J. OPERATOR THEORY
32(1994), 111–156

CORREPONDANCES D'INDICE FINI I: INDICE D'UN VECTEUR

YVES DENIZEAU et JEAN-FRANÇOIS HAVET

Communicated by Şerban Strătilă

ABSTRACT. Let M, N be von Neumann algebras, X an M-N-correspondence and Y an N-M-correspondence. We introduce and characterize Hilbert-Schmidt operators between Y and X. These operators are our main tool to define the index of a vector in the composition $Y \otimes X$. In a subsequent paper, this notion will be used to study the dimension of a correspondence.

KEYWORDS: *Index, correspondence.*

AMS SUBJECT CLASSIFICATION: 46L37.

INTRODUCTION

La notion d'indice fini dans les algèbres de von Neumann a été introduite par V. Jones ([12]) dans le cadre des facteurs de type II_1. Dans [17], M. Pimsner et S. Popa ont remarqué que cet indice était en fait attaché à l'espérance conditionnelle canonique E reliant les traces, et l'ont calculé comme l'inverse de la borne inférieure des $k > 0$ tels que $E - k\mathrm{Id}$ soit positive, suggérant ainsi la notion d'espérance conditionnelle d'indice fini. Par la suite, H. Kosaki ([13]) dans le cas des facteurs, M. Baillet et les auteurs ([3]) dans le cas général, ont défini l'indice d'une espérance conditionnelle. Les deux approches pour ces généralisations sont diffèrentes. La premiére s'appuie essentiellement sur la théorie spatiale de A. Connes ([4]), tandis que la deuxième utilise les outils des modules hilbertiens autoduaux ([16], [21]). Bien que déjà dans les travaux de M. Pimsner et S. Popa, certains résultats soient exprimés en termes de modules hilbertiens, c'est la première approche qui a le plus souvent prévalu dans les travaux ultérieurs. En particulier dans [19], S. Popa répertorie les différents aspects de la notion de correspondance et donne une définition de l'indice d'une correspondance entre facteurs finis qui n'utilise que la version au sens de A. Connes ([5]), c'est à dire un espace de Hilbert muni d'actions normales d'une algèbre de von Neumann M à gauche et d'une algèbre de von Neumann N à droite. Pour notre part, nous avons choisi de considérer une correspondance de M à N comme un N-module hilbertien autodual X, muni d'un morphisme normal π_X de M dans $\mathcal{L}_N(X)$. Le lien entre ces deux visions est contenu dans les travaux de M. A. Rieffel ([21]) et a été explicité dans [3]. Dans notre point de vue les méthodes deviennent plus algébriques, le recours à la théorie de Tomita est limité à l'existence d'une forme standard démontrée par U. Haagerup ([8]), et le cadre paraît bien adapté à l'étude des correspondances d'indice fini. Le présent travail est un prolongement de l'étude entreprise dans [3], le cas de l'espérance conditionnelle devenant un exemple naturel. En effet, si E est une espérance conditionnelle d'une algèbre de von Neumann M sur une sous-algèbre de von Neumann N et ι l'injection canonique de N dans M, on obtient par représentation de Gelfand-Segal, deux couples $(\mathfrak{X}(E), \xi_E)$ et $(\mathfrak{X}(\iota), \xi_\iota)$ où $\mathfrak{X}(E)$ est une M-N-correspondance et $\mathfrak{X}(\iota)$ est une N-M-correspondance. Les espaces de Hilbert associés à $\mathfrak{X}(\iota)$ et $\mathfrak{X}(E)$ sont conjugués l'un de l'autre. De plus le vecteur $\xi_\iota \otimes \xi_E$ de $\mathfrak{X}(\iota) \otimes \mathfrak{X}(E)$ est primordial dans la définition de l'indice de E ([3] Théorème 3.5). Dans cette définition, apparaît un vecteur de $\mathfrak{X}(E) \otimes \mathfrak{X}(\iota)$ soulignant une certaine symétrie des rôles joués par M et N. Par ailleurs si $M = N = \mathbf{C}$, il est bien connu qu'un espace de Hilbert H est de dimension finie s'il existe un opérateur de Hilbert-Schmidt sur H qui soit bijectif. Or un tel opérateur est défini par un vecteur de $\overline{H} \otimes H$. Partant d'une M-N-correspondance arbitraire X, nous sommes conduits à introduire sa N-M-correspondance adjointe $\overline{X}$. Un vecteur u, *central* dans $\overline{X} \otimes X$, c'est à dire sur lequel les actions à droite et à gauche de N coïncident, définit un opérateur de Hilbert-Schmidt, noté $\widehat{u}$, de $\overline{X}$ dans X. Le vecteur u est dit *faiblement d'indice fini* si $\widehat{u}$ est bijectif. Il n'est pas clair que $\widehat{u}^{-1}$ soit alors donné par un vecteur v de $X \otimes \overline{X}$. Si c'est le cas, v est unique, et on dit que u est *d'indice fini*. Nous définissons alors l'indice du vecteur u, qui dans le cas de facteurs est le réel $\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle$. La correspondance X sera dite *d'indice fini* s'il existe un vecteur d'indice fini dans $\overline{X} \otimes X$. Si l'on revient à l'exemple d'un espace de Hilbert H, tout vecteur d'indice fini dans $\overline{H} \otimes H$ est d'indice supérieur au carré de la dimension de H. Pour une correspondance entre facteurs les résultats de ([11], [14], [10]) assurent l'existence de vecteurs d'indice minimal, et permettent de définir l'indice d'une correspondance. Cette étude fait l'objet d'un deuxième article ([6]).

Le chapitre 1 est essentiellement destiné à donner les propriétés des correspondances dont nous aurons besoin. Après avoir fixé les définitions initiales et les notations (Section 1.1), nous montrons que si X est une M-N-correspondance et Y une N-P-correspondance, tout vecteur de la composée $Y \otimes X$ admet une décomposition canonique relativement à une base orthonormale de Y.

La Section 1.3 montre que la structure de bimodule d'une M-N-correspondance X conduit à construire de nouvelles correspondances:

• L'équivalence de Morita $\mathfrak{U}(X)$ où l'action à gauche de $\mathcal{L}_N(X)$ remplace celle de M.

• La $M-\mathcal{L}_N(X)$-correspondance $\mathfrak{I}(X)$ issue de la construction de Gelfand du morphisme de structure π_X.

Cette dernière correspondance est importante: la décomposition $X = \mathfrak{I}(X)\otimes \mathfrak{U}(X)$ prouve que l'étude de X est intimement liée à celle de π_X. En particulier, nous montrerons ([6]) que X et $\mathfrak{I}(X)$ sont simultanément d'indice fini.

Le foncteur reliant la correspondance H_X au sens de A. Connes avec X, permet de définir l'adjointe $\overline{X}$ par la formule $H_{\overline{X}} = \overline{H_X}^c$, où $\overline{H_X}^c$ désigne l'espace de Hilbert conjugué de H_X muni de sa structure canonique de M-N-bimodule. En général $\overline{X}$ n'a pas de description simple, mais, si F est un poids opératoriel fini fidèle de M dans N et si ι est l'injection associée, on a $\overline{\mathfrak{X}(\iota)} = \mathfrak{X}(F)$ (Proposition 1.4.3). Il est également possible de calculer l'adjointe d'une équivalence de Morita grâce au théorème 1.5.3, où nous déterminons la forme standard de $\mathcal{L}_N(X)$ à partir de celle de N. Ce résultat fondamental, analogue à la proposition 3.1 de [22], permet en outre de montrer que tout poids opératoriel fini de $\mathcal{L}_N(X)$ dans M est déterminé par la donnée d'un vecteur central de $X \otimes \overline{X}$. Enfin, pour une M-N-correspondance X, nous effectuons une construction de base en considérant l'algèbre $M_1 = \mathcal{L}_N(X)$ et la M_1-M-correspondance $\mathfrak{U}(X)\otimes\overline{X}$. En partant également de $\overline{X}$ et en itérant ce processus, nous définissons deux tours d'algèbres de von Neumann et deux suites de correspondances. Dans le cas d'une inclusion, on retrouve les constructions de [19] et [7]. Remarquons que dans ce cadre on obtient facilement que M_{2n+1} est l'algèbre construite à partir de $X_n \otimes X_{n-1} \otimes \cdots \otimes X_0$ ([19] Théorème 2.6).

Le chapitre 2 est consacré aux principaux outils de notre étude. Il s'agit d'associer à chaque vecteur d'une composée, des opérateurs qui traduisent assez fidèlement les caractéristiques de ce vecteur. Plus précisément, si X est une M-N-correspondance et Y une N-M-correspondance, tout vecteur u de $Y \otimes X$ donne naissance (Section 2.1) à un opérateur de Hilbert-Schmidt, noté $\widehat{u}$, de Y dans X. Nous caractérisons (Section 2.2) ces opérateurs M-N-antilinéaires par les conditions proches de celle qui définissent les applications complèment bornées. Par ailleurs, nous étudions (Section 2.4) les opérateurs de tensorisation à droite et à gauche par u. Ces deux opérateurs sont fondamentaux dans l'étude de la composée des correspondances ([6]).

La notation d'indice fini est analysée dans le troisième chapitre. Le théorème 3.2.3 donne, parmi d'autre, deux caractérisations importantes pour qu'un vecteur u de $Y \otimes X$ soit d'indice fini:

• l'existence d'un (unique) vecteur $\overline{u}$ de $X \otimes Y$, dit *vecteur associé à u*, tel que $\widehat{u}$ et $\widehat{\overline{u}}$ soient réciproques l'un de l'autre;

• l'existence d'un poids opératoriel normal fini F de $\mathcal{L}_N(X)$ dans M qui vérifie $F(\theta_{\widehat{u}(y),\widehat{u}(y')}) = \langle y, y' \rangle$ pour tous y, y' de Y.

S'il existe un vecteur u de $Y \otimes X$ qui vérifie ces conditions, la correspondance Y n'est autre que $\overline{X}$ et on dit que X est *d'indice fini*. On définit alors *l'indice de u* comme la composée de l'action à gauche de $\langle \overline{u}, \overline{u} \rangle$ et de l'action à droite de $\langle u, u \rangle$ sur X.

Dans l'exemple d'un poids opératoriel E, nous montrons que E est d'indice fini au sens de ([3]) si et seulement si le vecteur $1 \otimes \xi_E$ est d'indice fini. Nous constatons alors que la normalisation habituellement choisie pour une espérance conditionnelle masque la symétrie de la situation. Dans le cas général, étant donné un vecteur central u de $\overline{X} \otimes X$, s'intéresser à l'indice du poids opératoriel F_u défini par u, revient à considérer le vecteur $\mathrm{Id}_{\overline{X}} \otimes u$ de $\mathfrak{I}(\overline{X}) \otimes (\mathfrak{U}(\overline{X}) \otimes X)$. Nous montrons que u et F_u sont simultanément d'indice fini (Corollaire 3.3.5) et dans ce cas nous pouvons compléter notre construction de base. Les tours de Jones sont alors dotées d'une double suite de vecteurs d'indice fini et de poids opératoriels finis d'indice fini, avec conservation des indices. Si M et N sont des facteurs, nous obtenons que les valeurs de l'indice de u sont celles déterminées par V. Jones ([12]).

Nous terminons cet article avec une premiére application de cette théorie. L'une de nos motivations initiales était de dégager une notion d'indice fini pour une application complètement positive φ. Une approche naturelle est l'étude de la correspondance $\mathfrak{X}(\varphi)$. Malheureusement, dans le cas général, un poids opératoriel fini peut ne pas être d'indice fini bien que sa correspondance le soit (Proposition 3.4.7). Or l'exemple fondamental du couple (E, ι), où E est une espérance conditionnelle et ι est l'injection canonique, montre ([3] Théorème 3.5) que E est d'indice fini si et seulement si il existe une constante $K > 0$ telle que $K(\iota \circ E) - \mathrm{Id}$ est complètement positive. Si nous considérons deux applications complètement positives φ de M dans N et ψ de N dans M, les vecteurs $\widetilde{\xi}_\varphi$ et $\widetilde{\xi}_\psi$ des correspondances duales $\widetilde{\mathfrak{X}}(\varphi)$ et $\widetilde{\mathfrak{X}}(\psi)$ définissent deux applications complètement positives $\widetilde{\varphi}$ de N dans $\mathcal{L}_N(\mathfrak{X}(\varphi))$ et $\widetilde{\psi}$ de M dans $\mathcal{L}_M(\mathfrak{X}(\psi))$. Nous obtenons (Théorème 3.4.4) que $\mathfrak{X}(\varphi)$ (ou $\mathfrak{X}(\psi)$) est l'indice fini si et seulement si il existe deux constantes $K > 0$ et $K' > 0$ telles que $K(\pi_{\mathfrak{X}(\varphi)} \circ \psi) - \widetilde{\varphi}$ et $K'(\pi_{\mathfrak{X}(\varphi)} \circ \varphi) - \widetilde{\psi}$ soient complètement positives, auquel cas $\overline{\mathfrak{X}(\varphi)} = \mathfrak{X}(\psi)$. Nous sommes alors en mesure de définir *l'indice du couple* (φ, ψ) (3.4.5), confirmant là encore la symétrie de cette présentation. Dans le cas particulier d'une espérance conditionnelle, nous obtenons que $\mathrm{Ind}\,(E) = \mathrm{Ind}\,((E, \iota))$. Mais définir l'indice d'une inclusion ι de N dans M pose le problème du choix d'un poids opératoriel fini E de M dans N tel que le couple (ι, E) soit d'indice fini (Proposition 3.4.9). Résoudre cette question conduit à définir l'indice d'une correspondance ([6]).

1. CORRESPONDANCES

1.1. DÉFINITIONS ET NOTATIONS. Dans toute la suite M, N et P désigneront des algèbres de von Neumann. Nous supposerons connues les proprietés des N-modules hilbertiens à droite ([16], [21]). Si X est un N-module hilbertien à droite $\mathcal{L}_N(X)$ sera l'algèbre de von Neumann des opérateurs N-linéaires continus sur X admettant un adjoint continu. Pour tous x et x' dans X, nous désignerons par $\theta_{x,x'}$ l'opérateur $x \cdot \langle x', \cdot \rangle$ et par $\mathcal{K}_N^\circ(X)$ l'idéal bilatère de $\mathcal{L}_N(X)$ constitué des sommes finies de ces opérateurs.

Une *M-N-correspondance* est un M-N-bimodule autodual normal X, la structure de M-module à gauche étant définie par la donnée d'un morphisme unifère normal π_X de M dans $\mathcal{L}_N(X)$. Si ce morphisme est injectif, nous dirons que X est *non dégénérée à gauche*; dans le cas où l'idéal engendré par l'image du N-produit scalaire est ultrafaiblement dense dans N, nous dirons que X est *non dégénérée à droite.* Une M-N-correspondance sera dite *non dégénérée* si elle est non dégénérée à gauche et à droite.

Soit X une M-N-correspondance. Nous désignerons par ${}_M\mathcal{L}_N(X)$ la sous-algèbre de von Neumann de $\mathcal{L}_N(X)$ constituée des opérateurs qui commutent à l'action à gauche de M. Cette sous-algèbre contient en particulier l'image par π_X du centre $\mathcal{Z}(M)$ de M, ainsi que le centre de $\mathcal{L}_N(X)$ qui est l'ensemble des opérateurs de multiplication à droite $\rho_X(c)$ avec c dans $\mathcal{Z}(N)$. Nous dirons que X est *irrédictible* si elle ne possède pas de sous-correspondances propres, c'est à dire si ${}_M\mathcal{L}_N(X)$ est réduit aux scalaires.

Deux M-N-correspondances X et X' sont dites *équivalentes* s'il existe un isomorphisme M-N-linéaire de X sur X' respectant les produits scalaires. Dans la suite nous ne distinguerons pas une correspondance avec sa classe d'équivalence et $\mathcal{C}(M, N)$ désignera la collection des classes d'équivalence de M-N-correspondances.

Si φ est une application complètement positive de M dans N nous désignerons par $(\pi_\varphi, \mathfrak{X}(\varphi), \xi_\varphi)$ sa représentation de Gelfand-Segal. ([16] Théorème 5.2.). En particulier $\mathfrak{X}(\mathrm{Id}_N)$ est la *correspondance triviale* sur N que nous noterons $\mathbf{1}_N$. Nous identifierons toujours $\mathcal{L}_N(\mathbf{1}_N)$ et N.

Si $N \subset M$ nous noterons $\mathcal{P}_0(M,N)$ l'ensemble des poids opératoriels normaux finis fidèles de M dans N, et $\mathcal{E}(M,N)$ l'ensemble des espérances normales fidèles de M dans N.

Si Z est une M-M-correspondance nous désignerons par $c(Z)$ l'ensemble des éléments z de Z tels que pour tout $m \in M$ on ait $m \cdot z = z \cdot m$; on dira qu'un tel vecteur z est *central*. On remarque que $c(Z)$ est une $\mathcal{Z}(M)$-$\mathcal{Z}(M)$-correspondance ([3] Proposition 1.7.).

Soit X dans $\mathcal{C}(M,N)$. Alors X est le dual d'un espace de Banach ([16] Proposition 1.8.) et nous désignerons par σ la topologie sur X définie par cette dualité. Rappelons qu'une suite généralisée bornée $(x_i)_i$ converge vers x pour la topologie σ si et seulement si pour tout y de X la suite généralisée $(\langle y, x_i\rangle)_i$ converge ultrafaiblement vers $\langle y, x\rangle$.

Rappelons encore ([16]) qu'une suite généralisée bornée (T_i) de $\mathcal{L}_N(X)$ converge ultrafaiblement vers 0 si et seulement si, pour tous x, x' de X la suite généralisée $(\langle x', T_i(x)\rangle)_i$ converge ultrafaiblement vers 0 dans N.

Pour une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de X, on vérifie facilement que les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $\forall x \in X, \quad x = \sum\limits_{i\in I} a_i \cdot \langle a_i, x\rangle$;

(ii) $\mathrm{Id}_X = \sum\limits_{i\in I} \theta_{a_i,a_i}$ en topologie ultrafaible;

(iii) $\mathrm{Id}_X = \sup\limits_{K\in\mathcal{P}_f(I)} \sum\limits_{i\in K} \theta_{a_i,a_i}$ dans $\mathcal{L}_N(X)$, où $\mathcal{P}_f(I)$ désigne l'ensemble des parties finies de I.

Une telle famille $(a_i)_{i\in I}$ sera appelée une *quasi-base* de X; si de plus les a_i sont deux à deux orthogonaux et si $\langle a_i, a_i\rangle$ est un projecteur pour tout i, on retrouve la notion de *base orthonormale*.

1.2. COMPOSITION DE CORRESPONDANCES. Nous commençons par rappeler certains résultats de M. A. Rieffel ([21]).

1.2.1. DÉFINITIONS. Soient X dans $\mathcal{C}(M,N)$ et Y dans $\mathcal{C}(N,P)$. Nous désignerons par $X \odot Y$ le produit tensoriel algébrique au dessus de N, muni des actions naturelles de M à gauche et de P à droite, et du produit scalaire caractérisé par $\langle x \otimes y, x' \otimes y'\rangle = \langle y, \langle x, x'\rangle \cdot y'\rangle$ pour tous x, x' de X et y, y' de Y. La *correspondance composée* de X et Y, notée $X \otimes Y$ est le complété autodual de $X \odot T$.

Les correspondances triviales sont les unités pour cette composition et une correspondance X dans $\mathcal{C}(M,N)$ est *inversible* s'il existe Y dans $\mathcal{C}(N,M)$ telle que

$X \otimes Y = \mathbf{1}_M$ et $Y \otimes X = \mathbf{1}_N$; par associativité du produit tensoriel l'inverse est unique et est noté X^{-1}.

Nous pouvons également définir sur $X \otimes Y$ une action à gauche de $\mathcal{L}_N(X)$ et une action à droite de l'algèbre opposée de ${}_N\mathcal{L}_P(Y)$ en posant pour tous $v \in X \otimes Y, S \in \mathcal{L}_N(X)$ et $T \in_N \mathcal{L}_P(Y)$

$$S \cdot v \cdot T^\circ = (S \otimes \mathrm{Id}_Y)(\mathrm{Id}_X \otimes T)(v) .$$

1.2.2. Remarque. Si X et Y sont non dégénérées à droite (respectivement à gauche) alors $X \otimes Y$ est non dégénérée à droite (respectivement à gauche). Pour la non dégénérescence à droite la démonstration est immédiate, pour celle à gauche il suffit d'appliquer ([1] Lemme 1.5).

