\mathcal{U}$, c'est-à-dire que $\forall \lambda \in \mathcal{U}$,

$$(1) \quad \text{Rg}(A - T, \lambda)(A - T - \lambda I)\text{Rg}(A - T, \lambda) = \text{Rg}(A - T, \lambda)$$

$$(2) \quad (A - T - \lambda I)\text{Rg}(A - T, \lambda)(A - T - \lambda I) = (A - T - \lambda I).$$

Commençons par démontrer (1); par définition de $\text{Rg}(A - T, \lambda)$ on a:

$$\begin{aligned} & \text{Rg}(A, \lambda)(I - \text{TRg}(A, \lambda))^{-1}(A - \lambda I - T)\text{Rg}(A, \lambda)(I - \text{TRg}(A, \lambda))^{-1} = \\ & = (I - \text{Rg}(A, \lambda)T)^{-1}\text{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I - T)\text{Rg}(A, \lambda)(I - \text{TRg}(A, \lambda))^{-1} = \\ & = (I - \text{Rg}(A, \lambda)T)^{-1}[\text{Rg}(A, \lambda) - \text{Rg}(A, \lambda)\text{TRg}(A, \lambda)](I - \text{TRg}(A, \lambda))^{-1} = \\ & = (I - \text{Rg}(A, \lambda)T)^{-1}\text{Rg}(A, \lambda)I - \text{TRg}(A, \lambda)^{-1} = \\ & = (I - \text{Rg}(A, \lambda)T)^{-1}\text{Rg}(A, \lambda) = \text{Rg}(A - T, \lambda) \end{aligned}$$

d'où (1).

Reste à montrer (2), pour cela montrons que

$$\begin{aligned} & (A - T - \lambda I)\text{Rg}(A - T, \lambda)(A - T - \lambda I) - (A - T - \lambda I) = 0. \\ & (A - T - \lambda I)\text{Rg}(A - T, \lambda)(A - T - \lambda I) - (A - T - \lambda I) = \\ & = [I - (A - \lambda I - T)\text{Rg}(A, \lambda)(I - \text{TRg}(A, \lambda))^{-1}](A - T - \lambda I) = \\ & = [(I - \text{TRg}(A, \lambda)) - (A - \lambda I - T)\text{Rg}(A, \lambda)](I - \text{TRg}(A, \lambda))^{-1}(A - T - \lambda I) = \\ & = [I - (A - \lambda I)\text{Rg}(A, \lambda)](I - \text{TRg}(A, \lambda))^{-1}(A - T - \lambda I) = \\ & = [I - (A - \lambda I)\text{Rg}(A, \lambda)](I - \text{TRg}(A, \lambda))^{-1}[(I - \text{TRg}(A, \lambda))(A - \lambda I) - \\ & \quad - T(I - \text{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I))] = \\ & = \{[I - (A - \lambda I)\text{Rg}(A, \lambda)](I - \text{TRg}(A, \lambda))^{-1}(I - \text{TRg}(A, \lambda))(A - \lambda I)\} - \\ & \quad - [I - (A - \lambda I)\text{Rg}(A, \lambda)](I - \text{TRg}(A, \lambda))^{-1}T(I - \text{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I)). \end{aligned}$$

Remarquons que l'expression entre accolades est nulle; en effet,

$$\begin{aligned} [I - (A - \lambda I)\text{Rg}(A, \lambda)](I - \text{TRg}(A, \lambda))^{-1}(I - \text{TRg}(A, \lambda))(A - \lambda I) = \\ = [I - (A - \lambda I)\text{Rg}(A, \lambda)](A - \lambda I) = 0. \end{aligned}$$

Regardons la seconde expression c'est-à-dire,

$$(3) \quad [I - (A - \lambda I)\text{Rg}(A, \lambda)](I - \text{TRg}(A, \lambda))^{-1}T(I - \text{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I)).$$

$I - \text{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I)$ est une projection sur $N(A - \lambda I)$, donc l'image de l'opérateur $([I - (A - \lambda I)\text{Rg}(A, \lambda)](I - \text{TRg}(A, \lambda))^{-1}T(I - \text{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I)))$ est incluse dans

$$[I - (A - \lambda I)\text{Rg}(A, \lambda)](I - \text{TRg}(A, \lambda))^{-1}T(N(A - \lambda I)).$$

En outre, d'une part $N(A - \lambda I) \subseteq M$ (voir la démonstration du corollaire 4.5) et d'autre part d'après le lemme 4.4 et en développant $(I - \text{TRg}(A, \lambda))^{-1}$ en série de Neumann, on voit que

$$(I - \text{TRg}(A, \lambda))^{-1}T(N(A - \lambda I)) \subseteq M \subseteq \text{Co}(A - \lambda I).$$

Or, $[I - (A - \lambda I)\text{Rg}(A, \lambda)](\text{Co}(A - \lambda I)) = \{0\}$ donc (3) est nulle et par conséquent (2) est démontré, d'où $0 \in \text{reg}(A - T)$ c'est à dire $A - T$ est régulier. $\square$

COROLLAIRE 4.7. Soit $A \in B(H)$, régulier. Alors il existe $\delta > 0$ tel que si S est A -régulier et $\|A - S\| < \delta$ alors S est régulier.

