J. OPERATOR THEORY
34(1995), 197–211

CONSTRUCTION D'UN CALCUL FONCTIONNEL SOUS CERTAINES CONDITIONS DE CROISSANCE DE LA RÉSOLVANTE

VALÉRIE MARTEL-GOLSE

Communicated by Norberto Salinas

ABSTRACT. Let T be an operator on a Hilbert space H with spectrum $\mathbf{T}$, the unit circle in $\mathbf{C}$. Assume the existence of two segments S_1 and S_2 in the complex plane such that $S_i \cap \mathbf{T} = \{z_i\}$ and the function $z \to \|(z - T)^{-1}\|(1 - |z|)$ is bounded on $S_1 \cup S_2 \setminus \{z_1, z_2\}$. The main result of the paper is construction of a functional calculus for such operators, defining $\varphi(f)$ for f holomorphic near one of the arcs joining z_1 et z_2 on $\mathbf{T}$, satistying $f(z_1) = f(z_2) = 0$. Various extensions to other types of operators, as well as applications to the invariant subspace problem for operators with connected spectrum are given.

KEYWORDS: *Growth of the resolvent, hyperinvariant subspaces, functional calculus, completely non unitary contractions.*

AMS SUBJECT CLASSIFICATION: 47A10, 47A15, 47A60

INTRODUCTION

Soit H un espace de Hilbert complexe, séparable, de dimension infinie. On note de façon usuelle $L(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus sur H on $\mathbf{T}$ le cercle unité dans $\mathbf{C}$.

Pour $T \in L(H)$, $R(\cdot, T)$ est la fonction analytique sur le complémentaire dans $\mathbf{C}$ du spectre $\sigma(T)$ définie par $R(u, T) = (u - T)^{-1}$.

Sous des conditions à préciser ultérieurement (conditions de croissance de $R(\cdot, T)$ au voisinage de $\mathbf{T}$), nous allons construire un calcul fonctionnel pour l'opérateur T. Il s'agit d'étudier l'existence de sous-espaces invariants pour T, et nous obtiendrons en fait une décomposition de H en somme directe algébrique de deux sous-espaces hyperinvariants pour T non triviaux.

Nous rappellons qu'un sous-espace hyperinvariant pour T est un sous espace fermé F de H tel que $F \supset SF$ pour tout opérateur S qui commute avec T. Si de plus F est distinct de $\{0\}$ et H, il est dit non trivial (notation SHNT).

Dans un premier temps, l'hypothèse de travail est $\sigma(T) = \mathbf{T}$. Elle permet une présentation commode de la construction et des résultats qui en découlent (parties 1 et 2), et s'applique au cas de certains shifts et de contractions n'appartenant pas à la classe $\mathbf{A}$ (parties 3 et 4). Puis nous étudierons les possibilités d'extensions: d'une part, on peut modifier les conditions de spectre, d'autre part on peut admettre des conditions de croissance plus faibles de la résolvante R (partie 5).

Cet article, dont la référence de base est [1], reproduit et complète un chapitre de ma thèse de doctorat (thèse de l'Université Paris VI soutenue en mars 1990). Je tiens à remercier mon directeur de recherche Bernard Chevreau, sans lequel ce travail n'existerait pas.

1. CONSTRUCTION

Soit T un opérateur sur H de spectre $\mathbf{T}$. Pour $z \in \mathbf{T}$, on dit que T *vérifie la condition* $C(z)$ s'il existe un segment ouvert radial S de centre z, et un réel $a \in]0,1[$ tels que: $\forall u \in S \setminus \{z\}$, $\|R(u,T)\| \leqslant \frac{1}{a}|1 - |u||^{-1}$.

Cette condition équivaut à: $\forall x \in H$, $\forall u \in S \setminus \{z\}$, $\|(u-T)x\| \geqslant a|1 - |u||\,\|x\|$.

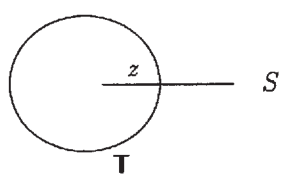

Diagramme 1.

REMARQUE 1.1. Si $\mathbf{T} \supset \sigma(T)$, on a:

$$\forall u \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{T}, \quad \|R(u,T)\| \geqslant (\operatorname{dist}(u, \sigma(T)))^{-1} \geqslant |1 - |u||^{-1}.$$

REMARQUE 1.2. Si T est une contraction, i.e. $\|T\| \leqslant 1$, on déduit de la remarque précédente et de l'inégalité de von Neumann ($\|p(T)\| \leqslant \|p\|_\infty$ pour tout polynôme p, où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme du sup sur le disque unité $\mathbf{D}$) que pour tout $u \in \mathbf{C}$ de module > 1, $\|R(u,T)\|$ vaut exactement $|1 - |u||^{-1}$. Il suffit donc de vérifier la condition $C(z)$ à l'intérieur du disque unité.