1.2.3. Proposition. *Soit X dans $\mathcal{C}(M,N)$.*

(i) *Si U est inversible dans $\mathcal{C}(N,P)$ alors*

$$\mathcal{L}_P(X \otimes U) = \mathcal{L}_N(X) \otimes \mathrm{Id}_U \quad \text{et} \quad {}_M\mathcal{L}_P(X \otimes U) = {}_M\mathcal{L}_N(X) \otimes \mathrm{Id}_U.$$

(ii) *Si V est inversible dans $\mathcal{C}(P,M)$ alors ${}_P\mathcal{L}_N(V \otimes X) = \mathrm{Id}_V \otimes {}_M\mathcal{L}_N(X)$.*

Preuve. (i) Par induction on obtient deux morphismes d'algèbres de von Neumann, M-linéaires, l'un de $\mathcal{L}_N(X)$ dans $\mathcal{L}_P(X \otimes U)$ qui à S associe $S \otimes \mathrm{Id}_U$, l'autre de $\mathcal{L}_P(X \otimes U)$ dans $\mathcal{L}_P(X \otimes U \otimes U^{-1})$ qui à T associe $T \otimes \mathrm{Id}_{U^{-1}}$. Ces deux applications sont réciproques l'une de l'autre grâce à l'identification entre X et $X \otimes U \otimes U^{-1}$.

(ii) De manière analogue on montre que l'application de ${}_M\mathcal{L}_N(X)$ dans ${}_P\mathcal{L}_N(V \otimes X)$ qui à S associe $\mathrm{Id}_V \otimes S$ est un isomorphisme d'algèbres de von Neumann. ∎

Nous allons maintenant montrer que tout vecteur v d'une composée $X \otimes Y$ admet une décomposition naturelle relativement à une base arbitraire de X.

1.2.4. Lemme. *Soient X dans $\mathcal{C}(M,N)$ et Y dans $\mathcal{C}(N,P)$. L'application produit tensoriel de $X \times Y$ dans $X \otimes Y$ est continue en norme et séparément continue pour les topologies σ sur les parties bornées.*

Preuve. On a $\|x \otimes y\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ d'où la continuité normique. Soient $x \in X$ et (y_i) une suite généralisée bornée de Y convergeant vers 0 en topologie σ. Soit $(x', y') \in X \times Y$. La suite généralisée $(\langle x' \otimes y', x \otimes y_i\rangle) = (\langle\langle x, x'\rangle \cdot y', y_i\rangle)$ converge vers 0 ultrafaiblement. Comme l'ensemble des $x' \otimes y'$ est σ-total dans $X \otimes Y$ on voit que $(x \otimes y_i)$ converge dans $X \otimes Y$ vers 0 en topologie σ. Soient maintenant $y \in Y$ et (x_i) suite généralisée bornée de X convergeant vers 0 en topologie σ. Par hypothèse $(\langle x', x_i\rangle)$ converge ultrafaiblement vers 0, donc, par normalité $(\langle x' \otimes y', x_i \otimes y\rangle) = (\langle y', \langle x', x_i\rangle \cdot y\rangle)$ converge vers 0 ultrafaiblement. La suite généralisée (x_i) étant bornée, il en est de même pour $(x_i \otimes y)$ et donc $(x_i \otimes y)$ converge vers 0 en topologie σ. ∎

1.2.5. THÉORÈME. *Soient X dans $\mathcal{C}(M,N)$, Y dans $\mathcal{C}(N,P)$, $(a_i)_{i\in I}$ une quasi-base de X et $(b_j)_{j\in J}$ une quasi-base de Y. Alors $(a_i\otimes b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une quasi-base de $X\otimes Y$.*

Preuve. Soit $i\in I$ fixé. Pour tout $(x,y)\in X\times Y$ on a d'après le lemme précédent

$$\begin{aligned}(\theta_{a_i,a_i}\otimes \mathrm{Id}_Y)(x\otimes y) &= a_i\otimes\langle a_i,x\rangle\cdot y\\ &= \sum_{j\in J} a_i\otimes b_j\cdot\langle b_j,\langle a_i,x\rangle\cdot y\rangle\\ &= \sum_{j\in J} a_i\otimes b_j\cdot\langle a_i\otimes b_j, x\otimes y\rangle\ .\end{aligned}$$

Pour toute partie finie L de J posons $T_{iL}=\sum_{j\in L}\theta_{a_i\otimes b_j,a_i\otimes b_j}$. La famille $(T_{iL})_{L\in\mathcal{P}_f(J)}$ est filtrante croissante, bornée et on a donc

$$\theta_{a_i,a_i}\otimes\mathrm{Id}_Y=\sup_L T_{iL}\ .$$

Par normalité de la représentation induite, on déduit alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Id}_X\otimes\mathrm{Id}_Y &= \sup_{K\in\mathcal{P}_f(I)}\sum_{i\in K}\theta_{a_i,a_i}\otimes\mathrm{Id}_Y\\ &= \sup_{K\in\mathcal{P}_f(I)}\ \sup_{L\in\mathcal{P}_f(J)}\sum_{i\in L}T_{iL}\\ &= \sup_{K\times L\in\mathcal{P}_f(I)\times\mathcal{P}_f(J)}\ \sum_{(i,j)\in K\times L}\theta_{a_i\otimes b_j,a_i\otimes b_j}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

1.2.6. COROLLAIRE. *Soient X dans $\mathcal{C}(M,N)$, Y dans $\mathcal{C}(N,P)$ et (a_i) une quasi-base de X.*

(i) *Tout vecteur v de $X\otimes Y$ admet une décomposition en topologie σ de la forme $v=\sum_{i\in I}a_i\otimes y_i$.*

(ii) *Si (a_i) est une base orthonormale alors la famille (y_i) peut être choisie telle que $y_i=\langle a_i,a_i\rangle\cdot y_i$ pour tout $i\in I$, et elle est alors unique.*

Preuve. Soit $(b_j)_{j\in J}$ une base orthonormale de Y. D'après le théorème précédent on a

$$v=\sum_{i,j}a_i\otimes b_j\cdot\langle a_i\otimes b_j,v\rangle \text{ en topologie } \sigma\ .$$

Le lemme 1.2.4 montre alors qu'il suffit de poser $y_i=\sum_j b_j\cdot\langle a_i\otimes b_j,v\rangle$ pour obtenir l'assertion (i).

Si (a_i) est orthonormale, posons $p_i = \langle a_i, a_i\rangle$. On a $a_i \otimes y_i = a_i \cdot p_i \otimes y_i = a_i \otimes p_i \cdot y_i$, d'où l'existence d'une famille (y_i) telle que $p_i \cdot y_i = y_i$. Montrons l'unicité d'une telle famille. Pour tous $k \in I$ et $j \in J$ on a

$$\langle a_k \otimes b_j, v\rangle = \sum_i \langle b_j, \langle a_k, a_i\rangle \cdot y_i\rangle = \langle b_j, y_k\rangle \ .$$

Donc

$$y_k = \sum_j b_j \cdot \langle a_k \otimes b_j, v\rangle \ . \quad \blacksquare$$

1.3. Correspondance duale et équivalence de Morita.

1.3.1. Lemme. *Soit X dans $\mathcal{C}(M, N)$.*

(i) *Si $x = z \cdot \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ est la décomposition polaire de x dans X, alors $\|\theta_{x,z}\| = \|x\|$.*

(ii) *Pour tout x dans X on a $\|\theta_{x,x}\| = \|x\|^2$.*

(iii) *Pour tous x et x' dans X on a $\|\theta_{x,x'}\| = \|x' \cdot \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\| = \|x \cdot \langle x', x'\rangle^{\frac{1}{2}}\|$.*

Preuve. (i) Comme $\langle z, z\rangle$ est le support de $\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$, on a d'une part

$$\theta_{x,z}(z) = z \cdot \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle z, z\rangle = z \cdot \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = x$$

et d'autre part $\|\theta_{x,z}\| \leqslant \|x\|\,\|z\| = \|x\|$. D'oú $\|\theta_{x,z}\| = \|x\|$.

(ii) De même $\theta_{x,x}(z) = x \cdot \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle z, z\rangle = x \cdot \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ et puisque $\|x \cdot \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\|^2 = \|\langle x, x\rangle\|^2$ on obtient $\|\theta_{x,x}\| = \|x\|^2$.

(iii) D'après (ii) on a

$$\|\theta_{x,x'}\|^2 = \|\theta_{x',x}\theta_{x,x'}\| = \|\theta_{x' \cdot \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}, x' \cdot \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}}\| = \|x' \cdot \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\|^2 \ . \quad \blacksquare$$

Nous allons maintenant dissocier les structures de module à droite et à gauche. Nous commençons par étudier le dual à droite $\mathcal{L}_N(X, N)$.

1.3.2. Proposition. *Soit X dans $\mathcal{C}(M, N)$. Pour tout $x \in X$ posons $\widetilde{x} = \langle x, \cdot\rangle$. Le dual (à droite) $\mathcal{L}_N(X, N)$ de X peut être muni naturellement d'une structure de N-$\mathcal{L}_N(X)$-correspondance notée $\widetilde{X}$ telle que*

$$\langle \widetilde{x}, \widetilde{y}\rangle = \theta_{x,y} \qquad \widetilde{x} \cdot S = (S^* \cdot x)^{\sim} \qquad n \cdot \widetilde{x} = (x \cdot n^*)^{\sim}$$

pour tous x, y dans X, n dans N et S dans $\mathcal{L}_N(X)$.

De plus l'application $x \longmapsto \widetilde{x}$ de X sur $\widetilde{X}$ est une bijection antilinéaire isométrique et σ-bicontinue sur les parties bornées.

Preuve. Il est clair que $\widetilde{X}$ est un N-$\mathcal{L}_N(X)$-bimodule préhilbertien séparé. L'application $x \longmapsto \widetilde{x}$ est une bijection antilinéaire et isométrique d'après le lemme 1.3.1. Montrons qu'elle est σ-continue sur les parties bornées. Soit (x_i) une suite généralisée bornée convergeant vers 0 pour la topologie σ de X. Pour tout $x \in X$ la suite généralisée (θ_{x,x_i}) converge ultrafaiblement vers 0 dans $\mathcal{L}_N(X)$ et, par suite, $(\widetilde{x}_i)$ tend vers 0 pour la topologie σ de $\widetilde{X}$. Puisque X est autodual, il en résulte que la boule unité de $\widetilde{X}$ est σ-compacte et donc que $\widetilde{X}$ est autodual ([3] Proposition 1.7.). Comme $\mathcal{L}_{\mathcal{L}_N(X)}(\widetilde{X})$ est l'idéal ultrafaiblement fermé Q de N engendré par l'image du N-produit scalaire de X, la correspondance $\widetilde{\widetilde{X}}$ s'identifie avec l'espace X considéré comme $\mathcal{L}_N(X)$-Q-correspondance. D'où la σ-bicontinuité de l'application $x \longmapsto \widetilde{x}$. ∎

1.3.3. DÉFINITION. Cette correspondance $\widetilde{X}$ est appelée *correspondance duale* de X.

1.3.4. Soit X une M-N-correspondance. L'étude des actions à gauche de $\mathcal{L}_N(X)$ et M sur X va nous conduire à introduire deux correspondances.

L'action de $\mathcal{L}_N(X)$ munit l'ensemble sous-jacent de X, d'une structure de $\mathcal{L}_N(X)$-N-correspondance notée $\mathfrak{U}(X)$. Dans le cas où X est non dégénérée à droite, $\mathfrak{U}(X)$ est inversible, c'est un bimodule d'équivalence de Morita entre $\mathcal{L}_N(X)$ et N ([21] Proposition 7.8) et son inverse est $\widetilde{X}$. On a donc

$$\widetilde{X} \otimes \mathfrak{U}(X) = \mathbf{1}_N \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{U}(X) \otimes \widetilde{X} = \mathbf{1}_{\mathcal{L}_N(X)} \ ;$$

la seconde relation restant valable même si X est dégénérée.

En fait la proposition 1.2.3. (i) montre que les seules correspondances inversibles sont les équivalences de Morita ([21] Corollaire 7.10).

Par ailleurs à l'homomorphisme π_X de M dans $\mathcal{L}_N(X)$, définissant la structure de M-module à gauche, est associée la M-$\mathcal{L}_N(X)$-correspondance $\mathfrak{X}(\pi_X)$ que nous noterons $\mathfrak{I}(X)$. On a alors de manière évidente

$$X = \mathfrak{I}(X) \otimes \mathfrak{U}(X) \qquad \text{et par suite} \qquad \mathfrak{I}(X) = X \otimes \widetilde{X} \ .$$

Remarquons que l'on a également

$$\begin{array}{rclcrclcrcl}
\mathfrak{U}(\mathfrak{U}(X)) & = & \mathfrak{U}(X) & & \mathfrak{U}(\mathfrak{I}(X)) & = & \mathbf{1}_{\mathcal{L}_N(X)} & & \mathfrak{U}(\widetilde{X}) & = & \widetilde{X} \\
\mathfrak{I}(\mathfrak{U}(X)) & = & \mathbf{1}_{\mathcal{L}_N(X)} & & \mathfrak{I}(\mathfrak{I}(X)) & = & \mathfrak{I}(X) & & \mathfrak{I}(\widetilde{X}) & = & \mathbf{1}_N \\
(\mathfrak{U}(X))^{\sim} & = & \widetilde{X} & & (\mathfrak{I}(X))^{\sim} & = & \mathbf{1}_{\mathcal{L}_N(X)} & & \widetilde{\widetilde{X}} & = & \mathfrak{U}(X)
\end{array}$$

1.4. CORRESPONDANCE ADJOINTE. Rappelons ([3] Théorème 2.2) qu'il existe une équivalence de catégories entre $\mathcal{C}(M,N)$ et la catégorie Corr(M,N) des classes d'équivalence unitaire d'espaces de Hilbert muni d'une structure de M-N-bimodule (correspondances au sens de A. Connes [5]). A tout X dans $\mathcal{C}(M,N)$ on fait correspondre $H_X = X \otimes L^2(N)$, et à tout H dans Corr(M,N) est associé $X_H = \mathrm{Hom}_{N^\circ}(L^2(N), H)$. Si H est dans Corr(M,N), l'espace de Hilbert conjugué que nous noterons $\overline{H}^c$ est naturellement muni d'une structure de N-M-bimodule. Donnons l'analogue de cette conjugaison dans notre cadre.

1.4.1. Définition. Nous appellerons *correspondance adjointe* de X dans $\mathcal{C}(M,N)$ la correspondance $\overline{X}$ dans $\mathcal{C}(N,M)$ telle que $H_{\overline{X}} = \overline{H_X}^c$. On a donc

$$\overline{X} = \mathrm{Hom}_{M^\circ}(L^2(M), \overline{X \otimes L^2(N)}^c) .$$

Les actions à gauche et à droite sur $\overline{H_X}^c$ et $\overline{X}$ étant respectivement données pas les formules:

$$\begin{array}{rclcrcl} n \cdot \overline{x \otimes \xi} & = & \overline{x \otimes J_N n J_N \xi} & \qquad & \overline{x \otimes \xi} \cdot m & = & \overline{m^* \cdot x \otimes \xi} \\ n \cdot \alpha & = & \overline{\mathrm{Id}_X \otimes J_N n J_N} \circ \alpha & & \alpha \cdot m & = & \alpha \circ m \end{array}$$

où $(N, L^2(N), J_N, L^2(N)^+)$ est une forme standard, $n \in N, m \in M, x \in X, \xi \in L^2(N), \alpha \in \overline{X}$.

1.4.2. Exemples.

(i) $\overline{1_N} = 1_N$ grâce à l'involution J_N de la forme standard.

(ii) Si (X_i) est une famille de M-N-correspondances, on a $\overline{\oplus X_i} = \oplus \overline{X_i}$. Donc si X' est une sous-correspondance de X, alors $\overline{X'}$ est une sous-correspondance de $\overline{X}$.

Le fait de pouvoir considérer simultanément une correspondance et son adjointe est primordial dans la suite de notre travail. Malheureusement nous ne connaisons pas de méthode générale permettant d'expliciter davantage cette correspondance adjointe. Il existe cependant des situations où un calcul est possible. Dans le cas particulier d'une injection d'une sous-algèbre espérée nous avons le résultat suivant:

1.4.3. Proposition. *Soient N une sous-algèbre de von Neumann de M et F dans $\mathcal{P}_0(M,N)$. Désignons par i l'injection de N dans M. On a alors* $\overline{\mathfrak{X}(i)} = \mathfrak{X}(F)$.

Preuve. Le lemme 2.15 de [3] assure l'existence d'une espérance conditionnelle E de M dans N telle que $\mathfrak{X}(F) = \mathfrak{X}(E)$. Grâce à l'involution antilinéaire J_M de la forme standard $L^2(M)$, le M-N-bimodule $\overline{\mathfrak{X}(i) \otimes L^2(M)}^c$ est isomorphe à $L^2(M)$ considéré comme M-N-bimodule en restreignant à N l'action à droite de M. D'après le corollaire 2.14 de [3] on a donc

$$\mathfrak{X}(E) \otimes L^2(N) = \overline{\mathfrak{X}(i) \otimes L^2(M)}^c .$$

D'où $\mathfrak{X}(F) = \mathfrak{X}(E) = \overline{\mathfrak{X}(i)}$. ∎

1.5. FORME STANDARD. Dans ce paragraphe nous calculons l'adjointe d'une composée et nous déterminons la forme standard de $\mathcal{L}_N(X)$. Ce dernier résultat est l'analogue de la proposition 3.1 de [22]; nous en donnons ici une démonstration où n'intervient que la caractérisation de la forme standard obtenue par Haagerup [8].

1.5.1. LEMME. *Soient X dans $\mathcal{C}(M,N)$, Z dans $\mathcal{C}(P,N)$ et $(N, L^2(N), J, L^2(N)_+)$ une forme standard pour N. Alors il existe U unitaire M-P-linéaire de $X\otimes\overline{H_Z}^c$ sur $\overline{Z\otimes\overline{H_X}^c}^c$ tel que pour tous $x\in X, z\in Z$ et $\xi\in L^2(N)$ on ait*

$$U(x\otimes\overline{z\otimes\xi}) = \overline{z\otimes\overline{x\otimes J\xi}}\ .$$

Preuve. Un calcul immédiat prouve que, pour tous x et x' de X, z et z' de Z, ξ et ξ' de $L^2(N)$, on a

$$\begin{aligned}\langle x\otimes\overline{z\otimes\xi}, x'\otimes\overline{z'\otimes\xi'}\rangle &= \langle J\langle x,x'\rangle J\langle z,z'\rangle(\xi'),\xi\rangle\\ &= \langle\overline{z\otimes\overline{x\otimes J\xi}}, \overline{z'\otimes\overline{x'\otimes J\xi'}}\rangle\ .\end{aligned}$$

Il en résulte l'existence de l'unitaire U. De plus pour tous $m\in M$ et $p\in P$ on a

$$U(m\cdot(x\otimes\overline{z\otimes\xi})\cdot p) = U(mx\otimes\overline{p^*z\otimes\xi}) = \overline{p^*z\otimes\overline{mx\otimes J\xi}} = m\cdot U(x\otimes\overline{z\otimes\xi})\cdot p\ . \ \blacksquare$$

1.5.2. COROLLAIRE. *Soient X dans $\mathcal{C}(M,N)$ et Y dans $\mathcal{C}(N,P)$ deux correspondances. Alors*

$$\overline{X\otimes Y} = \overline{Y}\otimes\overline{X}\ .$$

Preuve. Il est clair que $H_{X\otimes Y} = X\otimes H_Y$. En appliquant le lemme précédent avec $Z=\overline{Y}$, on a dans $\mathcal{C}(P,M)$

$$H_{\overline{Y}\otimes\overline{X}} = \overline{Y}\otimes H_{\overline{X}} = \overline{Y}\otimes\overline{H_X}^c = \overline{X\otimes\overline{H_{\overline{Y}}}^c}^c = \overline{X\otimes H_Y}^c = \overline{H_{X\otimes Y}}^c\ .$$

D'où le résultat. $\blacksquare$

1.5.3. THÉORÈME. *Si X dans $\mathcal{C}(M,N)$ est une équivalence de Morita, c'est à dire si $M=\mathcal{L}_N(X)$, alors*

$$L^2(\mathcal{L}_N(X)) = H_{X\otimes\overline{X}} = X\otimes\overline{H_X}^c\ .$$

Plus précisément, soit $(N, L^2(N), J, L^2(N)_+)$ une forme standard pour N. Il existe une involution antilinéaire J_X sur $X\otimes\overline{H_X}^c = X\otimes\overline{X\otimes L^2(N)}^c$ telle que pour tous x,y dans X et ξ dans $L^2(N)$ on ait

$$J_X(x\otimes\overline{y\otimes\xi}) = y\otimes\overline{x\otimes J\xi}\ .$$

Soient $P_0 = \{x \otimes \overline{x \otimes \xi}; x \in X$ et $\xi \in L^2(N)_+\}$ et P_X le cône convexe fermé engendré par P_0. Par représentation induite, $\mathcal{L}_N(X)$ agit sur $H_{X\otimes\overline{X}}$ et $(\mathcal{L}_N(X), H_{X\otimes\overline{X}}, J_X, P_X)$ est une forme standard pour $\mathcal{L}_N(X)$.