Démonstration. On pose $T = A - S$, alors $\|T\| < \delta$ et il est facile de voir que T est A -régulier; en appliquant le théorème 4.6, on en déduit que $A - T = A - A + S = S$ est régulier. $\square$

THÉORÈME 4.8. Si $A \in B(H)$ et Q quasi-nilpotent commute avec A alors:

$$\sigma_g(A + Q) = \sigma_g(A).$$

REMARQUES. Pour la démonstration du théorème 4.8 on aura besoin de quelques résultats préliminaires.

DÉFINITION 4.9. $A \in B(H)$ est dit *monojectif* si A est, soit inversible à droite, soit inversible à gauche.

REMARQUES. (1) A est inversible à gauche $\Leftrightarrow N(A) = \{0\}$ et $R(A)$ fermé.

(2) A est inversible à droite $\Leftrightarrow R(A) = H$.

LEMME 4.10. Si A est monojectif et $S \in B(H)$ alors:

$$\|A - S\| < c(A) \Rightarrow S \text{ est monojectif.}$$

Démonstration. Sans perte de généralité on supposera que A est injectif à image fermée (sinon on passe à l'adjoint).

Montrons que $N(S) = \{0\}$. Soit $u \in N(S)$ et $u \neq 0$. On supposera que $\|u\| = 1$; $\|Au\| = \|(A - S)u\| \leq \|A - S\| < c(A)$ donc $\|Au\| < c(A)$ ce qui contredit la définition de la *conorme* de A donc $u = 0$ et $N(S) = \{0\}$.

Montrons que $R(S)$ est fermé. Soit $u \in H$ et $\|u\| = 1$, alors

$$\|Su\| = \|Au + (S - A)u\| \geq \|Au\| - \|A - S\| \geq c(A) - \|A - S\| = \alpha > 0.$$

Donc $\forall u \in H, \|u\| = 1, \|Su\| \geq \alpha > 0$ d'où $c(S) \geq \alpha > 0$ et d'après la proposition 1.1 on en déduit que $R(S)$ est fermé. $\square$

COROLLAIRE 4.11. *L'ensemble des opérateurs monojectifs est ouvert dans $B(H)$.*

Démonstration. Le lemme 4.10 implique que l'ensemble des opérateurs inversibles à gauche et l'ensemble des opérateurs inversible à droite sont ouverts et donc l'ensemble des *monojectifs* est ouvert.

REMARQUE 4.12. Soit la représentation matricielle de A (cf. la proposition 2.12)

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

où $A_1 - \lambda I$ est injectif et $A_2 - \lambda I$ est surjectif, si $\mu \in \text{reg}(A)$.

Cette représentation est déterminée par la décomposition $H = H_1 \oplus H_2$ où

$$H_1 = \text{c.l.m.}_{\mu \neq \lambda} N(A - \mu I) \quad \text{et} \quad H_2 = H_1^\perp.$$

Il est facile de voir que si S commute avec A alors $S(H_1) \subseteq H_1$, c'est à dire que S respecte la décomposition $H = H_1 \oplus H_2$.

LEMME 4.13. *Soient $A \in B(H)$, régulier et A_1, A_2 comme dans la remarque 4.12, alors on a :*

- (1) $c(A) \leq \min(c(A_1), c(A_2))$.
- (2) $\max(\|A_1\|, \|A_2\|) \leq \|A\|$.

Démonstration. (1) $c(A) \leq c(A_1)$ se vérifie par la définition de la *conorme* et par le fait que $N(A) = N(A_1)$. Pour $c(A) \leq c(A_2)$, on passe à l'adjoint et comme $c(A) = c(A^*)$ et $c(A_2) = c(A_2^*)$, on en déduit l'inégalité.

(2) Facile à vérifier. $\square$

PROPOSITION 4.14. *Soient $A \in B(H)$, régulier et $S \in B(H)$ commutant avec A , alors :*

$$\|A - S\| < c(A) \Rightarrow S \text{ régulier.}$$

Démonstration. A étant régulier et S commutant avec A , de la remarque 4.12, on en déduit:

$$A - S = \begin{pmatrix} A_1 - S_1 & * \\ 0 & A_2 - S_2 \end{pmatrix}.$$

Le lemme 4.13 implique

$$\|A_1 - S_1\| \leq \|A - S\| < c(A) \leq c(A_1)$$

et

$$\|A_2 - S_2\| \leq \|A - S\| < c(A) \leq c(A_2).$$

A_1, A_2 étant monojectifs, d'après le lemme 4.10 on en déduit que S_1 est surjectif et S_2 est injectif à image fermée avec

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & * \\ 0 & S_2 \end{pmatrix},$$

d'où, d'après la proposition 2.12, S est régulier. ▣

LEMME 4.15. $A, S \in B(H)$ avec $AS = SA$. Alors:

$$AS \text{ régulier} \Rightarrow A, S \text{ sont réguliers.}$$

Démonstration. Remarquons que $AS = SA$ implique $N(S) + N(A) \subseteq N(SA)$ et $R(AS) \subseteq R(A) \cap R(S)$. Montrons que si SA est régulier alors A régulier. Soit $u_n \in R(A)$ tel que $u_n \rightarrow u$ dans H , alors $\exists v_n \in H$ tel que $u_n = Av_n \rightarrow u$ donc $SAv_n \rightarrow Su \in R(SA)$ donc $\exists w \in H$ tel que $Su = SAw$ ce qui implique $u - Aw \in N(S) \subseteq N(AS) \subseteq R(AS) \subseteq R(A)$ donc $u - Aw \in R(A)$ par conséquent $u \in R(A)$ et donc $R(A)$ est fermé.