Preuve. D'après le lemme précédent, J_X est une involution antilinéaire sur $X \otimes \overline{H_X}^c$. Soit $S \in \mathcal{L}_N(X)$. On a pour tous x, y dans X et ξ dans $L^2(N)$

$$J_X(S \otimes \mathrm{Id}_{\overline{H_X}^c})J_X(x \otimes \overline{y \otimes \xi}) = J_X(Sy \otimes \overline{x \otimes J\xi}) = x \otimes \overline{Sy \otimes \xi} \ .$$

Donc

$$J_X(S \otimes \overline{\mathrm{Id}_X \otimes \mathrm{Id}_{L^2(N)}})J_X = \mathrm{Id}_X \otimes \overline{S \otimes \mathrm{Id}_{L^2(N)}} \ .$$

Pour toute représentation fidèle de N dans un espace de Hilbert H, le commutant de $\mathcal{L}_N(X)$ dans la représentation induite est constitué des opérateurs $\mathrm{Id}_X \otimes T$ avec T commutant à l'action de N dans H ([21]). Il suffit d'appliquer ce résultat avec $H = L^2(N)$, puis $H = \overline{H_X}^c$, pour obtenir que $J_X\mathcal{L}_N(X)J_X$ est le commutant de $\mathcal{L}_N(X)$ dans $X \otimes \overline{H_X}^c$.

Si $S \in \mathcal{Z}(\mathcal{L}_N(X))$ alors il existe $c \in \mathcal{Z}(N)$ tel que $S = \rho_X(c)$ et on a $JcJ = c^*$. Par suite, pour tous x, y de X et ξ de $L^2(N)$, on a

$$\begin{aligned} J_X\,\rho_X(c)J_X(x \otimes \overline{y \otimes \xi}) &= x \otimes \overline{y \cdot c \otimes \xi} \\ &= x \otimes \overline{y \otimes c \cdot \xi} \\ &= x \otimes \overline{y \otimes Jc^*J \cdot \xi} \\ &= x \otimes \overline{y \otimes \xi \cdot c} \\ &= x \otimes c^* \cdot \overline{y \otimes \xi} \\ &= \rho_X(c^*)x \otimes \overline{y \otimes \xi} \ . \end{aligned}$$

Donc $J_XSJ_X = S^*$ pour tout $S \in \mathcal{Z}(\mathcal{L}_N(X))$.

Il est clair que pour tout $\zeta \in P_0$ on a $J_X\zeta = \zeta$. Donc tout vecteur de P_X est invariant par J_X et $SJ_XSJ_X(P_X) \subset P_X$ pour tout $S \in \mathcal{L}_N(X)$. Pour tous x, y dans X et ξ, η dans $L^2(N)_+$ on a

$$\langle x \otimes \overline{x \otimes \xi}, y \otimes \overline{y \otimes \eta}\rangle = \langle\langle x, y\rangle J\langle x, y\rangle J_\eta, \xi\rangle \geqslant 0 \ .$$

Donc P_0 est inclus dans son polaire $P_0^\vee$ et par suite $P_X \subset P_X^\vee$. Pour achever la démonstration il reste à démontrer l'inclusion inverse qui prouvera que P_X est autopolaire.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une base orthonormale de X. Pour toute partie finie K de I, désignons par p_K le projecteur sur le sous-module de type fini engendré par les

$(a_i)_{i\in K}$ et posons $p'_K = \mathrm{Id}_X - p_K$ et $q_K = p_K J_X p_K J_X = p'_K J_X p'_K J_X + J_X p_K J_X - p'_K$; c'est un projecteur. Pour tous x, y dans X et ξ dans $L^2(N)$ on a

$$\begin{aligned}E &= \langle p'_K J_X p'_K J_X (x \otimes \overline{y \otimes \xi}), x \otimes \overline{y \otimes \xi}\rangle \\ &= \langle p'_K(x) \otimes \overline{p'_K(y) \otimes \xi}, x \otimes \overline{y \otimes \xi}\rangle \\ &= \langle J\langle p'_K(x), x\rangle J\langle p'_K(y), y\rangle \xi, \xi\rangle \\ &= \langle J\langle p'_K(x), x\rangle J\langle p'_K(y), y\rangle^{\frac{1}{2}}\xi, \langle p'_K(y), y\rangle^{\frac{1}{2}}\xi\rangle \\ &\leqslant \|x\|^2 \langle\langle p'_K(y), y\rangle\xi, \xi\rangle\end{aligned}$$

et

$$\langle J_X p_K J_X (x \otimes \overline{y \otimes \xi}), x \otimes \overline{y \otimes \xi}\rangle = \langle J\langle x, x\rangle J\langle p_K(y), y\rangle\xi, \xi\rangle \ .$$

La suite généralisée bornée $(p_K(y))_K$ convergeant dans X vers y pour la topologie σ, il en résulte que $\langle q_K(x \otimes \overline{y \otimes \xi}), x \otimes \overline{y \otimes \xi}\rangle$ tend vers $\|x \otimes \overline{y \otimes \xi}\|^2$. Par polarisations successives puis par densité, on en déduit que $\langle q_K(\zeta), \zeta'\rangle$ tend vers $\langle \zeta, \zeta'\rangle$ pour tous ζ et ζ' dans $\overline{X \otimes \overline{X} \otimes L^2(N)}^c$. Pour tout $\zeta \in P_X^\vee$ on a $q_K(\zeta) \in P_K^\vee$ et il suffit donc de démontrer que $q_K(\zeta)$ est dans P_X. Nous sommes donc ramenés à étudier le cas où X est une module de type fini. Posons donc $I = \{1, \dots, n\}$. Soit $\varphi \in P(N)$ et Tr la trace sur $M_n(\mathbf{C})$. Le poids $\psi = \varphi \otimes \mathrm{Tr}$ définit la forme standard $(N \otimes M_n(\mathbf{C}), H_\varphi \otimes H_{\mathrm{Tr}}, J \otimes J_{\mathrm{Tr}}, P_\psi)$ où P_ψ est le cône engendré par les éléments de la forme $\sum_{i,j} n_i J n_j J\xi \otimes e_{ij}$ avec $\xi \in L^2(N)_+$ et (n_i) dans N. D'après le corollaire 1.2.6. (ii), tout vecteur $\zeta \in \overline{X \otimes \overline{X} \otimes L^2(N)}^c$ s'écrit de manière unique

$$\zeta = \sum_{i,j=1}^{n} a_i \otimes \overline{a_j \otimes \eta_{ij}} \quad \text{avec} \quad J\langle a_i, a_i\rangle J\langle a_j, a_j\rangle \eta_{ij} = \eta_{ij} \ .$$

On vérifie aisément que l'application qui à ζ associe $\sum_{i,j} \eta_{ij} \otimes e_{ij}$ est un isomorphisme de forme standard entre $(\mathcal{L}_N(X), \overline{X \otimes \overline{X} \otimes L^2(N)}^c, J_X, P_X)$ et $(N \otimes M_n(\mathbf{C}), H_\psi, J_\psi, P_\psi)$ réduit par le projecteur $J(\sum_{i=1}^{n} \langle a_i, a_i\rangle \otimes e_{ii}) J(\sum_{i=1}^{n} \langle a_i, a_i\rangle \otimes e_{ii})$ ([8] Proposition 2.6). ∎

1.5.4. COROLLAIRE. *Soit X dans $C(M, N)$ une correspondance non dégénérée.*

(i) $\overline{\mathfrak{U}(X)}$ *est l'inverse* $\widetilde{X}$ *de* $\mathfrak{U}(X)$.

(ii) *Si on oublie la structure de M-module à droite, l'espace* $H_{\mathfrak{U}(X)\otimes\overline{X}}$ *est l'espace standard pour* $\mathcal{L}_N(X)$.

Preuve. Remarquons que $\mathcal{L}_N(\mathfrak{U}(X)) = \mathcal{L}_N(X)$.

(i) D'après le théorème précédent, on a $\mathfrak{U}(X) \otimes \overline{\mathfrak{U}(X)} = \mathbf{1}_{\mathcal{L}_N(X)}$. Par unicité de l'inverse il en résulte que $\overline{\mathfrak{U}(X)} = \widetilde{X}$.

(ii) Il suffit de remarquer que si on oublie la structure de module à droite, il y a identité entre les espaces de Hilbert $\overline{H_{\mathfrak{U}(X)}}^c \doteq \overline{\mathfrak{U}(X) \otimes L^2(N)}^c$ et $H_{\overline{X}} = \overline{X \otimes L^2(N)}^c$ munis de l'action de N à gauche. ∎

Nous venons de calculer la correspondance adjointe d'une équivalence de Morita et sommes maintenant en mesure de caractériser la correspondance associée à certains poids opératoriel finis qui interviennent naturellement dans notre étude.

1.5.5. LEMME. *Soient X dans $\mathcal{C}(M,N)$ et Y dans $\mathcal{C}(N,M)$ deux correspondances non dégénérées. Pour tout vecteur $v \in c(X \otimes Y)$ on définit l'application F_v de $\mathcal{L}_N(X)$ dans M et l'application F_v° de ${}_N\mathcal{L}_M(Y)$ dans $\mathcal{Z}(M)$ par:*

$$\forall S \in \mathcal{L}_N(X) \quad F_v(S) = \langle v, S \cdot v\rangle \quad \text{et} \quad \forall T \in {}_N\mathcal{L}_M(Y) \quad F_v^\circ(T) = \langle v, v \cdot T^\circ\rangle \ .$$

Si nous identifions M avec la sous-algèbre $\pi_X(M)$ de $\mathcal{L}_N(X)$ et $\mathcal{Z}(M)$ avec $\rho_Y(\mathcal{Z}(M))$ dans ${}_N\mathcal{L}_M(Y)$, alors F_v et F_v° sont des poids opératoriel normaux finis.

Preuve. La linéarité et la normalité de F_v et F_v° sont évidentes. Pour tout $m \in M$ et tout $S \in \mathcal{L}_N(X)$ on a, puisque v est central,

$$F_v(\pi_X(m)^* S \pi_X(m)) = \langle v, \pi_X(m^*) S \pi_X(m) \cdot v\rangle = \langle m \cdot v, S \cdot v \cdot m\rangle = m^* F_v(S) m \ .$$

Pour tout $T \in {}_N\mathcal{L}_M(Y)$ le vecteur $v \cdot T^\circ = (\mathrm{Id}_X \otimes T)(v)$ appartient à $c(X \otimes Y)$ et par suite F_v° est à valeurs dans $\mathcal{Z}(M)$. De plus pour tout $c \in \mathcal{Z}(M)$ on a

$$F_v^\circ(\rho_Y(c)^* T \rho_Y(c)) = \langle v, v \cdot (\rho_Y(c^*) T \rho_Y(c))^\circ\rangle = c^* \langle v, v \cdot T^\circ\rangle c = c^* F_v^\circ(T) c \ . \quad ∎$$

1.5.6. PROPOSITION. *Soit X dans $\mathcal{C}(M,N)$ une correspondance non dégénérée.*

(i) *Soit F appartenant à $\mathcal{P}_0(\mathcal{L}_N(X), M)$. Alors*

$$\mathfrak{X}(F) = \mathfrak{U}(X) \otimes \overline{X} \ .$$

De plus il existe un vecteur v de $c(X \otimes \overline{X})$ tel que $F = F_v$ et $\overline{X} = \widetilde{X} \otimes \mathfrak{X}(F)$.

(ii) *Si E est une espérance conditionnelle normale de $\mathcal{L}_N(X)$ dans M alors il existe un vecteur v de $c(X \otimes \overline{X})$ tel que $E = F_v$.*

Preuve.

(i) D'après 1.3.4, la proposition 1.4.3 et les corollaires 1.5.2 et 1.5.4, on a

$$\mathfrak{X}(F) = \overline{\mathfrak{I}(X)} = \overline{X \otimes \widetilde{X}} = \mathfrak{U}(X) \otimes \overline{X} \ .$$

D'où $\overline{X} = \widetilde{X} \otimes \mathfrak{X}(F)$. Le vecteur v est donné par $\Lambda_F(\mathrm{Id}_X)$.

(ii) Soit e le support de E; c'est un projecteur de ${}_M\mathcal{L}_N(X)$. Désignons par π_e l'application de M dans $e_M\mathcal{L}_N(X)e$ telle que $\pi_e(m) = \pi_X(m)e$ pour tout $m \in M$; c'est un homomorphisme injectif, car si $\pi_X(m)(e) = 0$ alors $0 = E(\pi_X(m)e) = mE(e) = m$. Par suite $e(X)$ est une M-N-correspondance non dégénérée et E définit par restriction une espérance conditionnelle normale fidèle de $e\mathcal{L}_N(X)e = \mathcal{L}_N(e(X))$ dans M. Il existe donc un vecteur $v \in c(e(X) \otimes \overline{e(X)}) \subset c(X \otimes \overline{X})$ tel que pour tout $S \in \mathcal{L}_N(X)$ on ait

$$\langle v, S \cdot v\rangle = \langle v, eSe \cdot v\rangle = E(eSe) = E(S) \ . \quad \blacksquare$$

1.6. TOURS DE JONES.

1.6.1. DÉFINITION. Soit X une correspondance dans $C(M, N)$. Posons

$$M_{-1} = N \quad ; \quad M_0 = M \quad ; \quad X_0 = X \quad ;$$

et définissons

$$M_1 = \mathcal{L}_N(X) \quad \text{et} \quad X_1 = \mathfrak{U}(X) \otimes \overline{X} \ .$$

En itérant cette construction de base nous obtenons une tour (M_n) d'algèbres de von Neumann et une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de M_n-M_{n-1}-correspondances telles que

$$M_{n+1} = \mathcal{L}_{M_{n-1}}(X_n) \quad \text{et} \quad X_{n+1} = \mathfrak{U}(X_n) \otimes \overline{X_n} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 0 \ .$$

1.6.2. PROPOSITION. *Soit X dans $C(M, N)$ une correspondance non dégénérée. Pour tout $n \in \mathbf{N}$*

(i) *la correspondance X_n est non dégénérée et M_n s'identifie à une sous-algègre de von Neumann de M_{n+1}. La correspondance définie par cette injection est $\mathfrak{I}(X_n) = \overline{X_{n+1}}$,*

(ii) $H_{X_{n+1}} = L^2(M_{n+1})$,

(iii) $\overline{X_{n+1}} \otimes X_{n+1} = X_n \otimes \overline{X_n}$,

(iv) *pour $1 \leqslant k \leqslant n$ on a* $\overline{X_{n+1}} \otimes X_{n+1} \otimes X_n \otimes \cdots \otimes X_{k+1} = X_n \otimes X_{n-1} \otimes \cdots \otimes X_k \otimes \overline{X_k}$,

(v) *pour $0 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}$ on a* $\quad M_{n+1} = \mathcal{L}_{M_{n-2k-1}}(X_{n-k} \otimes \cdots \otimes X_{n-2k})$,

(vi) $M_{2n} = \mathcal{L}_M((X \otimes \overline{X})^{\otimes n})$ *et* $\quad M_{2n+1} = \mathcal{L}_N((X \otimes \overline{X})^{\otimes n} \otimes X)$,

(vii) ${}_{M_{n+1}}\mathcal{L}_{M_n}(X_{n+1}) = \mathrm{Id}_{X_n} \otimes {}_{M_{n-1}}\mathcal{L}_{M_n}(\overline{X_n})$,

(viii) *si X est irréductible alors X_n est irréductible.*

Preuve. (i) Il est clair que X_n est non dégénérée, et par définition $\mathfrak{I}(X_n)$ est la correspondance de l'injection de M_n dans M_{n+1}. Or $\mathfrak{I}(X_n) \doteq X_n \otimes \overline{\mathfrak{U}(X_n)} = \overline{X_{n+1}}$.

L'assertion (ii) résulte du corollaire 1.5.4. (ii).

(iii) $\overline{X_{n+1}} \otimes X_{n+1} = \mathfrak{I}(X_n) \otimes \mathfrak{U}(X_n) \otimes \overline{X_n} = X_n \otimes \overline{X_n}$.

(iv) Il suffit d'appliquer la formule précédente pour chaque entier de n à k.

(v) Montrons la formule par récurrence sur k. Elle est vraie pour $k = 0$. Supposons la vérifiée en k; on a d'après la proposition 1.2.3

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= \mathcal{L}_{M_{n-2k-1}}(X_{n-k} \otimes \cdots \otimes X_{n-2k}) \\ &= \mathcal{L}_{M_{n-2k-1}}(\mathfrak{U}(X_{n-k-1}) \otimes \overline{X_{n-k-1}} \otimes X_{n-k-1} \otimes \cdots \otimes X_{n-2k}) \\ &= \mathcal{L}_{M_{n-2k-1}}(X_{n-k-1} \otimes X_{n-k-2} \otimes \cdots \otimes X_{n-2k-1} \otimes \overline{X_{n-2k-1}}) \\ &= \mathcal{L}_{M_{n-2k-3}}(X_{n-k-1} \otimes X_{n-k-2} \otimes \cdots \otimes X_{n-2k-1} \otimes X_{n-2k-2}). \end{aligned}$$

(vi) En appliquant (v) avec $n = 2k$ on a donc

$$\begin{aligned} M_{2n+1} &= \mathcal{L}_N(X_k \otimes \cdots \otimes X_0) \\ &= \mathcal{L}_N(X_{k-1} \otimes \overline{X_{k-1}} \otimes X_{k-1} \otimes \cdots \otimes X_0) \\ &= \mathcal{L}_N(X_{k-1} \otimes \cdots \otimes X_1 \otimes X_0 \otimes \overline{X_0} \otimes X_0). \end{aligned}$$

Il suffit d'itérer le procédé pour conclure. Le même raisonnement s'applique pour les algègres M_{2n}.

(vii) ${}_{M_{n+1}}\mathcal{L}_{M_n}(X_{n+1}) = {}_{M_{n+1}}\mathcal{L}_{M_n}(\mathfrak{U}(X_n) \otimes \overline{X_n}) = \mathrm{Id}_{X_n} \otimes {}_{M_{n-1}}\mathcal{L}_{M_n}(\overline{X_n})$ d'après la proposition 1.2.3.

(viii) découle immédiatement de (vii). ∎

1.6.3. Remarques. (i) Nous pouvons également définir une deuxième tour (N_n) d'algèbres de von Neumann et une autre suite $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de N_n-N_{n-1}-correspondances à partir de $\overline{X}$ par:

$$N_{-1} = M \quad ; \quad N_0 = N \quad ; \quad Y_0 = \overline{X} \quad ;$$

$$N_{n+1} = \mathcal{L}_{N_{n-1}}(Y_n) \quad \text{et} \quad Y_{n+1} = \mathfrak{U}(Y_n) \otimes \overline{Y_n} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 0 .$$

(ii) Dans le cas d'une inclusion ι d'une sous-algèbre de von Neumann N dans M, si nous partons de $X = \overline{\mathfrak{X}(\iota)}$, nous obtenons

$$N_0 = N = M_{-1} \quad , \quad N_1 = \mathcal{L}_M(Y_0) = M_0 \quad , \quad Y_1 = \mathfrak{U}(Y_0) \otimes X = \mathbf{1}_M \otimes X = X_0 \quad ,$$

$$Y_2 = \mathfrak{U}(Y_1) \otimes \overline{Y_1} = \mathfrak{U}(X_0) \otimes \overline{X} = X_1 .$$

Donc pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $N_{n+1} = M_n$ et $Y_{n+1} = X_n$. La construction de base se réduit en fait ici à une seule tour.

(iii) L'assertion (v) de la proposition précédente prouve que l'algèbre obtenue par construction de base à partir de $X_{n-k} \otimes \cdots \otimes X_{n-2k}$ est l'algèbre M_{n+1}. Nous obtenons donc une généralisation du théorème 2.6 de [18].

2. OPÉRATEURS DE HILBERT-SCHMIDT

Dans ce chapitre nous développons les principaux outils techniques utilisés ensuite pour définir l'indice. Nous introduisons tout d'abord les opérateurs de Hilbert-Schmidt entre une N-M et une M-N-correspondances, nous les caractérisons parmi les opérateurs antilinéaires et nous nous intéressons à leurs supports. A partir de tout vecteur u appartenant à une composée de correspondances, nous définissons de manière naturelle, par tensorisation à gauche ou à droite par u, des opérateurs linéaires que nous relions aux opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Dans tout ce chapitre, X désignera une M-N-correspondance et Y une N-M-correspondance.

2.1. DÉFINITION DES OPÉRATEURS DE HILBERT-SCHMIDT.

2.1.1. PROPOSITION. *Pour tout vecteur u de $Y \otimes X$ il existe un unique opérateur, noté $\widehat{u}$, antilinéaire de Y dans X tel que*

$$\forall y \in Y \quad \forall x \in X \quad \langle \widehat{u}(y), x\rangle = \langle u, y \otimes x\rangle \ .$$

On a alors

(i) *Pour tout $y \in Y$ et tout $m \in M, \widehat{u}(y \cdot m) = m^* \cdot \widehat{u}(y)$.*

(ii) *Pour tout $T \in \mathcal{L}_M(Y)$ et tout $S \in {}_M\mathcal{L}_N(X)$ on a $\widehat{TuS^{\circ}} = S \circ \widehat{u} \circ T^*$.*

(iii) *$\widehat{u}$ est N-M-antilinéaire si et seulement si u est central.*

(iv) *$\widehat{u}$ est normiquement continu et $\|\widehat{u}\| \leqslant \|u\|$.*

(v) *$\widehat{u}$ est continu pour les topologies σ sur les parties bornées.*

(vi) *Si (b_j) est une quasi-base de Y, alors $u = \sum_j b_j \otimes \widehat{u}(b_j)$ en topologie σ, et pour tout vecteur u' de $Y \otimes X$ on a $\langle u, u'\rangle = \sum_j \langle \widehat{u}(b_j), \widehat{u}'(b_j)\rangle$.*

(vii) *Pour tous y, y' de Y et tous u, u' de $Y \otimes X$ on a*

$$\theta_{y,y'} \cdot u = y \otimes \widehat{u}(y') \quad \text{et} \quad \langle \widehat{u}(y), \widehat{u}'(y')\rangle = \langle u, \theta_{y,y'} \cdot u'\rangle \ .$$

(viii) *L'application $u \longmapsto \widehat{u}$ est injective.*

Preuve. Soit $y \in Y$ fixé. L'application de X dans N, qui à x associe $\langle u, y \otimes x\rangle$, est N-linéaire et continue car

$$\|\langle u, y \otimes x\rangle\| \leqslant \|u\| \, \|y \otimes x\| \leqslant \|u\| \, \|y\| \, \|x\| \ .$$

X étant autodual, il existe un unique vecteur noté $\widehat{u}(y)$ dans X tel que

$$\langle \widehat{u}(y), x\rangle = \langle u, y \otimes x\rangle \ .$$

Il est clair que $\widehat{u}$ est antilinéaire de Y dans X.

(i) Pour tous $m \in M, y \in Y$ et $x \in X$, on a

$$\langle \widehat{u}(y \cdot m), x\rangle = \langle u, y \cdot m \otimes x\rangle = \langle u, y \otimes m \cdot x\rangle = \langle \widehat{u}(y), m \cdot x\rangle = \langle m^* \cdot \widehat{u}(y), x\rangle \ .$$

(ii) Soient $(x, y) \in X \times Y$. On a

$$\begin{aligned}\langle \widehat{TuS^\circ}(y), x\rangle &= \langle T \cdot u \cdot S^\circ, y \otimes x\rangle \\ &= \langle u, T^*(y) \otimes S^*(x)\rangle \\ &= \langle \widehat{u}(T^*(y)), S^*(x)\rangle \\ &= \langle S\widehat{u}T^*(y), x\rangle \ .\end{aligned}$$

(iii) Soient $n \in N, y \in Y$ et $x \in X$. On a

$$\langle u \cdot n, y \otimes x\rangle = n^*\langle u, y \otimes x\rangle = \langle \widehat{u}(y) \cdot n, x\rangle$$

et

$$\langle n \cdot u, y \otimes x\rangle = \langle u, n^* \cdot y \otimes x\rangle = \langle \widehat{u}(n^* \cdot y), x\rangle \ .$$

L'assertion (iii) est alors claire.

(iv) On a, pour tout $y \in Y$,

$$\|\widehat{u}(y)\|^2 = \|\langle u, y \otimes \widehat{u}(y)\rangle\| \leqslant \|u\| \, \|\widehat{u}(y)\| \, \|y\|$$

d'où $\|\widehat{u}\| \leqslant \|u\|$.

(v) Soit (y_j) une suite généralisée bornée de Y qui converge vers 0 pour la topologie σ. Alors (Lemme 1.2.4), pour tout x de X, la suite généralisée $(y_j \otimes x)_j$ converge vers 0 pour la topologie σ et par suite il en est de même pour $\widehat{u}(y_j)$.

(vi) et (vii) Soit (a_i) une base orthonormale de X. On a pour tout j

$$\sum_i a_i \cdot \langle b_j \otimes a_i, u\rangle = \sum_i a_i \cdot \langle a_i, \widehat{u}(b_j)\rangle = \widehat{u}(b_j)$$

il résulte du théorème 1.2.5 que $u = \sum_j b_j \otimes \widehat{u}(b_j)$. Soient y, y' dans Y et $u \in Y \otimes X$. On a d'après (i) et (v)

$$\begin{aligned} y \otimes \widehat{u}(y') &= y \otimes \widehat{u}\Big(\sum_j b_j \cdot \langle b_j, y'\rangle\Big) \\ &= y \otimes \sum_j \langle g', b_j\rangle \cdot \widehat{u}(b_j) \\ &= \sum_j y \cdot \langle y', b_j\rangle \otimes \widehat{u}(b_j) \\ &= \sum_j \theta_{y,y'}(b_j) \otimes \widehat{u}(b_j) \\ &= (\theta_{y,y'} \otimes \mathrm{Id}_X)(u). \end{aligned}$$

Soit $y = z \cdot \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}$ la décomposition polaire de y dans Y. Alors $q = \langle z, z\rangle$ est le projecteur support de $\langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}$ et si u' est un autre vecteur de $Y \otimes X$, on a d'une part

$$\langle z \otimes \widehat{u}(y), z \otimes \widehat{u'}(y)\rangle = \langle \widehat{u}(y), \langle z, z\rangle \cdot \widehat{u'}(y)\rangle = \langle \widehat{u}(y), \widehat{u'}(y \cdot q)\rangle = \langle \widehat{u}(y), \widehat{u'}(y)\rangle$$

et d'autre part

$$\langle z \otimes \widehat{u}(y), z \otimes \widehat{u}'(y), \rangle = \langle \theta_{z,y} \cdot u, \theta_{z,y} \cdot u'\rangle = \langle u, \theta_{y\cdot\langle z,z\rangle,y} \cdot u'\rangle = \langle u, \theta_{y,y} \cdot u'\rangle \ .$$

La formule générale s'obtient par polarisation. Par suite on a

$$\langle u, u'\rangle = \sum_j \langle u, \theta_{b_j,b_j} \cdot u'\rangle = \sum_j \langle \widehat{u}(b_j), \widehat{u}(b_j), \widehat{u}'(b_j)\rangle \ .$$

L'assertion (viii) est immédiate. ∎

2.1.2. DÉFINITION. Soit u appartenant à $Y \otimes X$. L'opérateur $\widehat{u}$ de la proposition précédènte sera appelé *l'opérateur de Hilbert-Schmidt défini par u.*

2.1.3. EXEMPLES. (i) Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert et $x_i \in \mathcal{H}_i$ pour $i = 1, 2$. On sait que l'application $T_{x_1,x_2} : \overline{y_1} \longmapsto \langle x_1, y_1\rangle x_2$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt de $\overline{\mathcal{H}_1}$ dans $\mathcal{H}_2$ et on vérifie immédiatement que $T_{x_1,x_2} = \widehat{\overline{x_1} \otimes x_2}$.

(ii) Si $X = Y = \mathbf{1}_N$ et $u = 1 \otimes 1$, on a $\widehat{u}(n) = n^*$ pour tout $n \in N$.

(iii) Si X est une équivalence de Morita alors l'opérateur de Hilbert-Schmidt défini par $u = 1_N$ appartenant à $\mathbf{1}_N = \widetilde{X} \otimes X$ est l'application $\widetilde{x} \longmapsto x$ de $\widetilde{X}$ dans X, et pour $v = 1_M = \mathrm{Id}_X$ dans $X \otimes \widetilde{X}, \widehat{v}(x) = \widetilde{x}$ pour tout $x \in X$.

(iv) On suppose $N \subset M$ et on considère $E \in \mathcal{P}_0(M, N)$. Si $u = 1 \otimes \xi_E \in \mathfrak{X}(\iota) \otimes \mathfrak{X}(E)$, alors pour tout $y \in \mathfrak{X}(\iota) = M$, on a $\widehat{u}(y) = \Lambda_E(y^*)$. Si de plus E est d'indice fini au sens de ([3] Définition 3.6) alors l'unique vecteur $\eta \in \mathfrak{X}(E) \otimes \mathfrak{X}(\iota)$ tel que $\langle \eta, \xi_E \otimes 1\rangle = 1$ ([3] Théorème 3.5) vérifie $\widehat{\eta}(\Lambda_E(y)) = y^*$.

En effet, pour tout x de M

$$\langle \widehat{u}(y), \Lambda_E(x)\rangle = \langle 1 \otimes \xi_E, y \otimes \Lambda_E(x)\rangle = \langle \xi_E, y \cdot \Lambda_E(x)\rangle = \langle \Lambda_E(y^*), \Lambda_E(x)\rangle$$

et, puisque η est central $\quad \langle \widehat{\eta}(\Lambda_E(x), y\rangle = \langle \eta, x \cdot (\xi_E \otimes 1) \cdot y\rangle = x^*y.$

(v) Pour $i = 1, 2$ soient X_i (respectivement Y_i) une M-N-correspondance (respectivement N-M-correspondance) et $u_i \in Y_i \otimes X_i$. Les plongements canoniques de $Y_1 \otimes X_1$ et $Y_2 \otimes X_2$ dans $(Y_1 \oplus Y_2) \otimes (X_1 \oplus X_2)$ permettent de considérer le vecteur $u = u_1 \oplus u_2$ et on a $\widehat{u} = \widehat{u_1} \oplus \widehat{u_2}$.

2.1.4. REMARQUES. Il est clair que l'opérateur de Hilbert-Schmidt défini par un vecteur dépend de son appartenance à un produit tensoriel et de la décomposition de ce produit tensoriel.

En effet si w appartient à $Z \otimes Y \otimes X$ on peut définir ${}_{Y\otimes X}\widehat{w}_Z$ de Z dans $Y \otimes X$ et ${}_X\widehat{w}_{Z\otimes Y}$ de $Z \otimes Y$ dans X; on vérifie facilement qu'on a pour tous $y \in Y$ et $z \in Z$

$$ {}_X\widehat{({}_{Y\otimes X}\widehat{w}_Z(z))}_Y(y) = {}_X\widehat{w}_{Z\otimes Y}(z \otimes y) \,. $$

Signalons dès maintenant que l'utilisation de deux décompositions d'un même produit tensoriel sera un outil essentiel dans notre construction de base (cf. Section 3.3.).

Dans la suite, pour ne pas alourdir les notations, nous nous contenterons de ne préciser par un parenthésage, la décomposition du produit tensoriel, qu'en cas d'ambiguité.

Terminons ce paragraphe par un lemme qui est une réciproque partielle de l'assertion (vi) de la proposition précédente.

2.1.5. LEMME. *Soit $(b_j)_{j\in J}$ une quasi-base de Y et $(x_j)_{j\in J}$ une famille de X telle que $(\langle x_j, x_j\rangle)_{j\in J}$ soit ultrafaiblement sommable dans N. Alors la famille $(b_j \otimes x_j)_{j\in J}$ est sommable dans $Y \otimes X$ pour la topologie σ.*

Preuve. Soit K une partie finie de J de cardinal k et soit $u \in Y \otimes X$. En passant par l'intermédiaire de la correspondance X^k, on obtient

$$ \Big\langle u, \sum_{j\in K} b_j \otimes x_j \Big\rangle = \sum_{j\in K} \langle \widehat{u}(b_j), x_j\rangle = \langle (\widehat{u}(b_j)), (x_j)\rangle \,. $$

D'où

$$ \begin{aligned} \Big\langle u, \sum_{j\in K} b_j \otimes x_j \Big\rangle^* \Big\langle u, \sum_{j\in K} b_j \otimes x_j \Big\rangle &\leqslant \Big\| \sum_{j\in K} \langle \widehat{u}(b_j), \widehat{u}(b_j)\rangle \Big\| \sum_{j\in K} \langle x_j, x_j\rangle \\ &\leqslant \|u\|^2 \sum_{j\in K} \langle x_j, x_j\rangle \\ &\leqslant \|u\|^2 \sum_{j\in J} \langle x_j, x_j\rangle \,. \end{aligned} $$

Il en résulte que la famille $(\sum_{j\in K} b_j \otimes x_j)_{K\in\mathcal{P}_f(J)}$ est bornée et que pour tout $\varphi \in N_*^+$ on a

$$ \Big|\varphi\Big(\Big\langle u, \sum_{j\in K} b_j \otimes x_j \Big\rangle\Big)\Big| \leqslant \|\varphi\|^{\frac{1}{2}} \|u\| \Big(\varphi\Big(\sum_{j\in K} \langle x_j, x_j\rangle\Big)\Big)^{\frac{1}{2}} \,. $$

Par suite $(\sum_{j\in K} b_j \otimes x_j)_{K\in\mathcal{P}_f(J)}$ est de Cauchy dans l'espace quasi-complet (X, σ) et converge. ∎

2.2. CARACTÉRISATION DES OPÉRATEURS DE HILBERT-SCHMIDT.

2.2.1. LEMME. *Soit ω une application M-antilinéaire de Y dans X. Alors ω est normiquement continue si et seulement si*

$$\exists K \in \mathbf{R}^+ \quad \forall y \in Y \quad \theta_{\omega(y),\omega(y)} \leqslant K\pi_X(\langle y,y\rangle) .$$

Preuve. Si cette condition est réalisée, on a pour tout $y \in Y$ (Lemme 1.3.1)

$$\|\omega(y)\|^2 = \|\theta_{\omega(y),\omega(y)}\| \leqslant K^2\|y\|^2 .$$

Réciproquement, soit $y \in Y$. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on pose $m_k = (\langle y,y\rangle + \frac{1}{k})^{-\frac{1}{2}}$. Alors on a dans $\mathcal{L}_N(X)$

$$\begin{aligned} \pi_X(m_k) \circ \theta_{\omega(y),\omega(y)} \circ \pi_X(m_k) &= \theta_{\omega(y\cdot m_k),\omega(y\cdot m_k)} \\ &\leqslant \|\omega(y\cdot m_k)\|^2 \mathrm{Id}\,_X \\ &\leqslant \|\omega\|^2 \mathrm{Id}\,_X . \end{aligned}$$

Donc, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$

$$\theta_{\omega(y),\omega(y)} \leqslant \|\omega\|^2 \pi_X(m_k^{-2}) = \|\omega\|^2 \pi_X\left(\langle y,y\rangle + \frac{1}{k}\right)$$

d'où

$$\theta_{\omega(y),\omega(y)} \leqslant \|\omega\|^2 \pi_X(\langle y,y\rangle) .$$

2.2.2. THÉORÈME. *Soit ω une application* M*-antilinéaire de Y dans X. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *ω est l'opérateur de Hilbert-Schmidt défini par un vecteur $u \in Y \otimes X$.*

(ii) *Il existe $K \in \mathbf{R}^+$ tel que, pour toute famille finie $(y_j)_{j=1,\ldots,n}$ de Y, on ait dans $M_n(\mathcal{L}_N(X)) = \mathcal{L}_N(X^n)$*

$$(\theta_{\omega(y_i),\omega(y_j)}) \leqslant K(\pi_X(\langle y_i,y_j\rangle)) .$$

(iii) *Il existe $K \in \mathbf{R}^+$ tel que pour toute algèbre de von Neumann P l'application $(y \otimes p) \longmapsto \omega(y) \otimes p^*$ admette un prolongement continu du produit tensoriel extérieur $Y \underset{e}{\otimes} P$ dans le produit tensoriel extérieur $X \underset{e}{\otimes} P$, de norme plus petite que K.*

(iv) *Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ l'application $(y \otimes A) \longmapsto \omega(Y) \otimes A^*$ admet un prolongement continu ω_k de $Y \underset{e}{\otimes} M_k(\mathbf{C})$ dans $X \underset{e}{\otimes} M_k(\mathbf{C})$ tel que $\sup\limits_k \|\omega_k\|$ soit fini.*

(v) *ω est σ-continue sur les parties bornées et pour toute quasi-base (b_j) de Y la famille $(\langle\omega(b_j),\omega(b_j)\rangle)$ est ultrafaiblement sommable.*

(vi) *ω est σ-continue sur les parties bornées et il existe une quasi-base (b_j) de Y telle que la famille $(\langle\omega(b_j),\omega(b_j)\rangle)$ soit ultrafaiblement sommable.*

Preuve. (i) $\Longrightarrow$ (iii) Soit $v = 1 \otimes 1 \in P \otimes P$. Il est clair que $(\widehat{u \otimes v})(y \otimes p) = \omega(y) \otimes p^*$ pour tous $y \in Y$ et $p \in P$ avec $\|\widehat{u \otimes v}\| \leqslant \|u \otimes v\| = \|u\|$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Implication évidente.

(iv) $\Longrightarrow$ (ii) Soit $K = \sup_n \|\omega_n\|$. Notons e_{ij} les unités matricielles de $M_n(\mathbf{C})$. Pour toute famille finie $(y_i)_{i=1,\dots,n}$ de Y posons

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes e_{1i} \in Y \underset{e}{\otimes} M_n(\mathbf{C}).$$

On a

$$\omega_n(y) = \sum_{i=1}^{n} \omega(y_i) \otimes e_{i1} \ .$$

Soit $x \otimes e_{k\ell} \in X \underset{e}{\otimes} M_n(\mathbf{C})$. On a

$$\begin{aligned}\theta_{\omega_n(y),\omega_n(y)}(x \otimes e_{k\ell}) &= \sum_{i,j} (\omega(y_i) \otimes e_{i1}) \langle \omega(y_j) \otimes e_{j1}, x \otimes e_{k\ell} \rangle \\ &= \sum_{i} (\omega(y_i) \otimes e_{i1}) (\langle \omega(y_k), x \rangle \otimes e_{1\ell}) \\ &= \sum_{i} \omega(y_i) \cdot \langle \omega(y_k), x \rangle \otimes e_{i\ell} \ .\end{aligned}$$

En identifiant, M_n avec $\mathcal{L}_{M_n}(M_n)$ on a par ailleurs

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i,j} \theta_{\omega(y_i),\omega(y_j)} \otimes e_{ij}\Big)(x \otimes e_{k\ell}) &= \sum_{i,j} \theta_{\omega(y_i),\omega(y_j)}(x) \otimes e_{ij} e_{k\ell} \\ &= \sum_{j} \theta_{\omega(y_i),\omega(y_k)}(x) \otimes e_{i\ell} \ .\end{aligned}$$

Donc

$$\theta_{\omega_n(y),\omega_n(y)} = \sum_{i,j} \theta_{\omega(y_i),\omega(y_j)} \otimes e_{ij} \ .$$

L'implication résulte alors du lemme précédent.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Puisque ω est M-antilinéaire, on définit une application N-linéaire φ de $Y \odot X$ dans N en posant pour tout $u' = \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes x_i \in Y \odot X$

$$\varphi(u') = \sum_{i=1}^{n} \langle \omega(y_i), x_i \rangle \ .$$

En munissant X^n de sa structure de N-module, on obtient

$$\begin{aligned}\langle u', u'\rangle &= \sum_{i,j} \langle x_i, \langle y_i, y_j\rangle \cdot x_j\rangle \\ &= \langle (x_i), \Big(\pi_X(\langle y_i, y_j\rangle)\Big)(x_i)\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(u')^*\varphi(u') &= \sum_{i,j} \langle x_i, \omega(y_i)\rangle\langle \omega(y_j), x_j\rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle x_i, \theta_{\omega(y_i),\omega(y_j)} x_j\rangle \\ &= \langle (x_i), (\theta_{\omega(y_i),\omega(y_j)})(x_j)\rangle \ .\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\|\varphi(u')\|^2 &= \|\langle (x_i), (\theta_{\omega(y_i),\omega(y_j)})(x_j)\rangle\| \\ &\leqslant K \|\langle (x_i), (\pi_X(\langle y_i, y_j\rangle))(x_j)\rangle\| \\ &= K\|u'\|^2 \ .\end{aligned}$$

Le module $Y \otimes X$ étant autodual on en déduit l'existence d'un vecteur u de $Y \otimes X$ tel que $\omega = \widehat{u}$.