D'autre part $\forall n \geq 0, N(A^n) \subseteq N(S^n A^n) = N((AS)^n) \subseteq R(AS) \subseteq R(A)$, donc $\forall n \geq 0, N(A^n) \subseteq R(A)$ d'où A est régulier, le même raisonnement montre que S est régulier. ▣

Démonstration du théorème 4.8. Montrons que si $A + Q$ est régulier alors A est régulier.

Supposons que $A + Q$ est régulier et posons $c = c(A + Q) > 0$. La proposition 3.7 implique que $\forall n > 0, (A + Q)^n$ est régulier. On a

$$(1) \quad (A + Q)^n = AS_n + Q^n.$$

Q quasi-nilpotent $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\|Q^N\| < c^N$. Donc (1) $\Rightarrow \|(A + Q)^N - AS_N\| = \|Q^N\| < c^N \leq c((A + Q)^N)$ voir le lemme 3.3. Donc $(A + Q)^N$ est régulier,

commute avec AS_N et $\|(A + Q)^N - AS_N\| < c((A + Q)^N)$, d'où d'après la proposition 4.14 on en déduit que AS_N est régulier, enfin le lemme 4.15 implique que A est régulier; donc $\text{reg}(A + Q) \subseteq \text{reg}(A)$ et par conséquent

$$\sigma_g(A) \subseteq \sigma_g(A + Q).$$

Si on remplace A par $A + Q$ et Q par $-Q$ dans la dernière inclusion on en déduit que $\sigma_g(A + Q) \subseteq \sigma_g(A)$; d'où la démonstration du théorème. $\square$

PROPOSITION 4.16. Soient $A \in B(H)$, régulier et Q un opérateur quasi-nilpotent commutant avec A alors :

$$\text{Co}(A + Q) = \text{Co}(A).$$

Démonstration. $AQ = QA \Rightarrow Q(\text{Co}(A)) \subseteq \text{Co}(A)$ (voir la remarque (1) qui suit la définition 4.1). Donc $(A + Q)(\text{Co}(A)) \subseteq \text{Co}(A)$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit $u \in \text{Co}(A)$ et posons $B = \text{Rg}(A, 0)$ un résolvant généralisé de A en zero; d'après le lemme 4.4 et en prenant $M = \text{Co}(A)$, on a $B(\text{Co}(A)) \subseteq \text{Co}(A)$. Posons $v = \sum_{j \geq 0} (-Q)^j B^{j+1}u$ la convergence de cette série vient du fait que Q est quasi-nilpotent. D'après ce qu'on vient de voir, $v \in \text{Co}(A)$. D'autre part $\forall j > 0$, $AB^{j+1}u = AB(B^j u) = B^j u$ car AB est projection sur $R(A)$ et $B^j u \in \text{Co}(A) \subseteq R(A)$. Donc

$$\begin{aligned} (A + Q)v &= \sum_{j \geq 0} (-Q)^j AB^{j+1}u - \sum_{j \geq 0} (-Q)^{j+1} B^{j+1}u = \\ &= \sum_{j \geq 0} (-Q)^j B^j u - \sum_{j \geq 0} (-Q)^{j+1} B^{j+1}u = u + \sum_{j \geq 1} (-Q)^j B^j u - \sum_{j \geq 1} (-Q)^j B^j u = u. \end{aligned}$$

Donc $u = (A + Q)v$ avec $v \in \text{Co}(A)$ et par conséquent $\text{Co}(A) \subseteq (A + Q)(\text{Co}(A))$; d'où $(A + Q)(\text{Co}(A)) = \text{Co}(A)$ par définition de $\text{Co}(A + Q)$ on en déduit que

$$\text{Co}(A) \subseteq \text{Co}(A + Q).$$

D'après le théorème 4.8 on a A régulier $\Rightarrow A + Q$ régulier. D'où on en déduit $\text{Co}(A + Q) \subseteq \text{Co}(A + Q - Q) = \text{Co}(A)$ et donc

$$\text{Co}(A) = \text{Co}(A + Q). \quad \square$$

5. SUR LE THÉORÈME DE L'APPLICATION SPECTRALE POUR LE SPECTRE GÉNÉRALISÉ

THÉORÈME 5.1. Soit A un opérateur fermé avec $\rho(A) \neq \emptyset$. Si P est un polynôme dans $\mathbb{C}$ alors :

$$P(\sigma_g(A)) = \sigma_g(P(A)).$$

REMARQUE. Pour la démonstration de ce théorème on aura besoin de quelques résultats préliminaires.

LEMME 5.2. Soit $\{\lambda_k\}_{1 \leq k \leq n}$ une suite de nombres complexes tous distincts et $m \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$R\left(\prod_{k=1}^n (A - \lambda_k I)^m\right) = \bigcap_{k=1}^n R(A - \lambda_k I)^m.$$

Démonstration. "⊆" est évidente.

Montrons l'inclusion inverse par induction sur n .