(i) $\Longrightarrow$ (v) L'implication résulte des assertions (v) et (vi) de la proposition 2.1.1.

(v) $\Longrightarrow$ (vi) Implication évidente.

(vi) $\Longrightarrow$ (i) D'après le lemme 2.1.5, il existe $u = \sum b_j \otimes \omega(b_j)$. Puisque $\widehat{u}$ et ω sont M-antilinéaires et σ-continues sur les parties bornées, il suffit de vérifier qu'elles coïncident sur les éléments de la quasi-base (b_j). Or pour tout $x \in X$ on a

$$\begin{aligned}\langle \widehat{u}(b_j), x\rangle &= \langle u, b_j \otimes x\rangle \\ &= \sum_{j\in J} \langle b_k \otimes \omega(b_k), b_j \otimes x\rangle \\ &= \langle \omega\Big(\sum_{k\in J} b_k \cdot \langle b_k, b_j\rangle\Big), x\rangle \\ &= \langle \omega(b_j), x\rangle \ . \ \blacksquare\end{aligned}$$

2.2.3. REMARQUE. La démonstration de l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) du théorème prédédent montre que:
si ω est une application M-antilinéaire d'un sous-module Y_0, σ-dense dans Y, et à valeurs dans X et s'il existe $K \in \mathbf{R}^+$ tel que, pour toute famille finie $(y_j)_{j=1,\dots,n}$ de Y_0 on ait dans $M_n(\mathcal{L}_N(X))$

$$(\theta_{\omega(y_i),\omega(y_j)}) \leqslant K(\pi_X(\langle y_i, y_j\rangle)) \ ,$$

alors il existe $u \in Y \otimes X$ tel que $\widehat{u}$ prolonge ω.

2.3. Supports d'un vecteur d'un produit tensoriel.

2.3.1. Lemme. *Soit u un vecteur de $Y \otimes X$.*

(a) *Il existe un unique projecteur $p \in {}_M\mathcal{L}_N(X)$ caractérisé par l'une des propriétés équivalentes suivantes:*

(i) *p est le projecteur orthogonal sur le M-N-bimodule autodual engendré par $\widehat{u}(Y)$.*

(ii) *p est le plus petit projecteur de ${}_M\mathcal{L}_N(X)$ tel que $u \cdot p^\circ = u$.*

(iii) *p est le plus petit projecteur de ${}_M\mathcal{L}_N(X)$ tel que $p \circ \widehat{u} = \widehat{u}$.*

(b) *Il existe un unique projecteur $q \in \mathcal{L}_M(Y)$ caractérisé par l'une des propriétés équivalentes suivantes:*

(i) $\ker(\widehat{u}) = (1-q)(Y)$.

(ii) *q est le plus petit projecteur de $\mathcal{L}_M(Y)$ tel que $q \cdot u = u$.*

(iii) *q est le plus petit projecteur de $\mathcal{L}_M(Y)$ tel que $\widehat{u} \circ q = \widehat{u}$.*

(c) *Si de plus u est central, alors*

(i) *$p(X) = \overline{\widehat{u}(Y)}^{\sigma}$ et q est le plus petit projecteur de ${}_N\mathcal{L}_M(Y)$ tel que $\widehat{u} \circ q = \widehat{u}$.*

(ii) *p est le support de F_u°.*

(iii) *q est le support de F_u.*

Preuve. Par construction, le projecteur orthogonal sur le M-N-bimodule autodual engendré par $\widehat{u}(Y)$ est dans ${}_M\mathcal{L}_N(X)$. Les démonstrations des équivalences entre (i) et (iii) dans (a) et (b) sont analogues à celles définissant les supports d'un élément d'une algèbre de von Neumann. L'assertion (ii) de la proposition 2.1.1 rend évidentes les autres équivalences.

L'assertion (i) dans (c) résulte du fait que si u est central alors $\widehat{u}(Y)$ est un M-N-bimodule et $\ker(\widehat{u})$ un N-M-bimodule. Pour (ii) il suffit de remarquer que si e est le support de F_u° on a d'une part

$$0 = F_u^\circ(1-e) = \langle u \cdot (1-e)^\circ, u \cdot (1-e)^\circ \rangle \quad \text{donc} \quad u = u \cdot e^\circ \quad \text{et} \quad p \leqslant e\,,$$

et d'autre part $\quad F_u^\circ(1-p) = \langle u, u \cdot (1-p)^\circ \rangle = 0 \quad$ donc $\quad e \leqslant p$.
L'assertion (iii) se démontre de la même manière. ∎

2.3.2. Définition. Soit u un vecteur de $Y \otimes X$. On appellera *support final* de u, noté $f(u)$, le projecteur p de ${}_M\mathcal{L}_N(X)$ et *support initial* de u, noté $s(u)$, le projecteur q de $\mathcal{L}_M(Y)$ définis dans le lemme précédent.

2.4. MORPHISME ASSOCIÉ À UN VECTEUR D'UN PRODUIT TENSORIEL.

2.4.1. PROPOSITION. *Soient Z dans $\mathcal{C}(P,N)$ et W dans $\mathcal{C}(N,P)$. Pour tout $u \in Y \otimes X$ on définit les opérateurs $G_W(u)$ et $D_Z(u)$ en posant, pour tous $z \in Z$ et $w \in W$,*

$$G_W(u)(w) = u \otimes w \quad \text{et} \quad D_Z(u)(z) = z \otimes u \ .$$

(a) (i) *$G_W(u)$ appartient à $\mathcal{L}_P(W, Y \otimes X \otimes W)$ et, si u est central, alors $G_W(u)$ appartient à ${}_N\mathcal{L}_P(W, Y \otimes X \otimes W)$.*

(ii) *Pour tous $S \in {}_M\mathcal{L}_N(X)$ et $T \in \mathcal{L}_M(Y)$ on a*

$$G_W(t \cdot u \cdot S^\circ) = (T \otimes S \otimes \mathrm{Id}_W) \circ G_W(u) \ .$$

(iii) *Pour tous $x \in X, y \in Y$ et $w \in W$ on a*

$$G_W(u)^*(y \otimes x \otimes w) = \langle \widehat{u}(y), x\rangle \cdot w \ .$$

(iv) *Si u' est un autre vecteur de $Y \otimes X$ on a*

$$G_W(u) \circ G_W(u')^* = \theta_{u,u'} \otimes \mathrm{Id}_W \quad \text{et} \quad G_W(u)^* \circ G_W(u') = \pi_W(\langle u, u'\rangle) \ .$$

(b) *Si u est central*

(i) *$D_Z(u)$ appartient à ${}_{\mathcal{L}_N(Z)}\mathcal{L}_N(Z, Z \otimes Y \otimes X)$.*

(ii) *Pour tous $S \in {}_M\mathcal{L}_N(X)$ et $T \in {}_N\mathcal{L}_M(Y)$ on a*

$$D_Z(T \cdot u \cdot S^\circ) = (\mathrm{Id}_Z \otimes T \otimes S) \circ D_Z(u) \ .$$

(iii) *Pour tous $x \in X, y \in Y$ et $z \in Z$ on a*

$$D_Z(u)^*(z \otimes y \otimes x) = \theta_{z,\widehat{u}(y)}(x) \ .$$

(iv) *Si u' est un autre vecteur central dans $Y \otimes X$. Alors*

$$D_Z(u) \circ D_Z(u')^* = \mathrm{Id}_Z \otimes \theta_{u,u'} \quad \text{et} \quad D_Z(u)^* \circ D_Z(u') = \rho_Z(\langle u, u'\rangle) \ .$$

(c) *Si les correspondances sont non dégénérées, alors les applications $u \longmapsto G_W(u)$ et $u \longmapsto D_Z(u)$ sont injectives.*

Preuve. (a) (i) Par définition $G_W(u)$ est P-linéaire à droite de W dans $Y \otimes X \otimes W$ et $\|G_W(u)\| \leqslant \|u\|$. Si u est central il est clair que $G_W(u)$ est N-linéaire à gauche.

L'assertion (ii) est immédiate.

(iii) et (iv) Soient w, w' dans W et $u' \in Y \otimes X$ on a

$$\langle G_W(u)^*(u' \otimes w), w' \rangle = \langle u' \otimes w, u \otimes w' \rangle = \langle \langle u, u' \rangle \cdot w, w' \rangle \ .$$

En particulier on a

$$G_W(u)^* \circ G_W(u') = \pi_W(\langle u, u' \rangle) \quad \text{et} \quad G_W(u)^*(y \otimes x \otimes w) = \langle \widehat{u}(y), x \rangle \cdot w \ .$$

Enfin, si $u'' \in Y \otimes X$

$$G_W(u) \circ G_W(u')^*(u'' \otimes w) = u \otimes \langle u', u'' \rangle \cdot w = u \cdot \langle u', u'' \rangle \otimes w = (\theta_{u,u'} \otimes \mathrm{Id}_W)(u'' \otimes w).$$

(b) On suppose maintenant u central.

(i) Par définition l'opérateur $D_Z(u)$ est $\mathcal{L}_N(Z)$-linéaire à gauche de Z dans $Z \otimes Y \otimes X$, et $\|D_Z(u)\| \leqslant \|u\|$. Il est clair que $D_Z(u)$ est N-linéaire à droite.

L'assertion (ii) est immédiate.

(iii) et (iv) Soient $u' \in Y \otimes X$ et $z' \in Z$. On a

$$\begin{aligned} \langle D_Z(u)^*(z \otimes u'), z' \rangle &= \langle z \otimes u', z' \otimes u \rangle \\ &= \langle u', \langle z, z' \rangle \cdot u \rangle \\ &= \langle u', u \rangle \cdot \langle z, z' \rangle \\ &= \langle z \cdot \langle u, u' \rangle, z' \rangle \ . \end{aligned}$$

En particulier $D_Z(u)^*(z \otimes y \otimes x) = z \langle \widehat{u}(y), x \rangle$, et, si u' est central, $\langle u, u' \rangle \in \mathcal{Z}(N)$ avec $D_Z(u)^* \circ D_Z(u') = \rho_X(\langle u, u' \rangle)$.

De même si $u'' \in Y \otimes X$, on a

$$D_Z(u) \circ D_Z(u')^*(z \otimes u'') = z \cdot \langle u', u'' \rangle \otimes u = z \otimes u \cdot \langle u', u'' \rangle = (\mathrm{Id}_X \otimes \theta_{u,u'})(z \otimes u'').$$

(c) Si $G_W(u) = 0$, alors $u \otimes w = 0$ pour tout $w \in W$ et donc $w = 0$ car π_W est injective. Si on suppose $D_Z(u) = 0$, alors $z \otimes u = 0$ pour tout $z \in Z$, donc $u = 0$ puisque Z est non dégénérée.

2.4.2. Remarque. Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible sur les correspondances nous noterons simplement $G(u)$ et $D(u)$ les opérateurs définis ci-dessus.

2.4.3. Lemme. *Soient $u \in c(Y \otimes X)$ et $v \in X \otimes Y$. Pour tout $T \in {}_N\mathcal{L}_M(Y)$ on a dans $\mathcal{L}_N(X)$*

$$\widehat{u} \circ T \circ \widehat{v} = G_X(v)^* \circ (\mathrm{Id}_X \otimes T^* \otimes \mathrm{Id}_X) \circ D_X(u) \ .$$

Preuve. Soit $(b_j)_j$ une quasi-base de Y. Pour tout $x \in X$ on a (Propositions 2.4.1 et 2.1.1)

$$\begin{aligned} G_X(v)^* \circ (\mathrm{Id}_X \otimes T^* \otimes \mathrm{Id}_X) \circ D_X(u)(x) &= G_X(v)^*(x \otimes T^* \cdot u) \\ &= G_X(v)^*(x \otimes \sum_j T^*(b_j) \otimes \widehat{u}(b_j)) \\ &= \sum_j \langle \widehat{v}(x), T^*(b_j) \rangle \cdot \widehat{u}(b_j) \\ &= \sum_j \widehat{u}(b_j \cdot \langle b_j, T\widehat{v}(x) \rangle) \\ &= \widehat{u} \circ T \circ \widehat{v}(x) . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.4.4. PROPOSITION. *Soient $u \in c(Y \otimes X), p = f(u)$ et $q = s(u)$ ses supports. On définit une application $\mathcal{L}_N(X)$-M-linéaire, notée j_u, de $X \otimes Y$ dans $\mathcal{L}_N(X)$ en posant*

$$\forall v \in X \otimes Y \quad j_u = D_X(u)^* \circ G_X(v) = D(u)^* \circ G(v) = (\widehat{u} \circ \widehat{v})^* .$$

De plus

(i) *Pour tous $x \in X$ et $y \in Y$ on a $j_u(x \otimes y) = \theta_{x,\widehat{u}(y)}$.*

(ii) *$j_u(p(X) \otimes Y) \subset \mathcal{L}_N(X)_p$ et $j_u(c(X \otimes Y)) \subset {}_M\mathcal{L}_N(X)$.*

(iii) *La restriction de j_u à $X \otimes q(Y)$ est injective.*

(iv) *j_u est normiquement continue et $\|j_u\| \leqslant \|u\|$.*

(v) *j_u est continue sur les parties bornées si on munit $X \otimes Y$ de la topologie σ et $\mathcal{L}_N(X)$ de la topologie ultrafaible.*

(vi) *Si X est non dégénérée alors l'application $u \longmapsto j_u$ est injective.*

Preuve. Les égalités dans la définition de j_u ainsi que ses propriétés algébriques résultent facilement du lemme précédent et de la proposition 2.4.1. L'assertion (i) est également immédiate.

(ii) Si $v \in p(X) \otimes Y$ on a

$$p \circ j_u(v) \circ p = (p \circ \widehat{u} \circ \widehat{v} \circ p)^* = (\widehat{u} \circ \widehat{p \cdot v})^* = j_u(v) .$$

Maintenant si $v \in c(X \otimes Y)$ on a pour tout $m \in M$

$$j_u(m \cdot v) = D(u)^* \circ (\pi_X(m) \otimes \mathrm{Id}_Y \otimes \mathrm{Id}_X) \circ G(v) = \pi_X(m) \circ (D(u)^* \circ G(v)) = m \cdot j_u(v) .$$

(iii) Soit $v \in X \otimes q(Y)$ tel que $0 = (\widehat{u} \circ \widehat{v})^*$. Alors $\mathrm{Im}\,(\widehat{v}) \subset \mathrm{Ker}\,(\widehat{u}) = (1-q)(Y)$ et on a, pour tous $x \in X$ et $y = y_1 + y_2 \in q(Y) \oplus (1-q)(Y)$

$$\begin{aligned} \langle v, x \otimes y \rangle &= \langle v, x \otimes y_1 \rangle + \langle v, x \otimes y_2 \rangle \\ &= \langle \widehat{v}(x), p(y_1) \rangle + \langle (1-p) \cdot v, x \otimes (1-p)(y_2) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où $v = 0$.

(iv) $\|j_u(v)\| = \|\widehat{u} \circ \widehat{v}\| \leqslant \|u\| \, \|v\|$.

(v) Soit (v_i) une suite généralisée bornée de $X \otimes Y$ convergeant vers 0 pour la topologie σ. D'après l'assertion précédente, la famille $(j_u(v_i))$ est bornée, et pour tous x, x' dans X on a (Lemme 1.2.4) la convergence pour la topologie ultrafaible dans N de la suite généralisée $(\langle x', j_u(v_i)x\rangle) = (\langle D(u)x', v_i \otimes x\rangle)$ vers 0. Il en résulte que $(j_u)(v_i))$ converge ultrafaiblement vers 0 dans $\mathcal{L}_N(X)$.

(vi) Si $j_u = 0$ on obtient $0 = x \cdot \langle \widehat{u}(y), x'\rangle$ pour tous x, x' de X et y de Y. Comme X est non dégénérée cela implique $\widehat{u} = 0$ et l'application $u \longmapsto \widehat{u}$ est injective. ∎

3. VECTEUR D'INDICE FINI

Ce chapitre est consacré à la définition et à la caractérisation des vecteurs d'indice fini dans une composée, et généralise ainsi les propriétés établies dans [3] pour les espérances conditionnelles. Il nous semble nécessaire de distinguer la notion de vecteur faiblement d'indice fini introduite au paragraphe 3.1 de celle de vecteur d'indice fini étudiée au paragraphe 3.2. L'indice d'un vecteur est en général un opérateur, mais dans le cas des facteurs, c'est un scalaire et nous montrons qu'il est alors à valeurs dans l'ensemble défini par V. Jones ([12]). A partir d'un vecteur d'indice fini nous relions par des poids opératoriels finis les algèbres de von Neumann constituant les tours construites au paragraphe 1.6. Enfin pour les correspondances définies à partir d'une application complètement positive, nous caractérisons le fait qu'elles admettent un vecteur d'indice fini.

Comme précédemment, X désignera une M-N-correspondance et Y une N-M-correspondance.

3.1. VECTEUR FAIBLEMENT D'INDICE FINI.

3.1.1. THÉORÈME. *Soit $u \in c(Y \otimes X)$ de supports 1. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$\widehat{u}$ définit une bijection normiquement bicontinue de Y sur $\widehat{u}(Y)$.*

(ii) *$\widehat{u}$ est une bijection de Y sur X.*

(iii) *$\widehat{u}(Y)$ est un N-module hilbertien autodual.*

(iv) *$\widehat{u}(Y)$ est un N-module hilbertien.*

(v) *j_u induit une bijection de $X \odot Y$ sur $\mathcal{K}_N^{\circ}(X)$.*

(vi) *Il existe $K \in \mathbf{R}^+$ tel que pour tout $y \in Y$ on ait $\theta_{y,y} \leqslant K\pi_Y(\langle \widehat{u}(y), \widehat{u}(y)\rangle)$.*

Preuve. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Soit $x \in X = \overline{\widehat{u}(Y)}^{\sigma}$. D'après le théorème de densité de Kaplansky pour les modules hilbertiens autoduaux, il existe une suite généralisée

(y_i) de Y telle que $(\widehat{u}(y_i))$ soit bornée et converge vers x en topologie σ. Par bi-continuité, il résulte que la suite généralisée (y_i) est bornée dans l'espace autodual Y; quitte à considérer une suite généralisée extraite, on peut donc supposer que (y_i) converge en topologie σ vers un $y \in Y$. Par σ-continuité de $\widehat{u}$ sur les parties bornées, on obtient $x = \widehat{u}(y)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) et (iii) $\Longrightarrow$ (iv) sont des implications immédiates.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Par hypothèse $\widehat{u}$ est continue bijective entre les espaces de Banach Y et $\widehat{u}(Y)$, donc bicontinue.

(ii) $\Longrightarrow$ (v) Il suffit d'appliquer la proposition 2.4.4 (i) et (iii).