Pour $n = 1$ c'est évident, supposons que l'inclusion soit vraie à l'ordre n et soit $u \in \bigcap_{k=1}^{n+1} R(A - \lambda_k I)^m$ en particulier $u \in R(A - \lambda_{n+1} I)^m$, donc $\exists v \in D(A^m)$ tel que $u = (A - \lambda_{n+1} I)^m v$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$, alors

$$\begin{aligned} u &= (A - \lambda_k I + (\lambda_k - \lambda_{n+1})I)^m v = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (A - \lambda_k I)^j (\lambda_k - \lambda_{n+1})^{m-j} v \\ u &= (\lambda_k - \lambda_{n+1})^m v + \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (A - \lambda_k I)^j (\lambda_k - \lambda_{n+1})^{m-j} v \end{aligned}$$

et comme $u \in R(A - \lambda_k I)^m$, on voit facilement que $v \in R(A - \lambda_k I)^m$ et ceci pour $1 \leq k \leq n$; donc

$$v \in \bigcap_{k=1}^n R(A - \lambda_k I)^m = R\left(\prod_{k=1}^n (A - \lambda_k I)^m\right)$$

par hypothèse d'induction et comme $u = (A - \lambda_{n+1} I)^m v$, on en déduit que $u \in R\left(\prod_{k=1}^{n+1} (A - \lambda_k I)^m\right)$ par conséquent la preuve du lemme. $\square$

LEMME 5.3. Soit $\{\lambda_k\}_{1 \leq k \leq n}$ une suite de nombres complexes tous distincts. Alors:

$$\sum_{k=1}^n N(A - \lambda_k I) = N\left(\prod_{k=1}^n (A - \lambda_k I)\right).$$

Démonstration. "⊆" est évidente.

Montrons l'inclusion inverse par induction sur n .

Pour $n = 1$ c'est évident. Supposons que c'est vrai à l'ordre n et soit

$$u \in N\left(\prod_{k=1}^{n+1} (A - \lambda_k I)\right)$$

ce qui implique

$$(A - \lambda_{n+1}I)u \in N\left(\prod_{k=1}^n (A - \lambda_k I)\right);$$

par hypothèse d'induction $\exists v_k \in N(A - \lambda_k I)$ pour $1 \leq k \leq n$ tels que $(A - \lambda_{n+1}I)u = \sum_{k=1}^n v_k$. Posons $w_k = \frac{v_k}{\lambda_k - \lambda_{n+1}}$ pour $1 \leq k \leq n$ et $w_{n+1} = u - \sum_{k=1}^n v_k$; on a $w_k \in N(A - \lambda_k I)$ pour $k = 1, \dots, n$. Montrons que $w_{n+1} \in N(A - \lambda_{n+1}I)$. Remarquons que pour $1 \leq k \leq n$

$$(A - \lambda_{n+1}I)w_k = [A - \lambda_k I + (\lambda_k - \lambda_{n+1})I] \frac{v_k}{\lambda_k - \lambda_{n+1}} = v_k$$

d'où

$$\begin{aligned} (A - \lambda_{n+1}I)w_{n+1} &= (A - \lambda_{n+1}I)u - \sum_{k=1}^n (A - \lambda_{n+1}I)w_k = \\ &= \sum_{k=1}^n v_k - \sum_{k=1}^n v_k = 0. \end{aligned}$$

Donc $w_{n+1} \in N(A - \lambda_{n+1}I)$ et $u = \sum_{k=1}^n w_k$ où $w_k \in N(A - \lambda_k I)$ avec $1 \leq k \leq n+1$ d'où la preuve du lemme. ▣

PROPOSITION 5.4. Soit A un opérateur fermé avec $\rho(A) \neq \emptyset$ et $P(\lambda) = a \prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_k)$ avec $a \neq 0$, alors :

$$P(A) \text{ est régulier} \Leftrightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \text{reg}(A).$$

Démonstration. On supposera que $a = 1$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \text{reg}(A)$, en particulier $R(A - \lambda_k I)$ est fermé pour $1 \leq k \leq n$, le lemme 5.2 implique que $R(P(A))$ est fermé comme intersection de fermés.

Reste à montrer que $\forall m \geq 0, N(P(A)) \subseteq R(P(A))^m$.

Le lemme 5.3 implique que

$$N(P(A)) = \sum_{k=1}^n N(A - \lambda_k I)$$

et comme $\lambda_k \in \text{reg}(A)$, on en déduit que $\forall m \geq 0$, $N(A - \lambda_k I) \subseteq R(A - \lambda_k I)^m$. En outre si $\mu \neq \lambda_k$ alors $(A - \mu I)(N(A - \lambda_k I)) = N(A - \lambda_k I)$; donc pour $1 \leq k \leq n$ on a

$$\forall m \geq 0 \quad N(A - \lambda_k I) \subseteq \bigcap_{k=1}^n R(A - \lambda_k I)^m$$

donc

$$\forall m \geq 0 \quad \sum_{k=1}^n N(A - \lambda_k I) \subseteq \bigcap_{k=1}^n R(A - \lambda_k I)^m = R(P(A)^m)$$

d'où

$$\forall m \geq 0 \quad N(P(A)) \subseteq R(P(A)^m).$$

($\Rightarrow$) Supposons que $P(A)$ est régulier alors du lemme 5.2 et du lemme 5.3, on déduit que $\forall m \geq 0$

$$\sum_{k=1}^n N(A - \lambda_k I) \subseteq \bigcap_{k=1}^n R(A - \lambda_k I)^m$$

donc pour $1 \leq k \leq n$, $\forall m \geq 0$, $N(A - \lambda_k I) \subseteq R(A - \lambda_k I)^m$.

Reste à montrer que $R(A - \lambda_k I)$ est fermé pour $1 \leq k \leq n$. Soit $k \in [1, n]$ fixé, alors $P(A) = (A - \lambda_k I) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (A - \lambda_j I)$. Le polynôme $\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (\lambda - \lambda_j I)$ est de degré $n - 1$.

Soit maintenant $\beta \in \rho(A) \neq \emptyset$ et $S = (A - \beta I)^{-1}$. Posons

$$B_{n-1} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (A - \lambda_j I) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (A - \beta I + (\beta - \lambda_j I)) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j (A - \beta I)^j \quad \text{où } C_j \in \mathbb{C}.$$

Donc

$$B_{n-1} = C_0 I + \dots + C_{n-1} (A - \beta I)^{n-1}.$$

Remarquons que

$$B_{n-1} S^{n-1} = \{C_0 S^{n-1} + \dots + C_{n-1} I\} \in B(H).$$

Montrons maintenant que $R(A - \lambda_k I)$ est fermé; soit $u_j \in R(A - \lambda_k I)$ tel que $u_j \rightarrow u$ dans H . $u_j \in R(A - \lambda_k I)$ implique $u_j = (A - \lambda_k I)v_j$ où $v_j \in D(A)$.

$$B_{n-1} S^{n-1} \in B(H) \Rightarrow B_{n-1} S^{n-1} u_j \rightarrow B_{n-1} S^{n-1} u.$$

Puisque

$$\begin{aligned} B_{n-1}S^{n-1}u_j &= B_{n-1}S^{n-1}(A - \lambda_k)v_j = B_{n-1}(A - \lambda_k)S^{n-1}v_j = \\ &= P(A)S^{n-1}v_j \in R(P(A)) \end{aligned}$$

qui est fermé par hypothèse alors $B_{n-1}S^{n-1}u \in R(P(A))$, par conséquent $\exists w \in D(A^n)$ tel que $B_{n-1}S^{n-1}u = P(A)w = B_{n-1}(A - \lambda_k I)w$ ce qui implique $S^{n-1}u - (A - \lambda_k I)w \in N(B_{n-1})$; or,

$$N(B_{n-1}) \subseteq N(P(A)) \subseteq R(P(A)) \subseteq R(A - \lambda_k I)$$

donc $S^{n-1}u - (A - \lambda_k I)w \in R(A - \lambda_k I)$, d'où $S^{n-1}u \in R(A - \lambda_k I)$ et finalement $u \in R(A - \lambda_k I)$ et par conséquent $R(A - \lambda_k I)$ est fermé. $\square$

Démonstration du théorème 5.1. Soit $\mu \in \mathbb{C}$ fixé et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines du polynôme $P(\lambda) - \mu$; alors

$$P(A) - \mu I = a(A - \lambda_1 I) \dots (A - \lambda_n I) \quad \text{avec } a \neq 0$$

(le cas $a = 0$ étant évident).

Si $\mu \in \sigma_g(P(A))$ c'est-à-dire si $P(A) - \mu I$ n'est pas régulier alors d'après la proposition 5.4, il existe au moins un λ_k tel que $A - \lambda_k I$ n'est pas régulier; donc si $\mu \in \sigma_g(A)$ alors $\exists \lambda_k \in \sigma_g(A)$ racine du polynôme $P(\lambda) - \mu$ donc $P(\lambda_k) = \mu$, cela montre que $\sigma_g(P(A)) \subseteq P(\sigma_g(A))$.

Réciproquement, supposons que un des $\lambda_k \in \sigma_g(A)$ alors d'après la proposition 5.4, on déduit que $P(A) - \mu I$ n'est pas régulier donc $\mu \in \sigma_g(P(A))$; d'où

$$P(\sigma_g(A)) \subseteq \sigma_g(P(A))$$

ce qui achève la démonstration du théorème 5.1. $\square$

COROLLAIRE 5.5. Soient A un opérateur fermé avec $\rho(A) \neq \emptyset$ et P un polynôme sur $\mathbb{C}$ n'ayant pas de racines dans $\sigma_g(A)$. Alors $P(A)$ est régulier.

THÉORÈME 5.6. Soit $T \in B(H)$ et f une fonction analytique au voisinage de $\sigma(T)$. Alors

$$f(\sigma_g(T)) = \sigma_g(f(T)).$$

Démonstration. Soit $\mu \in \sigma_g(T)$, on définit la fonction g dans le domaine d'analyticité de f par:

$$g(\lambda) = \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} \quad \text{si } \lambda \neq \mu \quad \text{et} \quad g(\mu) = f'(\mu).$$

Par le calcul fonctionnel (cf. Dunford [8]) on a :

$$f(T) - f(\mu)I = (T - \mu I)g(T)$$

avec $g(T)$ commute avec T . En appliquant le lemme 4.15, on en déduit que si $T - \mu I$ n'est pas régulier alors $f(T) - f(\mu)I$ n'est pas régulier, ou encore si $\mu \in \sigma_g(T)$ alors $f(\mu) \in \sigma_g(f(T))$ donc $f(\sigma_g(T)) \subseteq \sigma_g(f(T))$.

Inversement, si $\mu \notin f(\sigma_g(T))$ alors $\forall \lambda \in \sigma_g(T), f(\lambda) - \mu \neq 0$. Posons $g(\lambda) = f(\lambda) - \mu$.

Si $g(\lambda) \neq 0 \forall \lambda \in \sigma(T)$ alors $g(T)$ est inversible donc $f(T) - \mu I$ est inversible donc $\mu \notin \sigma(f(T))$, par conséquent $\mu \notin \sigma_g(f(T))$.