(v) $\Longrightarrow$ (ii) Considérons $x \in X$ et $x = x' \cdot \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ sa décomposition polaire. Par hypothèse il existe

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \odot Y$$

tel que

$$\theta_{x',x'} = j_u(v) = \sum_{i=1}^{n} \theta_{x_i,\widehat{u}(y_i)} = \sum_{i=1}^{n} \theta_{\widehat{u}(y_i),x_i}$$

puisque $\theta_{x',x'}$ est autoadjoint. Alors

$$x = \theta_{x',x'}(x) = \sum_{i=1}^{n} \theta_{\widehat{u}(y_i),x_i}(x) = \widehat{u}\Big(\sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle \cdot y_i\Big) .$$

(vi) $\Longrightarrow$ (i) Le résultat du lemme 2.2.1 reste valable dans le cas de bimodules non nécessairement autoduaux et par suite, l'équivalence cherchée est immédiate. ∎

3.1.2. DÉFINITION. On dira qu'un vecteur u appartenant à $c(Y \otimes X)$ et de supports 1 est *faiblement d'indice fini* si les conditions équivalentes du théorème précédent sont réalisées.

3.1.3. REMARQUE. Soit $E \in \mathcal{P}_0(M, N)$. En appliquant le corollaire précédent au vecteur $1 \otimes \xi_E$ de $\mathfrak{X}(\iota) \otimes \mathfrak{X}(E)$ on retrouve la proposition 3.3 de [3]. On obtient donc le résultat suivant:

$1 \otimes \xi_E$ est faiblement d'indice fini dans $\mathfrak{X}(\iota) \otimes \mathfrak{X}(E)$ si et seulement si E est faiblement d'indice fini au sens de la définition 3.6 de [3].

3.2. Indice d'un vecteur.

3.2.1. Lemme. *Soit $u \in c(Y \otimes X)$ de supports 1. Pour tout $v \in X \otimes Y$, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\widehat{v} \circ \widehat{u} = \mathrm{Id}_Y$.

(ii) $\widehat{u} \circ \widehat{v} = \mathrm{Id}_X$.

(iii) $G_Y(u)^* \circ D_Y(v) = \mathrm{Id}_Y$.

(iv) $G_X(v)^* \circ D_X(u) = \mathrm{Id}_X$.

Lorsque ces conditions équivalentes sont réalisées, v est unique et de support 1.

Preuve. Les équivalences (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) et (ii) $\Longleftrightarrow$ (iv) viennent de la proposition 2.4.4.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Si $\widehat{v} \circ \widehat{u} = \mathrm{Id}_Y$, l'assertion (i) du théorème 3.1.1 est satisfaite et par suite $\widehat{u}$ est une bijection dont la réciproque est $\widehat{v}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Comme u est de supports 1, $\widehat{u}$ est injective et l'assertion (ii) montre alors que $\widehat{u}$ est surjective et d'inverse $\widehat{v}$. ∎

3.2.2. Définition. Soit $u \in c(Y \otimes X)$ de supports 1. Si pour un vecteur de $c(X \otimes Y)$ les conditions du lemme précédent sont satisfaites, nous dirons que ce *vecteur* est *associé* à u et nous le noterons $\overline{u}$.

3.2.3. Théorème. *Soit $u \in c(Y \otimes X)$ de supports 1. Supposons X non dégénérée et identifions $\pi_X(M)$ avec M. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Il existe $F \in \mathcal{P}_0(\mathcal{L}_N(X), M)$ tel que, pour tous y, y' de Y on ait*

$$F(\theta_{\widehat{u}(y),\widehat{u}(y)}) = \langle y, y' \rangle \ .$$

(ii) *Il existe une famille $(y_i)_i$ de Y telle que $(\langle y_i, y_i \rangle)_i$ soit ultrafaiblement sommable dans M et $(\widehat{u}(y_i))_i$ constitue une base orthonormale de X.*

(iii) *u admet un vecteur associé $\overline{u}$.*

(iv) *j_u définit une bijection normiquement bicontinue de $X \odot Y$ sur $\mathcal{K}_N^\circ(X)$.*

(v) *j_u est un isomorphisme de $\mathcal{L}_N(X)$-M-modules de $X \otimes Y$ sur $\mathcal{L}_N(X)$.*

(vi) *Il existe $K \in \mathbf{R}^+$ tel que pour toute famille finie $(y_j)_{j=1,\dots,n}$ de Y on ait dans $M_n(\mathcal{L}_M(Y))$*

$$(\theta_{y_i,y_j}) \leqslant K\left(\pi_Y\left(\langle \widehat{u}(y_i), \widehat{u}(y_j) \rangle\right)\right) \ .$$

De plus si ces conditions sont réalisées alors $Y = \overline{X}$, le poids opératoriel F est égal à $F_{\overline{u}} j_u^{-1}(S) = S \cdot \overline{u}$ pour tout $S \in \mathcal{L}_N(X)$.

Preuve. (i) $\Longrightarrow$ (ii) L'application $\widehat{u}$ définit une bijection normiquement continue de Y sur $\widehat{u}(Y)$; montrons qu'elle est bicontinue. Soit (y_k) une suite de Y telle que $\widehat{u}(y_k)$ converge normiquement vers $\widehat{u}(y)$. On a alors

$$\|\langle y_k - y, y_k - y\rangle\| = \|F(\theta_{\widehat{u}(y_k-y),\widehat{u}(y_k-y)})\| \to 0 .$$

Donc y_k converge normiquement vers y. Il résulte du théorème 3.1.1 que u est faiblement d'indice fini. Donc $\widehat{u}(Y) = X$. Soit (x_k) une suite bornée de X qui converge en topologie σ vers x. L'égalité $F(\theta_{\widehat{u}(y),x_k}) = \langle y, \widehat{u}^{-1}(x_k)\rangle$, pour tout $y \in Y$, montre que $\widehat{u}^{-1}$ est σ-continue sur les parties bornées. Montrons que pour $\widehat{u}^{-1}$ la condition (vi) du théorème 2.2.2 est satisfaite. Soient $(a_i)_i$ une base de X et $y_i = \widehat{u}^{-1}(a_i)$. Alors

$$\mathrm{Id}\,_X = \sum_i \theta_{a_i,a_i} = \sum_i \theta_{\widehat{u}(y_i),\widehat{u}(y_i)} \quad \text{d'où} \quad \sum_i \langle y_i, y_i\rangle = F(\mathrm{Id}\,_X) .$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) D'après le lemme 2.1.5, il existe $v = \sum_i \widehat{u}(y_i) \otimes y_i \in X \otimes Y$. Pour tout i, posons $p_i = \langle \widehat{u}(y_i), \widehat{u}(y_i)\rangle$. On a

$$\sum_i \widehat{u}(y_i) \otimes p_i \cdot y_i = v = \sum_i \widehat{u}(y_i) \otimes \widehat{v}(\widehat{u}(y_i)) \quad \text{(Proposition 2.1.1(vi))}$$

et par suite $\widehat{v}(\widehat{u}(y_i)) = p_i \cdot y_i$ pour tout i (Corollaire 1.2.6). D'où

$$(\widehat{u} \circ \widehat{v})(\widehat{u}(y_i))\widehat{u}(p_i \cdot y_i) = \widehat{u}(y_i) \cdot p_i = \widehat{u}(y_i) .$$

Par suite $\widehat{u} \circ \widehat{v} = \mathrm{Id}\,_X$ et d'après le lemme 3.2.1 on a $v = \overline{u}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Soit $F = F_{\overline{u}}$ le poids opératoriel normal fini fidèle de $\mathcal{L}_N(X)$ dans M défini par le vecteur $\overline{u}$. Soient y et y' dans Y. On a d'après la proposition 2.1.1 (vii)

$$\begin{aligned} F(\theta_{\widehat{u}(y),\widehat{u}(y')}) &= \langle \overline{u}, \theta_{\widehat{u}(y),\widehat{u}(y')} \cdot \overline{u}\rangle \\ &= \langle \widehat{\overline{u}}\widehat{u}(y), \widehat{\overline{u}}\widehat{u}(y')\rangle \\ &= \langle y, y'\rangle . \end{aligned}$$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) On vérifie aisément que l'application qui à tout S dans $\mathcal{K}_N^\circ(X)$ associe $S \cdot \overline{u}$ est la bijection réciproque de celle définie par j_u.

(iv) $\Longrightarrow$ (v) D'après les propriétés déjà démontrées de j_u (Proposition 2.4.4), il ne reste à prouver que la surjection. Soit donc $S \in \mathcal{L}_N(X)$. Puisque $\mathcal{K}_N^\circ(X)$ est un idéal ultrafaiblement dense de $\mathcal{L}_N(X)$, d'après le théorème de Kaplansky, on peut choisir une suite généralisée $(v_i)_i$ de $X \odot Y$ telle que $(j_u(v_i))_i$ converge ultrafaiblement vers S avec $\|j_u(v_i)\| \leqslant \|S\|$ pour tout i. La continuité normique de j_u^{-1} montre que les v_i sont dans une boule σ-compacte. Quitte à considérer une suite généralisée extraite, on peut alors supposer que les v_i convergent en topologie σ vers un vecteur v de $X \otimes Y$. La continuité de j_u sur les parties bornées montre alors que $j_u(v) = S$.

(v) $\Longrightarrow$ (iii) Soit $v \in X \otimes Y$ tel que $j_u(v) = \mathrm{Id}_X$. Alors $\widehat{u} \circ \widehat{v} = \mathrm{Id}_X$ et, d'après le lemme 3.2.1, v est le vecteur associé de u.

(iii) $\Longrightarrow$ (vi) Il suffit d'appliquer le théorème 2.2.2 à $\widehat{u}^{-1} = \widehat{\overline{u}}$.

(vi) $\Longrightarrow$ (iii) L'hypothèse faite implique que u est faiblement d'indice fini et donc que $\widehat{u}$ est une bijection de Y sur X (Théorème 3.1.1). Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.2.2 à $\widehat{u}^{-1}$.

Si ces conditions sont réalisées, l'unicité de F est évidente et $F = F_{\overline{u}}$ par construction. Le fait que $Y = \overline{X}$ est une conséquence de la proposition 1.5.6; en effet on a d'une part $\overline{Y} = \widetilde{Y} \otimes \mathfrak{X}(F_u)$ et d'autre part $\mathfrak{X}(F_u) = \mathfrak{U}(Y) \otimes X$ car le vecteur u de $Y \otimes X$ est totalisateur pour $\mathcal{L}_M(Y)$ (Proposition 2.1.1). ∎

3.2.4. Définitions. Nous dirons qu'un vecteur u appartenant à $c(Y \otimes X)$ est d'indice fini dans $Y \otimes X$ s'il est de supports 1 et si les conditions équivalentes du théorème précédent sont satisfaites. On appelle alors *indice de u* l'opérateur de la sous-algèbre de von Neumann commutative de ${}_M\mathcal{L}_N(X)$ engendrée par $\pi_X(\mathcal{Z}(M))$ et $\rho_X(\mathcal{Z}(N))$, défini par

$$\mathrm{Ind}\,(u) = \rho_X(\langle u, u\rangle)\pi_X(\langle \overline{u}, \overline{u}\rangle) = D_X(u)^* \circ D_X(u) \circ G_X(\overline{u})^* \circ G_X(\overline{u}) \,.$$

Remarquons que si M et N sont des facteurs, alors $\mathrm{Ind}\,(u)$ est un scalaire et on a $\mathrm{Ind}\,(u) = \mathrm{Ind}\,(\overline{u})$.

De manière naturelle nous dirons qu'un correspondance X est *d'indice fini* s'il existe un vecteur u d'*indice fini* dans $c(\overline{X} \otimes X)$. Cette notion sera analyée plus spécifiquement dans [6], mais remarquons dès maintenant que X est d'indice fini si et seulement si $\overline{X}$ est d'indice fini.

3.2.5. Exemples. Nous reprenons ici, avec les même notations, les exemples du paragraphe 2.1.

(i) Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert et $u \in \overline{\mathcal{H}_1} \otimes \mathcal{H}_2$. Si u est d'indice fini alors $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}_2} = \widehat{u} \circ \widehat{\overline{u}}$ est un opérateur à trace, d'où $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont de même dimension finie.

(ii) Si $X = Y = \mathbf{1}_N$, le vecteur $u = 1 \otimes 1$ est d'indice fini avec $\overline{u} = u$ et $\mathrm{Ind}\,(u) = 1$.

(iii) Plus généralement si X est une équivalence de Morita, le vecteur $u = \mathbf{1}_N$ appartenant à $\overline{X} \otimes X = \mathbf{1}_N$ est d'indice fini, son vecteur associé est $\overline{u} = \mathrm{Id}_X$, et $\mathrm{Ind}\,(u) = \mathrm{Id}_X$. Si u_1 est un autre vecteur d'indice fini, alors $\widehat{u_1} \circ \widehat{\overline{u}}$ apppartient à ${}_{\mathcal{L}_N(X)}\mathcal{L}_N(X)$ et il existe c inversible dans $\mathcal{Z}(N)$ tel que $\widehat{u_1} = \rho_X(c) \circ \widehat{u}$. On en déduit $u_1 = u \cdot \rho_X(c)^\circ = c$ et $\overline{u_1} = \rho_X(c^{-1})$, d'où $\mathrm{Ind}\,(u_1) = \mathrm{Id}_X$.

(iv) Pour $i = 1, 2$ soient X_i (respectivement Y_i) une M-N-correspondance (respectivement N-M-correspondance) et $u_i \in c(Y_i \otimes X_i)$. Le vecteur $u = u_1 \oplus u_2$ est l'indice fini si et seulement si u_1 et u_2 le sont. Dans ce cas on a

$$\mathrm{Ind}\,(u) = \pi_{X_1 \oplus X_2}(\langle u_1, u_1\rangle + \langle u_2, u_2\rangle)\rho_{X_1 \oplus X_2}(\langle \overline{u_1}, \overline{u_1}\rangle + \langle \overline{u_2}, \overline{u_2}\rangle) .$$

En particulier tout vecteur d'indice fini $u \in c(\overline{X} \otimes X)$ où X est la N-N-correspondance N^n est d'indice supérieur à n^2.

En effet si $u = u_1 \oplus \cdots \oplus u_n$, posons $c_i = \langle u_i, u_i\rangle$. On a alors $c_i^{-1} = \langle \overline{u_i}, \overline{u_i}\rangle$ (Exemple (iii) ci-dessus), et

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\, u &= \pi_Y(\sum_i c_i \sum_k c_k^{-1}) \\ &= \pi_Y(n + \sum_{i<k}(c_i c_k^{-1} + c_i^{-1} c_k)) \\ &\geqslant \pi_Y(n + n(n-1)) \\ &\geqslant n^2 \mathrm{Id}_X .\end{aligned}$$

L'exemple du poids opératoriel fini est suffisamment important dans toute cette théorie pour que nous le traitions à part. On suppose dans la fin de ce paragraphe que $N \subset M$ et on note ι l'injection de N dans M. Si $E \in \mathcal{P}_0(M, N)$, posons $u = 1 \otimes \xi_E \in \mathfrak{X}(\iota) \otimes \mathfrak{X}(E)$. Puisque $\mathcal{L}_M(\mathfrak{X}(\iota)) = M$ on a $E = F_u$ et il est naturel de donner la définition suivante.

3.2.6. DÉFINITION. On dira qu'un poids opératoriel E de $\mathcal{P}_0(M, N)$ est *d'indice fini* si le vecteur $1 \otimes \xi_E$ est d'indice fini dans $\mathfrak{X}(\iota) \otimes \mathfrak{X}(E)$. Si cette condition est satisfaite on posera

$$\mathrm{Ind}\,(E) = \mathrm{Ind}\,(1 \otimes \xi_E) .$$

3.2.7. PROPOSITION. *E est l'indice fini si et seulement si il est d'indice fini au sens de* [3] *Définition* 3.6.

Dans ces conditions le vecteur $\eta \in \mathfrak{X}(E) \otimes \mathfrak{X}(\iota)$, le poids opératoriel normal fini de $\mathcal{L}_N(\mathfrak{X}(E))$ dans M et l'homomorphisme j_E introduits dans le théorème 3.5 *de* [3] *coïncident respectivement avec $\overline{u}, F_{\overline{u}}$ et j_u, où $u = 1 \otimes \xi_E$.*

Preuve. En effet, si E est d'indice fini au sens de [3], l'exemple 2.1.3. (iv) montre que η est associé à u. Réciproquement si u est d'indice fini, pour tous x, y, y' et m de M on a

$$F_{\overline{u}}(\theta_{\Lambda_E(y), \Lambda_E(y')}) = F_{\overline{u}}(\theta_{\widehat{u}(y^*), \widehat{u}(y'^*)}) = yy'^*$$

et E est d'indice fini. De plus

$$j_u(\Lambda_E(x) \otimes y) = \theta_{(\Lambda_E(x)),(\Lambda_E(y^*))} = j_E(\Lambda_E(x) \otimes y) \ . \quad \blacksquare$$

3.2.8. REMARQUES. (i) Dans le cas où E est une espérance conditionelle, en identifiant M et $\pi_E(M)$, la définition de l'indice de E donnée ici coïncide avec celle de [3] puisque le vecteur $1 \otimes \xi_E$ est de carré scalaire 1. Cependant on constate que pour un poids opératoriel fini, la définition de l'indice donnée dans [3] n'est pas satisfaisante, puiqu'elle ne respecte pas la symétrie entre F_u et $F_{\overline{u}}$.

(ii) Il est possible de généraliser les résultats des théorèmes 3.2.1 et 3.2.3 en définissant la notion d'indice local. Un vecteur $u \in c(Y \otimes X)$ sera dit *(faiblement) localement d'indice fini* dans $Y \otimes X$ s'il est (faiblement) d'indice fini dans $s(u)(Y) \otimes f(u)(X)$.

3.3. CONSTRUCTION DE BASE. Soit u dans $c(Y \otimes X)$ de supports 1. Nous nous proposons dans ce paragraphe de montrer que u et F_u sont simultanément d'indice fini. Puisque u est $\mathcal{L}_M(Y)$-totalisateur, on a $\mathfrak{X}(F_u) = \mathfrak{U}(Y) \otimes X$. De plus l'égalité $Y = \mathfrak{I}(Y) \otimes \mathfrak{U}(Y)$ permet d'écrire

$$Y \otimes X = [\mathfrak{I}(Y) \otimes \mathfrak{U}(Y)] \otimes X = \mathfrak{I}(Y) \otimes [\mathfrak{U}(Y) \otimes X] \ .$$

Dans cette identification un vecteur u appartenant à $Y \otimes X$ est transformé en $\mathrm{Id}_Y \otimes u$ dans $\mathfrak{I}(Y) \otimes [\mathfrak{U}(Y) \otimes X]$ et la recherche d'un vecteur associé nous conduit à nous intéresser également à $(\mathfrak{U}(Y) \otimes X) \otimes \mathfrak{I}(Y)$. Nous établissons ensuite une relation entre les opérateurs de Hilbert-Schmidt définis par u dans ces deux décompositions et étudions le cas de l'indice fini.

3.3.1. LEMME. *Pour tout $v \in c(X \otimes Y)$ il existe un unique vecteur noté $\nu(v)$ appartenant à $c((\mathfrak{U}(Y) \otimes X) \otimes \mathfrak{I}(Y))$ tel que $\widehat{\nu(v)}(u) = \widehat{v} \circ \widehat{u}$ pour tout $u \in Y \otimes X$. On a alors $\langle \nu(v), \nu(v) \rangle = \rho_Y(\langle v, v \rangle)$ et $j_{\nu(v)} = j_v$.*

Preuve. Soient $v \in c(X \otimes Y)$ et ω l'application de $\mathfrak{U}(Y) \otimes X$ dans $\mathfrak{I}(Y)$ définie par $\omega(u) = \widehat{v} \circ \widehat{u} = (j_u(u))^*$ pour tout $u \in Y \otimes X$. D'après la proposition 2.4.4, ω est σ-continue sur les parties bornées et on vérifie aisément qu'elle est $\mathcal{L}_M(Y)$-N-antilinéaire. De plus, pour toute quasi-base $(u_k)_k$ de $Y \otimes X$, on a (Propositions

2.4.1 et 2.4.4)

$$\begin{aligned}\rho_Y(\langle v,v\rangle) &= D_Y(v)^* D_Y(v)\\ &= D_Y(v)^*\Big(\sum_k \theta_{u_k,u_k}\otimes \mathrm{Id}_Y\Big)D_Y(v)\\ &= D_Y(v)^*\Big(\sum_k G_Y(u_k)G_Y(u_k)^*\Big)D_Y(v)\\ &= \sum_k \omega(u_k)^*\omega(u_k)\\ &= \sum_k \langle \omega(u_k),\omega(u_k)\rangle\ .\end{aligned}$$

D'après le théorème 2.2.2, il existe un vecteur $\nu(v)$ appartenant à $c((\mathfrak{U}(Y)\otimes X)\otimes \mathfrak{I}(Y))$ tel que $\omega=\widehat{\nu(v)}$. De plus $\langle\nu(v),\nu(v)\rangle=\rho_Y(\langle v,v\rangle)$ (Proposition 2.1.1).