Si $g(\lambda)$ admet des zéro dans $\sigma(T)$, $g(\lambda)$ étant analytique dans le compact $\sigma(T)$ alors ils sont en nombre fini, soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Donc $g(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} h(\lambda)$ où α_i est l'ordre de multiplicité de λ_i et $h(\lambda) \neq 0, \forall \lambda \in \sigma(T)$. $g(\lambda) \neq 0, \forall \lambda \in \sigma_g(T)$ implique que $P(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}$ n'a pas de racines dans $\sigma_g(T)$, et d'après le corollaire 5.5, $P(T)$ est régulier; d'autre part $h(\lambda) \neq 0, \forall \lambda \in \sigma(T)$ implique que $h(T)$ est inversible. Par conséquent $g(T)$ est régulier comme produit d'un régulier par un inversible commutant entre eux d'où $\mu \notin \sigma_g(f(T))$. $\square$

COROLLAIRE 5.7. Soit $T \in B(H)$ et f une fonction analytique au voisinage de $\sigma(T)$ n'ayant pas de racines dans $\sigma_g(T)$. Alors $f(T)$ est régulier.

REMARQUE. Le théorème 5.6 a été démontré, d'une façon différente, par Apostol ([1, Theorem 2.7]).

CONJECTURE. Soit A un opérateur fermé.

(1) Il existe un résolvant généralisé de A analytique dans $\text{reg}(A)$ et vérifiant l'identité de la résolvants.

(2) On peut construire un calcul fonctionnel "généralisé" pour A , analogue à celui de Dunford [8], où l'opérateur résolvant est remplacé par un résolvant généralisé comme dans (1) et les fonctions f sont analytiques dans un voisinage de $\sigma_g(A)$.

En plus on a : $f(\sigma_g(A)) = \sigma_g(f(A))$.

6. SUR L'ENSEMBLE DES OPÉRATEURS RÉGULIERS

Si M, N sont deux sous-espaces fermés de H , posons;

$$\delta(M, N) = \|(I - P_N)P_M\| \quad \text{et} \quad g(M, N) = \|P_M - P_N\|$$

où P_M et P_N sont respectivement les projections orthogonales sur M et N .

Alors ([13], [14]):

$$g(M, N) = \text{Max}\{\delta(M, N); \delta(N, M)\}$$

et

$$g(M, N) < 1 \Rightarrow M + N^\perp = H.$$

LEMME 6.1. Soit $A, B \in B(H)$ alors :

$$\delta(N(B), N(A)) \leq \frac{1}{c(A)} \|A - B\|.$$

Démonstration. Soit $u \in H = N(B) \oplus N(B)^\perp \Rightarrow u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in N(B)$ et $u_2 \in N(B)^\perp$.

On a

$$(1) \quad \|u\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 \geq \|u_1\|^2.$$

$$\|(I - P_{N(A)}) P_{N(B)} u\| = \|(I - P_{N(A)}) P_{N(B)} u_1\| = \|(I - P_{N(A)}) u_1\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{c(A)} \|A(I - P_{N(A)}) u_1\| = \frac{1}{c(A)} \|A u_1\| = \frac{1}{c(A)} \|(A - B) u_1\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{c(A)} \|A - B\| \|u_1\| \leq \frac{1}{c(A)} \|A - B\| \|u\|$$

donc

$$\|(I - P_{N(A)}) P_{N(B)} u\| \leq \frac{1}{c(A)} \|A - B\| \|u\|$$

d'où

$$\delta(N(B), N(A)) \leq \frac{1}{c(A)} \|A - B\|. \quad \square$$

Notons

$$\Gamma_{(\varepsilon)} = \{A \in B(H); \quad c(A) \geq \varepsilon\}$$

et

$$\text{Reg}(H) = \{A \in B(H); \quad A \text{ est régulier}\}.$$

PROPOSITION 6.2. Soit $A, B \in \Gamma_{(\varepsilon)}$ avec $\varepsilon > 0$. Alors :

$$(a) \quad g(N(A), N(B)) \leq \frac{1}{\varepsilon} \|A - B\|.$$

$$(b) \quad g(R(A), R(B)) \leq \frac{1}{\varepsilon} \|A - B\|.$$

$$(c) \quad A \mapsto c(A) \text{ est continue de } \Gamma_{(\varepsilon)} \text{ dans } \mathbf{R}_+^*.$$

Démonstration. (a) et (b) se déduisent directement du lemme 6.1, pour (b) on remarquera que $c(A^*) = c(A) \geq \varepsilon$ et que $g(R(A), R(B)) = g(R(A)^\perp, R(B)^\perp) = g(N(A^*), N(B^*))$.

(c) Montrons que si $\|A - B\| < \varepsilon$ alors $|c(A) - c(B)| < \|A - B\|$. Si $\|A - B\| < \varepsilon$ alors, (a) $\Rightarrow g(N(A), N(B)) < 1 \Rightarrow N(A) + N(B)^\perp = H$.

Soit $u \in N(A)^\perp$ alors $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in N(A)$ et $u_2 \in N(B)^\perp$; comme $u \perp u_1$ on a

$$\|u_2\|^2 = \|u\|^2 + \|u_1\|^2 \geq \|u\|^2.$$

$$\begin{aligned} \|Au\| &= \|Au_2\| = \|Bu_2 + (A - B)u_2\| \geq \|Bu_2\| - \|(A - B)u_2\| \geq \\ &\geq c(B)\|u_2\| - \|A - B\| \|u_2\| \geq (c(B) - \|A - B\|) \|u\| \end{aligned}$$

donc $c(A) \geq c(B) - \|A - B\|$ ou encore $c(B) - c(A) \leq \|A - B\|$, en interchangeant A et B , on en déduit $|c(A) - c(B)| \leq \|A - B\|$ d'où la continuité de l'application $A \mapsto c(A)$ de $\Gamma_{(\varepsilon)}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. $\square$

THÉOREME 6.3. $\forall \varepsilon > 0, \Gamma_{(\varepsilon)} \cap \text{Reg}(H)$ est fermé dans $B(H)$.