Comme $\mathfrak{I}(Y)\otimes\mathfrak{U}(Y)\otimes X=Y\otimes X$ et $\mathcal{L}_{\mathcal{L}_M(Y)}(\mathfrak{I}(Y))=\mathcal{L}_M(Y)$ on peut écrire pour tous $T\in\mathcal{L}_M(Y)$ et $u\in Y\otimes X$

$$j_\nu(v)(T\otimes u)=\theta_{T,\widehat{\nu(v)(u)}}=j_v(T\cdot u)\ .$$

D'où $j_{\nu(v)}=j_v$. ∎

3.2.2. REMARQUE. Dans le cas où la correspondance Y est non dégénérée à droite, nous pouvons identifier $\mathcal{Z}(M)$ avec $\rho_Y(\mathcal{Z}(M))$, et l'application ν est orthogonale de $c(X\otimes Y)$ dans $c((\mathfrak{U}(Y)\otimes X)\otimes\mathfrak{I}(Y))$.

3.3.3. LEMME. *Soit $u\in c(Y\otimes X)$. On a*

(i) *Pour tout $T\in\mathcal{L}_M(Y)$ on a $(\mathrm{Id}_Y\otimes u)\hat{}(T)=T^*\cdot u$.*

(ii) *$s(\mathrm{Id}_Y\otimes u)=s(u)$ et $f(\mathrm{Id}_Y\otimes u)=\mathrm{Id}_Y\otimes f(u)$.*

(iii) *$F_{\mathrm{Id}_Y\otimes u}=F_u$*

(iv) *$F^\circ_{\mathrm{Id}_Y\otimes u}=F^\circ_u$ en identifiant ${}_{\mathcal{L}_M(Y)}\mathcal{L}_N(\mathfrak{U}(Y)\otimes X)=\mathrm{Id}_Y\otimes{}_M\mathcal{L}_N(X)$ avec ${}_M\mathcal{L}_N(X)$.*

Preuve. (a) Les assertions (i), (iii) et (iv) sont immédiates. D'après la proposition 1.2.3. (ii), $f(\mathrm{Id}_Y\otimes u)$ appartient à ${}_{\mathcal{L}_N(Y)}\mathcal{L}_N(\mathfrak{U}(Y)\otimes X)=\mathrm{Id}_Y\otimes{}_M\mathcal{L}_N(X)$. L'assertion (ii) résulte alors de (i) et de la définition des supports (Lemme 2.3.1). ∎

3.3.4. THÉORÈME. *Soit $u\in c(Y\otimes X)$ de supports 1.*

(a) *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *u est faiblement d'indice fini.*

(ii) *$\mathrm{Id}_Y\otimes u$ est faiblement d'indice fini.*

(iii) *$Y\otimes X=\{T\cdot u; T\in\mathcal{L}_M(Y)\}$.*

Si ces conditions sont réalisées, l'inverse ω *de* $(\mathrm{Id}_Y \otimes u)\widehat{\ }$ *est donné par* $\omega(u') = \widehat{u}^{-1} \circ \widehat{u'}$ *pour tout* $u' \in Y \otimes X$.

(b) *u est d'indice fini si et seulement si* $\mathrm{Id}_Y \otimes u$ *est d'indice fini.*

Si ces conditions sont réalisées, on a

$$\overline{\mathrm{Id}_Y \otimes u} = \nu(\overline{u}) \quad , \quad \mathrm{Ind}\,(\mathrm{Id}_Y \otimes u) = \mathrm{Id}_{\mathfrak{U}(Y)} \otimes \mathrm{Ind}\,(u) \quad , \quad \mathrm{Ind}\,(\overline{\mathrm{Id}_Y \otimes u}) = \mathrm{Ind}\,(\overline{u}).$$

Preuve. (a) L'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) est immédiate par le théorème 3.1.1 et le lemme précédent.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Il suffit de montrer que l'inverse ω de $(\mathrm{Id}_Y \otimes u)\widehat{\ }$ est normiquement continu. Par hypothèse, $\widehat{u}$ est bijectif bicontinu de Y sur X. Alors, l'égalité $T^* = \widehat{u}^{-1} \circ \widehat{T \cdot u}$ donne

$$\|\omega(T \cdot u)\| = \|T^*\| \leqslant \|\widehat{u}^{-1}\|\,\|\widehat{T \cdot u}\| \leqslant \|\widehat{u}^{-1}\|\,\|T \cdot u\|.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i). On veut montrer que $\widehat{u}^{-1}$ est normiquement continu de $\widehat{u}(Y)$ dans Y. Soient $y \in Y$ et $y = z \cdot \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}$ sa décomposition polaire. On a (proposition 2.1.1. (vii))

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u}(y)\|^2 &= \|\langle \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}} \cdot \widehat{u}(z), \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}} \cdot \widehat{u}(z)\rangle\| \\
&= \|\langle \widehat{u}(z), \langle y, y\rangle \cdot \widehat{u}(z)\rangle\| \\
&= \|\langle y \otimes \widehat{u}(z), y \otimes \widehat{u}(z)\rangle\| \\
&= \|\theta_{y,z} \cdot u\|^2 .
\end{aligned}$$

Comme par hypothèse ω est normiquement continu de $\mathcal{L}_M(Y) \cdot u$ dans $\mathcal{L}_M(Y)$ on en déduit par le lemme 1.3.1

$$\|y\| = \|\theta_{y,z}\| \leqslant \|\omega\|\,\|\theta_{y,z} \cdot u\| = \|\omega\|\,\|\widehat{u}(y)\|.$$

Si ces conditions sont réalisées, tout vecteur $u' \in Y \otimes X$ s'écrit $u' = T \cdot u$ où $T \in \mathcal{L}_M(Y)$ et

$$\omega(u') = T^* = \widehat{u}^{-1} \circ \widehat{T \cdot u} = \widehat{u}^{-1} \circ \widehat{u'}.$$

(b) Si u est d'indice fini, il est faiblement d'indice fini. D'après ce qui précède, $(\mathrm{Id}_Y \otimes u)\widehat{\ }$ est une bijection de $\mathcal{L}_M(Y)$ sur $Y \otimes X$ et, pour tout $u' \in Y \otimes X$,

$$\omega(u') = \widehat{\overline{u}} \circ \widehat{u'} = \widehat{\nu(\overline{u})}(u')$$

donc $\mathrm{Id}_Y \otimes u$ est d'indice fini et $\overline{\mathrm{Id}_Y \otimes u} = \nu(\overline{u})$.

Réciproquement d'après (a), u est faiblement d'indice fini et, pour tout (x, y) de $X \times Y$, on a (Proposition 2.1.1)

$$\widehat{u} \circ \theta_{\widehat{u}^{-1}(x), y} = (\theta_{y, \widehat{u}^{-1}(x)} \cdot u)\widehat{\ } = \widehat{y \otimes x}$$

d'où

$$\omega(y \otimes x) = \widehat{u}^{-1} \circ \widehat{y \otimes x} = \theta_{\widehat{u}^{-1}(x), y} \ .$$

Considérons une famille finie $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ de X. Pour $y \in Y$ posons $u_i = y \otimes x_i$. D'après le théorème 3.2.3, il existe $K > 0$ tel que

$$(\theta_{\omega(u_i), \omega(u_j)}) \leqslant K(\pi_Y(\langle u_i, u_j \rangle)) \ .$$

Puisque dans ${}_{\mathcal{L}_M(Y)}\mathcal{L}_M(\mathfrak{I}(Y)) = \mathcal{L}_M(Y)$, l'opérateur θ_{T_1,T_2}, s'identifie à $T_1 T_2^*$, on a

$$\theta_{\omega(u_i), \omega(u_j)} = \theta_{\widehat{u}^{-1}(x_i), y} \theta_{y, \widehat{u}^{-1}(x_j)} = \theta_{\widehat{u}^{-1}(x_i), \widehat{u}^{-1}(\langle y, y \rangle \cdot x_j)}$$

d'où, pour tout $y \in Y$

$$(\theta_{\widehat{u}^{-1}(x_i), \widehat{u}^{-1}(\langle y, y \rangle \cdot x_j)}) \leqslant K(\pi_Y(\langle x_i, \langle y, y \rangle \cdot x_j \rangle)) \ .$$

Soit r le projecteur de $Z(M)$ tel que M_r soit l'adhérence ultrafaible de l'idéal I engendré par l'image du M-produit scalaire de Y. On a donc $r = \sup r_k$ où $r_k \in I_+$.

Soit $m \in M$ tel que $0 \leqslant m \leqslant \sum_{i=1}^{n} \langle y_i, y_i \rangle$. Il existe $a \in M_+$ tel que

$$m = a \Big(\sum_{i=1}^{n} \langle y_i, y_i \rangle \Big) a = \sum_{i=1}^{n} \langle y_i \cdot a, y_i \cdot a \rangle \ .$$

Donc l'ensemble $F = \{ \sum \langle y_i, y_i \rangle ; y_i \in Y \}$ est une face de M_+ et $I_+ = F$. Par suite

$$(\theta_{\widehat{u}^{-1}(x_i), \widehat{u}^{-1}(r \cdot x_j)}) \leqslant K\Big(\pi_Y\big(\langle x_i, r \cdot x_j \rangle\big)\Big).$$

Or, pour tout $i, \widehat{u}^{-1}(r \cdot x_i) = \widehat{u}^{-1}(x_i) \cdot r = \widehat{u}^{-1}(x_i)$ d'où

$$(\theta_{\widehat{u}^{-1}(x_i), \widehat{u}^{-1}(x_j)}) \leqslant K\Big(\pi_Y\big(\langle x_i, x_j \rangle\big)\Big)$$

et (théorème 3.2.3) le vecteur u est d'indice fini.

Supposons maintenant ces conditions réalisées. Il reste à calculer les indices.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ind}(\operatorname{Id}_Y \otimes u) &= \pi_{\mathfrak{U}(Y) \otimes X}(\langle \overline{\operatorname{Id}_Y \otimes u}, \overline{\operatorname{Id}_Y \otimes u} \rangle) \rho_{\mathfrak{U}(Y) \otimes X}(\langle \operatorname{Id}_Y \otimes u, \operatorname{Id}_Y \otimes u \rangle) \\
&= \pi_{\mathfrak{U}(Y) \otimes X}(\langle \nu(\overline{u}), \nu(\overline{u}) \rangle) \rho_{\mathfrak{U}(Y) \otimes X}(\langle u, u \rangle) \\
&= \pi_{\mathfrak{U}(Y) \otimes X}(\rho_Y(\langle \overline{u}, \overline{u} \rangle)) \rho_{\mathfrak{U}(Y) \otimes X}(\langle u, u \rangle) \\
&= (\rho_{\mathfrak{U}(Y)}(\langle \overline{u}, \overline{u} \rangle) \otimes \operatorname{Id}_X) \rho_{\mathfrak{U}(Y) \otimes X}(\langle u, u \rangle) \\
&= (\operatorname{Id}_{\mathfrak{U}(Y)} \otimes \pi_X(\langle \overline{u}, \overline{u} \rangle))(\operatorname{Id}_{\mathfrak{U}(Y)} \otimes \rho_X(\langle u, u \rangle)) \\
&= \operatorname{Id}_{\mathfrak{U}(Y)} \otimes \operatorname{Ind}(u).
\end{aligned}$$

De même, grâce à l'identification de $\mathcal{L}_{\mathcal{L}_M(Y)}(\mathfrak{I}(Y))$ et $\mathcal{L}_M(Y)$

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}(\overline{\operatorname{Id}_Y \otimes u}) &= \pi_Y(\langle \operatorname{Id}_Y \otimes u, \operatorname{Id}_Y \otimes u\rangle)\rho_Y(\langle \overline{\operatorname{Id}_Y \otimes u}, \overline{\operatorname{Id}_Y \otimes u}\rangle)\\ &= \pi_Y(\langle u,u\rangle)\rho_Y(\langle \overline{u},\overline{u}\rangle)\\ &= \operatorname{Ind}(\overline{u}). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

3.3.5. Corollaire. *On suppose X et Y non dégénérées. Soit $u \in c(Y \otimes X)$ de supports 1.*

(i) *Le vecteur u est faiblement d'indice fini si et seulement si le poid opératoriel F_u de $\mathcal{L}_M(Y)$ dans N est faiblement d'indice fini au sens de la définition 3.6 de* [3]. *Si ces conditions sont réalisées, alors $\langle u,u\rangle$ est inversible dans $\mathcal{Z}(N)$.*

(ii) *Le vecteur u est d'indice fini si et seulement si le poids opératoriel F_u est d'indice fini. Si ces conditions sont réalisées, alors j_u réalise une équivalence de correspondances entre $\mathfrak{X}(F_{\overline{u}})$ et $\mathfrak{U}(X) \otimes Y$.*

(iii) *Si l'indice de u est un scalaire, ce qui est le cas si M et N sont des facteurs,* $\operatorname{Ind}(u)$ *appartient à l'ensemble $\{4\cos^2 \pi/n; n \geqslant 3\} \cup [4,+\infty[$ déterminé par V. Jones* ([12]).

Preuve. Le vecteur u étant totalisateur dans $Y \otimes X$ pour $\mathcal{L}_M(Y)$ on a $\mathfrak{X}(F_u) = \mathfrak{U}(Y) \otimes X, \xi_{F_u} = u$ et $\Lambda_{F_u}(T) = T \cdot u$ pour tout $T \in \mathcal{L}_M(Y)$.

(i) Il suffit d'appliquer le théorème précédent (a) et la remarque 3.1.3 pour obtenir l'équivalence annoncée. Dans ces conditions $\langle u,u\rangle$ est inversible puisque d'après ([3] Proposition 3.3.) il existe $K > 0$ tel que

$$1 \leqslant KF_u(1) = K\langle u,u\rangle \ .$$

(ii) De manière analogue, il suffit d'appliquer le théorème précédent (b) et la proposition 3.2.8, puis de remarquer que si u est d'indice fini, alors, pour tout $v \in X \otimes Y$, on a $j_u(v)\cdot\overline{u} = v$ (Théorème 3.2.3). D'où pour tous v et v' dans $X \otimes Y$

$$\begin{aligned}\langle \Lambda_{F_{\overline{u}}}(j_u(v)), \Lambda_{F_{\overline{u}}}(j_u(v'))\rangle &= F_{\overline{u}}(j_u(v)^* j_u(v'))\\ &= \langle j_u(v)\cdot\overline{u}, j_u(v')\cdot\overline{u}\rangle\\ &= \langle v,v'\rangle. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

3.3.6. Tours de Jones. On suppose X non dégénérée. Soit $u \in c(\overline{X} \otimes X)$ d'indice fini. Nous sommes maintenant en mesure de compléter la construction de base commencée au paragraphe 1.6. dont nous conservons les notations.

Posons $u_0 = u \in c(Y_0 \otimes \overline{Y_0})$ et $v_0 = \overline{u} \in c(X_0 \otimes \overline{X_0})$.
Alors le vecteur $\operatorname{Id}_{Y_0} \otimes u_0$ est l'indice fini et son vecteur associé $\overline{\operatorname{Id}_{Y_0} \otimes u_0} = \nu(v_0)$ appartient à $c((\mathfrak{U}(Y_0) \otimes \overline{Y_0}) \otimes \mathfrak{I}(Y_0)) = c(Y_1 \otimes \overline{Y_1})$. Nous noterons ce vecteur u_1.

En partant également de v_0 et en itérant le procédé on construit une double suite $(u_n),(v_n)$ de vecteurs d'indice fini qui vérifient

$$u_n \in c(Y_n \otimes \overline{Y_n}) \quad , \quad v_n \in c(X_n \otimes \overline{X_n})$$

$$u_n = \overline{\mathrm{Id}_{Y_{n-1}} \otimes u_{n-1}} \quad , \quad v_n = \overline{\mathrm{Id}_{X_{n-1}} \otimes v_{n-1}}$$

$$\mathrm{Ind}\,(u_n) = \mathrm{Ind}\,(\overline{u_{n-1}}) \quad , \quad \mathrm{Ind}\,(v_n) = \mathrm{Ind}\,(\overline{v_{n-1}}).$$

En particulier, $\mathrm{Ind}\,(u_{n+2}) = \mathrm{Ind}\,(\overline{u_{n+1}}) = \mathrm{Ind}\,(\mathrm{Id}_{Y_n} \otimes u_n) = \mathrm{Id}_{\mathfrak{U}(Y_n)} \otimes \mathrm{Ind}\,(u_n)$.
D'où $\quad \mathrm{Ind}\,(u_{2p}) = \mathrm{Id}_{\mathfrak{U}(Y_{2p-2})} \otimes \mathrm{Id}_{\mathfrak{U}(Y_{2p-4})} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Id}_{\mathfrak{U}(Y_2)} \otimes \mathrm{Ind}\,(u_0)$
et $\quad \mathrm{Ind}\,(u_{2p+1}) = \mathrm{Id}_{\mathfrak{U}(Y_{2p-1})} \otimes \mathrm{Id}_{\mathfrak{U}(Y_{2p-3})} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Id}_{\mathfrak{U}(Y_1)} \otimes \mathrm{Ind}\,(v_0)$.
Or, l'existence des vecteurs d'indice fini u_n dans $c(Y_n \otimes \overline{Y_n})$ et de v_n dans $c(X_n \otimes \overline{X_n})$ équivaut à l'existence de poids opératoriels d'indice fini F_{u_n} de N_{n+1} dans N_n et F_{v_n} de M_{n+1} dans M_n.

Nous résumons cette situation par un diagramme.

$$\begin{tikzcd}
N_0=N & & & & & M_0=M \\
 & \Longleftrightarrow & u\in c(Y_0\otimes\overline{Y}_0) \arrow[dd] \arrow[ddr, "\nu"] & \overline{u}\in c(X_0\otimes\overline{X}_0) \arrow[dd] \arrow[ddl, "\nu"'] & \Longleftrightarrow & \\
N_1=\mathcal{L}_M(\overline{X}) \arrow[uu, "F_u"'] & & & & & M_1=\mathcal{L}_N(X) \arrow[uu, "F_{\overline{u}}"] \\
 & \Longleftrightarrow & u_1\in c(Y_1\otimes\overline{Y}_1) & v_1\in c(X_1\otimes\overline{X}_1) & \Longleftrightarrow & \\
\vdots \arrow[uu, "F_{u_1}"'] & & \vdots & \vdots & & \vdots \arrow[uu, "F_{v_1}"] \\
N_n & & & & & M_n \\
 & \Longleftrightarrow & u_n\in c(Y_n\otimes\overline{Y}_n) \arrow[dd] & v_n\in c(X_n\otimes\overline{X}_n) \arrow[dd] & \Longleftrightarrow & \\
N_{n+1} \arrow[uu, "F_{u_n}"'] & & & & & M_{n+1} \arrow[uu, "F_{v_n}"] \\
 & \Longleftrightarrow & u_{n+1}\in c(Y_{n+1}\otimes\overline{Y}_{n+1}) & v_{n+1}\in c(X_{n+1}\otimes\overline{X}_{n+1}) & \Longleftrightarrow & \\
N_{n+2} \arrow[uu, "F_{u_{n+1}}"'] & & & & & M_{n+2} \arrow[uu, "F_{v_{n+1}}"]
\end{tikzcd}$$

Remarquons que, dans le cas des facteurs, tous les poids opératoriels construits ont le même indice que u.

3.4. Applications complètement positives.

3.4.1. Définition. Soit φ une application complètement positive de M dans N. On dira que φ est *non dégénérée* si la correspondance $\mathfrak{X}(\varphi)$ est non dégénérée.

Il est facile de voir qu'en particulier, si φ est fidèle et si $\varphi(1)$ est de supports 1, alors φ est non dégénérée.

3.4.2. LEMME. *Soit φ une application complètement positive de M dans N. Le vecteur $\widetilde{\xi_\varphi}$, appartenant à la N-$\mathcal{L}_N(\mathfrak{X}(\varphi))$-correspondance $\widetilde{\mathfrak{X}}(\varphi)$, définit une application complètement positive, notée $\widetilde{\varphi}$, de N dans $\mathcal{L}_N(\mathfrak{X}(\varphi))$.*

(i) *Pour tout $n \in N$, on a $\widetilde{\varphi}(n) = \theta_{\xi_\varphi \cdot n, \xi_\varphi}$.*

(ii) $\mathfrak{X}(\widetilde{\varphi}) = \widetilde{\mathfrak{X}}(\varphi)$.

Preuve. Immédiat. ∎

3.4.3. LEMME. *Soient φ de M dans N et ψ de N dans M, deux applications complètement positives non dégénérées. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Il existe $u \in c(\mathfrak{X}(\psi) \otimes \mathfrak{X}(\varphi))$ tel que $\widehat{u}(\xi_\psi) = \xi_\varphi$.*

(ii) *Il existe $K \in \mathbf{R}^+$ tel que $K\pi_{\mathfrak{X}(\varphi)} \circ \psi - \widetilde{\varphi}$ soit complètement positive.*

Preuve. Posons $X = \mathfrak{X}(\varphi), Y = \mathfrak{X}(\psi), \xi = \xi_\varphi$ et $\eta = \xi_\psi$.

(ii) $\Longrightarrow$ (ii) D'après l'assertion (ii) du théorème 2.2.2, il existe $K \in \mathbf{R}^+$ tel que, pour toute famille finie $(n_i)_{i=1,\dots,k}$ de N, on ait dans $M_k(\mathcal{L}_N(X))$

$$(\theta_{\widehat{u}(n_i\cdot\eta),\widehat{u}(n_j\cdot\eta)}) \leqslant K(\pi_X(\langle n_i\cdot\eta, n_j\cdot\eta\rangle)),$$

c'est à dire

$$(\widetilde{\varphi}(n_i^* n_j)) = \theta_{\xi\cdot n_i^*,\xi\cdot n_j^*}) \leqslant K\left(\pi_X\left(\psi(n_i^* n_j)\right)\right) .$$

D'où $K\pi_X \circ \psi - \widetilde{\varphi} \gg 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Par hypothèse, pour toute famille finie $(n_i)_{i=1,\dots,k}$ de N on a

$$(\theta_{\xi\cdot n_i^*,\xi\cdot n_j^*}) \leqslant K\left(\pi_X\left(\psi(n_i^* n_j)\right)\right) .$$

Soit $(m_i)_{i=1,\dots,k}$ une famille d'éléments de M. En multipliant à droite par la matrice $\sum_{i=1}^{k} \pi_X(m_i) \otimes e_{ii}$ et à gauche par son adjoint, on obtient $(*)$

$$(\theta_{m_i^*\cdot\xi\cdot n_i^*,m_j^*\cdot\xi\cdot n_j^*}) \leqslant K\left(\pi_X\left(m_i^*\psi(n_i^* n_j)m_j\right)\right) = K\left(\pi_X\left(\langle n_i\cdot\eta\cdot m_i, n_j\cdot\eta\cdot m_j\rangle\right)\right) .$$

La sommation de tous les coefficients d'une matrice étant une application positive, il en résulte que

$$\left\langle \sum_i (m_i^*\cdot\xi\cdot n_i^*)^\frown, \sum_i (m_i^*\cdot\xi\cdot n_i^*)^\frown \right\rangle \leqslant K\pi_X\left(\left\langle \sum_i n_i\cdot\eta\cdot m_i, \sum_i n_i\cdot\eta\cdot m_i \right\rangle\right) .$$

On peut donc définir une application M-N-antilinéaire ω du M-N-sous-bimodule Y_0 de Y algébriquement engendré par η, à valeurs dans X et telle que $\omega(\eta) = \xi$. On montre alors facilement à l'aide de l'inégalité $(*)$ que pour toute famille finie $(y_i)_{i=1,\dots,k}$ de Y_0 on a

$$(\theta_{\omega(y_i),\omega(y_i)}) \leqslant K\pi_X\left(\langle y_i, y_j\rangle\right).$$

D'après la remarque 2.2.3, il existe $u \in c(Y \otimes X)$ tel que $\widehat{u}$ prolonge ω. ∎

3.4.4. THÉORÈME. *Soient φ de M dans N et ψ de N dans M deux applications complètement positives, non dégénérées. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Il existe K et K' dans $\mathbf{R}^+$ tels que $K\pi_{\mathfrak{X}(\varphi)} \circ \psi - \widetilde{\varphi}$ et $K\pi_{\mathfrak{X}(\psi)} \circ \varphi - \widetilde{\psi}$ soient complètement positives.*

(ii) *Il existe des poids opératoriels $F \in \mathcal{P}_0(\mathcal{L}_N(\mathfrak{X}(\varphi)), M)$ et $G \in \mathcal{P}_0(\mathcal{L}_M(\mathfrak{X}(\psi)), N)$ tels que $F \circ \widetilde{\varphi} = \psi$ et $G \circ \widetilde{\psi} = \varphi$.*

(iii) *Il existe u d'indice fini dans $c(\mathfrak{X}(\psi) \otimes \mathfrak{X}(\varphi))$ tel que $\widehat{u}(\xi_\psi) = \xi_\varphi$.*

Lorsque ces conditions sont réalisées, le vecteur u, les poids opératoriels F et G sont uniques et on a

$$\mathfrak{X}(\psi) = \overline{\mathfrak{X}(\varphi)} \quad , \quad F = F_{\overline{u}} \quad \text{et} \quad G = F_u \ .$$

Preuve. (ii) $\Longrightarrow$ (i) D'après la proposition 1.5.6, il existe des vecteurs $v \in c(\mathfrak{X}(\varphi) \otimes \overline{\mathfrak{X}(\varphi)})$ et $u \in c(\mathfrak{X}(\psi) \otimes \overline{\mathfrak{X}(\psi)})$ tels que $F = F_v$ et $G = F_u$. On a alors

$$\langle \widehat{u}(\xi_\psi), \widehat{u}(\xi_\psi) \rangle = \langle u, \theta_{\xi_\psi, \xi_\psi} \cdot u \rangle = G(\theta_{\xi_\psi, \xi_\psi}) = G \circ \widetilde{\psi}(1) = \varphi(1) = \langle \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \ .$$

On peut donc identifier $\mathfrak{X}(\varphi)$ avec la sous-M-N-correspondance de $\overline{\mathfrak{X}(\varphi)}$ engendrée par l'image de $\widehat{u}$, et on a alors $\xi_\varphi = \widehat{u}(\xi_\psi)$. D'après le lemme 2.3.1, le vecteur u appartient à $c(\mathfrak{X}(\psi) \otimes \mathfrak{X}(\phi))$. De même $v \in c(\mathfrak{X}(\varphi) \otimes \mathfrak{X}(\psi))$ et $\widehat{v}(\xi_\varphi) = \xi_\psi$. Le lemme précédent permet alors de conclure.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) D'après le lemme précédent, il existe u appartenant à $c(\mathfrak{X}(\psi) \otimes \mathfrak{X}(\varphi))$ et v dans $c(\mathfrak{X}(\varphi) \otimes \mathfrak{X}(\psi))$ tels que $\widehat{u}(\xi_\psi) = \xi_\varphi$ et $\widehat{v}(\xi_\phi) = \xi_\psi$. Il en résulte immédiatement que $\widehat{u} \circ \widehat{v} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{X}(\varphi)}$ et $\widehat{v} \circ \widehat{u} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{X}(\psi)}$. Donc $\mathfrak{X}(\varphi)$ est d'indice fini.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Soient $\overline{u}$ le vecteur associé à u et $F = F_{\overline{u}} \in \mathcal{P}_0(\mathcal{L}_N(\mathfrak{X}(\varphi)), M)$. Pour tout $n \in N$ on a

$$F \circ \widetilde{\varphi}(n) = F_{\overline{u}}(\theta_{\xi_\varphi \cdot n, \xi_\varphi}) = F_{\overline{u}}(\theta_{\widehat{u}(n^* \cdot \xi_\psi), \widehat{u}(\xi_\psi)}) = \langle n^* \cdot \xi_\psi, \xi_\psi \rangle = \psi(n) \ .$$

On vérifie de même la relation $G \circ \widetilde{\psi} = \varphi$ avec $G = F_u$.

Si ces conditions sont réalisées, on a $\mathfrak{X}(\psi) = \overline{\mathfrak{X}(\varphi)}$ d'après le théorème 3.2.3. Les vecteurs ξ_φ et ξ_ψ étant totalisateurs, l'unicité du vecteur u vient du fait que l'application $u \longmapsto \widehat{u}$ est injective. La démonstration précédente montre que nécessairement $F = F_{\overline{u}}$ et $G = F_u$, d'où leur unicité. ∎

3.4.5. DÉFINITION. Si deux applications complètement positives φ et ψ vérifient les conditions du théorème précédent, nous dirons que le *couple* (φ, ψ) est *d'indice fini* et nous poserons

$$\mathrm{Ind}\,((\varphi, \psi)) = \mathrm{Ind}\,(u)\ .$$

3.4.6. COROLLAIRE. *Soit φ une application complètement positive non dégénérée de M dans N. Alors $\mathfrak{X}(\varphi)$ est d'indice fini si et seulement si il existe une application complètement positive non dégénérée ψ de N dans M telle que le couple (φ, ψ) soit d'indice fini.*

Preuve. Si $\mathfrak{X}(\varphi)$ est d'indice fini, il existe un vecteur u dans $c(\overline{\mathfrak{X}(\varphi)} \otimes \mathfrak{X}(\varphi))$ d'indice fini, et le vecteur $\eta = \widehat{\overline{u}}(\xi_\varphi)$ appartenant à $\overline{\mathfrak{X}(\varphi)}$ définit une application complètement positive ψ non dégénérée de N dans M telle que $\mathfrak{X}(\psi) = \overline{\mathfrak{X}(\varphi)}$. Il suffit donc d'appliquer le théorème précédent. ∎

Etudions le cas particulier d'un poids opératoriel fini et d'une injection.

3.4.7. PROPOSITION. *Soient N une sous-algèbre de von Neumann de M et ι l'injection canonique de N dans M et soit $F \in \mathcal{P}_0(M, N)$.*

(i) *F est d'indice fini si et seulement si le couple (F, ι) est d'indice fini. Si ces conditions sont réalisées, on a* $\mathrm{Ind}\,(F) = \mathrm{Ind}\,((F, \iota))$ *et $\mathfrak{X}(F)$ est d'indice fini.*

(ii) *Si $\mathfrak{X}(F)$ est d'indice fini, F n'est pas nécessairement d'indice fini, mais il existe $E \in \mathcal{E}(M, N)$ d'indice fini.*

(iii) *Si l'une des conditions suivantes est réalisée*

- *F est faiblement d'indice fini*
- *$\mathcal{Z}(N)$ est de dimension finie*
- *$\mathcal{Z}(M)$ est de dimension finie*

alors, $\mathfrak{X}(F)$ est d'indice fini si et seulement si F est d'indice fini.

Preuve. (i) Soit $u = 1 \otimes \xi_F \in \overline{\mathfrak{X}(F)} \otimes \mathfrak{X}(F)$. Puisque $\widehat{u}(1) = \xi_F$, le théorème précédent montre que le couple (F, ι) est d'indice fini si et seulement si le vecteur u est d'indice fini.

(ii) Supposons $\mathfrak{X}(F)$ d'indice fini et donnons un exemple où F n'est pas d'indice fini. Pour cela posons $M = N = L^\infty(\mathbb{C})$ et $a \in L^\infty(\mathbb{C})$ défini par $a(z) = |z|$ si $|z| \leqslant 1$ et $a(z) = 1$ sinon. L'application $F : g \longmapsto a^2 g$ est un poids opératoriel normal fini de $L^\infty(\mathbb{C})$ dans lui même qui n'est pas faiblement d'indice fini: si c'était le cas il existerait $K > 0$ tel que

$$\forall f \in L^\infty(\mathbb{C}) \quad \|f\|_\infty \leqslant K \|F(f)\|_\infty \quad ([3]\ \text{Proposition } 3.3)$$

et il suffit de considérer la suite des fonctions caractéristiques des boules $B(0, \frac{1}{n})$ pour voir que cette inégalité est absurde. De plus Id est une espérance conditionnelle d'indice fini et on a $\mathfrak{X}(F) = \mathfrak{X}(\mathrm{Id}) = L^\infty(\mathbf{C})$.

Revenons au cas général. Puisque $\mathfrak{X}(F)$ est d'indice fini, il existe un vecteur u appartenant $\mathfrak{X}(\iota) \otimes \mathfrak{X}(F)$ tel que F_u soit un poids opératoriel normal fini fidèle d'indice fini de $\mathcal{L}_M(\mathfrak{X}(\iota)) = M$ dans N (Corollaire 3.3.5. (ii)). Puisque $F_u(1)$ est inversible, il suffit de prendre l'espérance conditionnelle $F_u(1)^{-1}F_u$.

(iii) Si $\mathfrak{X}(F)$ est d'indice fini, après (ii), il existe $E \in \mathcal{E}(M, N)$ d'indice fini. Si F est faiblement d'indice fini, alors F est d'indice fini d'après ([3] Corollaire 3.16). Dans le cas où $\mathcal{Z}(N)$ ou $\mathcal{Z}(M)$ est de dimension finie, les corollaires 3.18 et 3.20 de [3] impliquent que F est d'indice fini. ∎

3.4.8. LEMME. *Soient N une sous-algèbre de von Neumann de M et ι l'injection canonique de N dans M. Si il existe une application complètement positive φ de M dans N telle que le couple (ι, φ) soit d'indice fini, alors φ appartient à $\mathcal{P}_0(M, N)$.*

Preuve. D'après le théorème 3.4.4, il existe un vecteur v d'indice fini dans $c(\mathfrak{X}(\varphi) \otimes \mathfrak{X}(\iota))$ tel que $\widehat{v}(\xi_\varphi) = \xi_\iota$. Pour tout $n \in N$, on vérifie aisément que $n \cdot \xi_\varphi = \xi_\varphi \cdot n$ et par suite φ est un poids opératoriel fini normal de M dans N. De plus il existe $K \in \mathbf{R}^+$ tel que $K\pi_{\mathfrak{X}(\iota)} \circ \varphi - \widetilde{\iota}$ soit complètement positive c'est à dire $K\iota \circ \varphi - \mathrm{Id}_M$ complètement positive. Cette dernière relation implique la fidélité de φ. ∎

3.4.9. PROPOSITION. *Si N une sous-algèbre de von Neumann de M et si ι désigne l'injection de N dans M, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *La correspondance $\mathfrak{X}(\iota)$ est l'indice fini.*

(ii) *Il existe un $F \in \mathcal{P}_0(M, N)$ tel que le couple (ι, F) soit d'indice fini.*

(iii) *Il existe un $F \in \mathcal{P}_0(M, N)$ et il existe $K \in \mathbf{R}^{*+}$ tel que $K\iota \circ F - \mathrm{Id}_M$ soit complètement positive.*

(iv) *Il existe un $F \in \mathcal{P}_0(M, N)$ d'indice fini.*

(v) *Il existe un $E \in \mathcal{E}(M, N)$ d'indice fini.*

Preuve. L'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) résulte du lemme précédent et du corollaire 3.4.6. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est conséquence du théorème 3.4.4. Le théorème 3.5 de [3] et la proposition 3.2.7 donnent (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv). Enfin l'implication (iv) $\Longrightarrow$ (v) vient de 3.4.7, et (v) $\Longrightarrow$ (i) est immédiat puisque $\mathfrak{X}(\iota) = \overline{\mathfrak{X}(E)}$. ∎

3.4.10. REMARQUES. Si φ est une application complètement positive de M dans N, la correspondance $\mathfrak{X}(\varphi)$ est d'indice si l'on peut trouver une application complètement positive ψ de N dans M telle que le couple (φ, ψ) soit d'indice fini.

Pour définir l'indice d'une application complètement positive φ, il faudrait donc être en mesure de privilégier une application complètement positive ψ_0 telle que le couple (φ, ψ_0) soit d'indice fini, et poser $\mathrm{Ind}\,(\varphi) = \mathrm{Ind}\,((\varphi, \psi_0))$.

Dans le cas d'un poids opératoriel fini, on dispose de l'injection canonique (Proposition 3.4.7).

Pour une inclusion il n'existe pas en général de candidat naturel, mais la proposition 3.4.9, montre qu'il faut chercher parmi les poids opératoriels finis. Dans la situation de Jones ([12]) l'espérance conditionnelle canonique qui relie les traces s'impose. Si l'inclusion est irréductible, il existe au plus une espérance conditionnelle. Si M et N sont des facteurs, l'existence d'une espérance conditionnelle minimale ([11], [14], [10]) fournit le candidat. Plus généralement, dans le cas des facteurs, cette idée conduit à la notion d'indice d'une correspondance. L'étude de ce problème est faite dans [6].

Remerciements

Nous tenons à exprimer toute notre gratitude à Madame C. Anantharaman-Delaroche pour les encouragements et les critiques éclairées qu'elle nous a prodigués pendant l'élaboration de cet article.

REFERENCES

1. C. ANANTHARAMAN-DELAROCHE, On relative amenability for von Neumann algebras, *Compositio Math.* **74**(1990), 333–352.
2. C. ANANTHARAMAN-DELAROCHE, *Atomic correspondences*, *Indiana Univ. Math. J.* **42**(1993).
3. M. BAILLET, Y. DENIZEAU, J. F. HAVET, Indice d'une espérance conditionnelle, *Compositio Math.* **66**(1988), 199–236.
4. A. CONNES, On the spatial theory of von Neumann algebras, *J. Funct. Anal.* **35**(1980), 153–164.
5. A. CONNES, Correspondances, Notes manuscrites 1980.
6. Y. DENIZEAU, J. F. HAVET, *Correspondances d'indice fini II, Indice d'une correspondance*, in *Proceedings of OT15 Conference*, to appear.
7. M. ENOCK, R. NEST, *Inclusion of factors and mulplicative unitaries*, preprint.
8. U. HAAGERUP, The standard form of von Neumann algebras, *Math. Scand.* **37**(1975), 271–283.
9. U. HAAGERUP, Operator valued weights in von Neumann algebras I. *J. Funct. Analysis*, **32**(1979), 175–206; II. *J. Funct. Anal.* **33**(1979), 339–361.
10. J. F. HAVET, Espérance conditionnelle minimale, *J. Operator Theory* **24**(1990), 33–55.

11. F. HIAI, Minimizing indices of conditional expectations onto a subfactor, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **27**(1988), 673–678.
12. V. F. R. JONES, Index for subfactors, *Invent. Math.* **72**(1983), 1–25.
13. H. KOSAKI, Extension of Jones'theory on index to arbitrary factors, *J. Funct. Anal.*, **66**(1986), 123–140 .
14. R. LONGO, Index for subfactors and statistics of quantum fields. I, *Comm. Math. Phys.* **126**(1989), 217–247.
15. R. LONGO, Index for subfactors and statistics of quantum fields. II, Correspondances, Braid group statistics, and Jones polynomials, *Comm. Math. Phys.* **130**(1990), 285–309.
16. W. L. PASCHKE, Inner product modules over B^*-algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **182**(1973), 443–468.
17. M. PIMSNER, S. POPA, Entropy and index for subfactors, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **19**(1986), 57–106.
18. M. PIMSNER, S. POPA, Iterating the basic construction, *Trans. Amer. Math. Soc.* **310**(1988), 127–134.
19. S. POPA, *Correspondances*, preprint, INCREST 1986.
20. M. A. RIEFFEL, Induced representations of C^*-algebras, *Adv. Math.* **13**(1974), 176–257.
21. M. A. RIEFFEL, Morita equivalence for C^*-algebras and W^*-algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **5**(1974), 51–96 .
22. J. L. SAUVAGEOT, Sur le produit tensoriel relatif d'espaces de Hilbert, *J. Operator Theory* **9**(1983), 237–252.

YVES DENIZEAU et JEAN-FRANÇOIS HAVET
Université d'Orléans
Département de Mathématiques
B.P. 6759, 45067 Orléans Cedex 2
FRANCE

Reçu le 1-er juin, 1993.