REMARQUE. $\Gamma_{(\varepsilon)}$ est fermé $\forall \varepsilon > 0$. Par contre $\text{Reg}(H)$ n'est pas fermé, par exemple:

Soit $A_n = \frac{1}{n} \cdot A$ où $A \in \text{Reg}(H)$ alors $A_n \in \text{Reg}(H)$ et $A_n \rightarrow 0 \notin \text{Reg}(H)$.

Démonstration du théorème 6.3. Soit $A_n \in \Gamma_{(\varepsilon)} \cap \text{Reg}(H)$ tel que $A_n \rightarrow A$ dans $B(H)$. Alors la proposition 6.2 implique que $A \in \Gamma_{(\varepsilon)}$ et $g(N(A_n), N(A)) \leq \frac{1}{\varepsilon} \|A_n - A\|$ et $g(R(A_n), R(A)) \leq \frac{1}{\varepsilon} \|A_n - A\|$. $A \in \Gamma_{(\varepsilon)} \Rightarrow R(A)$ est fermé.

Montrons que $N(A) \subseteq R(A)$.

Soit $u \in N(A)$, alors

$$\begin{aligned} \|u - P_{R(A)} P_{N(A_n)} u\| &\leq \|u - P_{R(A_n)} P_{N(A_n)} u\| + \|P_{R(A)} P_{N(A_n)} u - P_{R(A_n)} P_{N(A_n)} u\| = \\ &= \|(P_{N(A)} - P_{N(A_n)})u\| + \|(P_{R(A)} - P_{R(A_n)})P_{N(A_n)} u\| \leq \\ &\leq g(N(A), N(A_n))\|u\| + g(R(A), R(A_n))\|u\| \leq \frac{2}{\varepsilon} \|A_n - A\| \|u\| \end{aligned}$$

et comme $A_n \rightarrow A$ alors $\|u - P_{R(A)} P_{N(A_n)} u\| \rightarrow 0 \Rightarrow u \in \bar{R}(A) = R(A)$ d'où $N(A) \subseteq R(A)$.

Pour $j \in \mathbb{N}^*$ fixé on a $A_n^j \rightarrow A^j$ d'autre part (la proposition 3.7), si $A_n \in \text{Reg}(H)$ alors $A_n^j \in \text{Reg}(H)$ et (le lemme 3.3) $c(A_n^j) \geq \varepsilon^j$, on démontre comme plus haut que $N(A^j) \subseteq R(A^j) \subseteq R(A)$, d'où $A \in \text{Reg}(H)$ d'où la preuve du théorème. $\square$

COROLLAIRE 6. $\text{Reg}(H) = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cap \text{Reg}(H)$ est donc une réunion dénombrable de fermés.

Démonstration. Si $A \in \text{Reg}(H)$ alors $R(A)$ est fermé et donc $c(A) > 0 \Rightarrow \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*$, tel que $A \in \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$. ▀

REMARQUE. Si on note $\mathcal{M}(H) = \{A \in B(H) ; A \text{ est surjectif ou } A \text{ est injectif à image fermée}\} = \{A \in B(H) ; A \text{ est monojectif}\}$ voir la définition 4.9.

Le corollaire 4.11 $\Rightarrow \mathcal{M}(H)$ est ouvert.

$\text{Reg}^0(H)$ dénote l'intérieur de $\text{Reg}(H)$.

THÉORÈME 6.5.

$$\text{Reg}^0(H) = \mathcal{M}(H).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\text{Reg}^0(H) \subseteq \mathcal{M}(H)$. Supposons que $A \in \text{Reg}^0(H)$ avec $N(A) \neq \{0\}$, $N(A^*) \neq \{0\}$ et soit $v \in N(A)$, $w \in N(A^*)$. Remarquons que A régulier implique que $v \in N(A) \subseteq R(A)$ donc v est orthogonale à w .

Posons $M = \{\text{l'espace engendré par } \{v, w\}\}^\perp$. Soit $y \in H$, tel que y n'appartienne pas à l'espace engendré par $\{w\}$.

Posons B_y l'opérateur défini pour tout $u \in H$ par $B_y u = AP_M u + (u, y)Aw$. Soit maintenant $x \in M^\perp$ tel que $x \notin N(A)$ et $(x, y) = 0$, alors $x \in M^\perp \Rightarrow x = \alpha v + \beta w$ et $x \notin N(A) \Rightarrow \beta \neq 0$.

Montrons que $x \in N(B_y)$. En effet $B_y x = AP_M x + (x, y)Aw = 0$. Montrons maintenant que $x \notin R(A)$; en effet si $x \in R(A)$ alors $x = \alpha v + \beta w$ et comme $v \in N(A) \subseteq R(A) \Rightarrow \beta w \in R(A) \cap N(A^*) = \{0\} \Rightarrow \beta = 0$, or $\beta \neq 0$ donc $x \notin R(A)$. Il est clair que $R(B_y) \subseteq R(A)$ donc $x \notin R(B_y)$, ceci montre que B_y n'est pas régulier.

D'autre part $(A - B_y)u = Au - B_y u = A(I - P_M)u - (u, y)Aw$.

Remarquons que $(I - P_M)$ est une projection orthogonale sur l'espace engendré par $\{v, w\}$ donc $w = (I - P_M)w = (I - P_M)^* w$. D'autre part

$$(I - P_M)u = ((I - P_M)u, v)v + ((I - P_M)u, w)w$$

donc

$$\begin{aligned} A(I - P_M)u &= ((I - P_M)u, v)Av + ((I - P_M)u, w)Aw = \\ &= (u, (I - P_M)^* w)Aw = (u, w)Aw \end{aligned}$$

donc

$$(A - B_y)u = (u, w)Aw - (u, y)Aw = (u, w - y)Aw$$

d'où

$$\|A - B_y u\| \leq \|u\| \|w - y\| \|Aw\| \Rightarrow \|A - B_y\| \leq \|w - y\| \|Aw\|.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$ on peut choisir y tel que $\|A - B_y\| < \varepsilon$ et comme B_y n'est pas régulier, il en résulte une contradiction avec le fait que $A \in \text{Reg}^0(H)$.

Donc $N(A) = \{0\}$ ou $N(A^*) = \{0\}$ et comme $R(A)$ est fermé on en déduit que $\text{Reg}^0(H) \subseteq \mathcal{M}(H)$. ▣

COROLLAIRE 6.6. *$\text{Reg}(H)$ est dense dans $B(H)$.*

Démonstration. Par [24, Problem 140], l'ensemble des opérateurs monojectifs est dense dans $B(H)$. Le théorème précédent permet de conclure. ▣

Ce travail constitue une partie de la thèse d'état soutenue par l'auteur en 1988 à la Faculté des sciences de Rabat (Maroc).

RÉFÉRENCES

1. APOSTOL, C., The reduced minimum modulus, *Michigan Math. J.*, **32**(1985), 279–294.
2. APOSTOL, C.; CLANCEY, K., Generalized inverses and spectral theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **215**(1976), 293–300.
3. APOSTOL, C.; CLANCEY, K., On generalized resolvents, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **215**(1976), 163–168.
4. ATKINSON, F. V., On relatively regular operators, *Acta. Sci. Math. (Szeged)*, **15**(1953), 38–56.
5. BROWN, L.; DOUGLAS, R. G.; FILLMORE, P. A., Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C^* -algebras, *Springer Lectures Notes in Math.*, **345**(1973), 58–127.
6. CARADUS, S. R., Mapping properties of relatively regular operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **47**(1975), 409–412.
7. COLOJOARĂ, I.; FOIAŞ, C., *Theory of generalized spectral operators*, Gordon and Breach, New-York, 1968.
8. DUNFORD, N.; SCHWARTZ, J., *Linear operators, part III*, Wiley Interscience, New York, 1971.
9. FORSTER, K. H.; KAASHOEK, M. A., The asymptotic behaviour of the reduced minimum modulus of a Fredholm operator, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **49**(1975), 123–131.
10. GINDLER, H. A.; TAYLOR, A. E., The minimum modulus of linear operator and its use in spectral theory, *Studia Math.*, **22**(1962), 15–41.
11. GOLDBERG, S., *Unbounded linear operators*, Mc Graw Hill, N. Y., 1966.
12. GOLDMAN, M. A.; KARATCHOWSKY, S. N., Sur la stabilité de quelques propriétés d'un opérateur linéaire fermé (en Russe), *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **209**(1973); Traduction anglaise in *Sov. Math. Dokl.*, **14**(1973), 769–772.
13. KATO, T., Perturbation theory for nullity, deficiency, and other quantities of linear operators, *J. Anal. Math.*, **6**(1958), 261–322.
14. LABROUSSE, J. P., Les opérateurs quasi-Fredholm: une généralisation des opérateurs semi-Fredholm, *Rend. Circ. Math. Palermo (2)*, **XXIX**(1980), 161–258.
15. LABROUSSE, J. P., Relation entre deux définitions possibles du spectre essentiel d'un opérateur, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **25**(1980), 1391–1394.
16. MBEKHTA, M., *Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs paranormaux et spectraux*, Thèse de 3^{ème} cycle, Université de Nice, 1984.
17. MBEKHTA, M., Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs paranormaux et spectraux, *Glasgow Math. J.*, **29**(1987), 159–175.

18. MBEKHTA, M., Décomposition de Kato généralisée, *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.*, **303**(1986), 979—982.
19. MBEKHTA, M., Sur la théorie spectrale généralisée, *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.*, **306**(1988), 593—596.
20. NASHED, M. Z., *Generalized inverses and applications*, Academic Press, 1976.
21. POLYA, G.; SZEGÖ, G., *Problems and theorems in analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
22. SAPHAR, P., Contribution à l'étude des applications linéaires dans un espace de Banach, *Bull. Soc. Math. France*, **92**(1964), 363—384.
23. VASILESCU, F.-H., *Analytic functional calculus and spectral decompositions*, D. Reidel Publ. Comp., 1982.
24. HALMOS, P. R., *A Hilbert space problem book*, 2^{ème} édition, Van Nostrand, Princeton, 1980.

MOSTAFA MBEKHTA
Département de Mathématiques,
U.A. 168 au C.N.R.S., Université de Nice,
Parc valrose, F-06034 Nice Cedex,
France.

Received October 25, 1987.

Ajouté aux épreuves. La plus part des résultats de ce papier restent vrais dans le cadre plus général des espaces de Banach, si dans la définition 1.4 on ajoute la condition: $N(A)$ et $R(A)$ ont des compléments dans B .