REMARQUE 1.3. On pourrait remplacer les hypothèses sur T par: il existe un arc U tel que

$$U \cap \mathbf{T} = \{z\} \quad \text{et} \quad \forall u \setminus \{z\},\ \|R(u,T)\| \leqslant \frac{1}{a}|z-u|^{-1}.$$

Mais le problème ne change pas fondamentalement et les notations sont alourdies. Nous conservons donc, pour l'instant, le cadre indiqué au début du paragraphe.

On considère dans la suite de cette partie un opérateur $T \in L(H)$ tel que $\sigma(T) = \mathbf{T}$, vérifiant les conditions $C(z_1)$ et $C(z_2)$, où z_1 et z_2 sont deux points distincts du cercle unité. Pour $i = 1,2$, S_i est le segment correspondant. On désigne par Γ l'un des arcs fermés de $\mathbf{T}$ d'extrémités z_1 et z_2, et par $A(\Gamma)$ l'ensemble des fonctions analytiques au voisinage de Γ, nulles en z_1 et z_2.

PROPOSITION 1.4. *Soit $f \in A(\Gamma)$. Pour tout ouvert $O \supset \Gamma$ simplement connexe dans lequel f est analytique; pour tout lacet γ inclus dans O et orienté positivement, tel que $\gamma \cap S_i$ contienne un segment ouvert autour de z_i $(i = 1,2)$, l'intégrale*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(u)R(u,T)\,\mathrm{d}u$$

a un sens et est indépendante du chemin γ ainsi choisi.

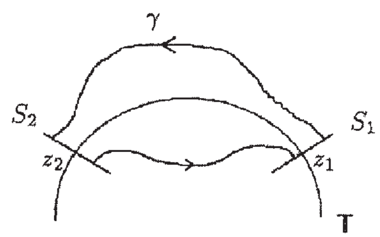

Diagramme 2.

Démonstration. Rappelons que l'intégrale est la limite pour la norme de $L(H)$ de sommes de Riemann. Il suffit de remarquer que la fonction $u \to f(u)R(u,T)$ est bornée sur $(\gamma \cap S_i) \setminus \{z_i\}$ (en fait sur $\gamma \setminus \{z_1, z_2\}$), pour montrer la première partie de la proposition.

Soit maintenant γ' un autre lacet satisfaisant aux conditions indiquées. γ et γ' coincident sur deux segments ouverts contenant les z_i, donc on se ramène à une expression de la forme

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(u)R(u,T)\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'} f(u)R(u,T)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2i\pi}\sum_{j=1}^{r}\int_{\delta_j} f(u)R(u,T)\,\mathrm{d}u$$

où les δ_j sont des lacets inclus dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{T}$ (plus précisément dans $O \setminus \mathbf{T}$).

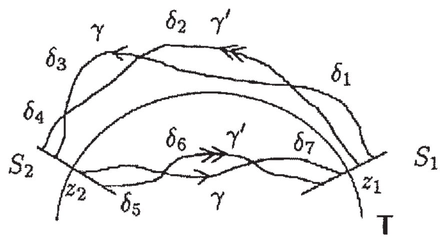

Diagramme 3.

Chaque intégrale du second membre est nulle, donc il y a la relation:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} f(u)R(u,T)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'} f(u)R(u,T)\,\mathrm{d}u.$$

On note $\Phi(f)$ la valeur commune, pour $f \in A(\Gamma)$, des intégrales qui interviennent dans la proposition 1.4. ∎

PROPOSITION 1.5. *Les propriétés suivantes sont vérifiées:*

(i) *L'application Φ est un homomorphisme d'algèbres de $A(\Gamma)$ dans R_T, où R_T est l'adhérence dans $L(H)$ de l'ensemble des fractions rationnelles en T à pôles hors de $\sigma(T)$, i.e. la sous-algèbre uniformément fermée de $L(H)$ engendrée par T et T^{-1}.*

(ii) *Pour tout $f \in A(\Gamma)$, $f(\Gamma)$ est inclus dans le spectre de $\Phi(f)$. En particulier si f n'est pas identiquement nulle au voisinage de $\mathbf{T}$, $\Phi(f)$ n'est pas l'opérateur nul.*

(iii) *Pour tout polynôme p et tout $f \in A(\Gamma)$, on a: $p(T)\Phi(f) = \Phi(pf)$.*

(iv) *Si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de fonctions dans $A(\Gamma)$ définies sur un même voisinage O de Γ, convergeant uniformément sur tout compact de O vers f, alors $\Phi(f_n)$ converge vers $\Phi(f)$ pour la topologie uniforme de $L(H)$.*

Démonstration. (i) Ni la linéarité de Φ, ni le fait que cette application soit à valeurs dans R_T ne pose de problème. Pour $f, g \in A(\Gamma)$, le produit fg est élément de $A(\Gamma)$, et nous montrons l'égalité $\Phi(f)\Phi(g) = \Phi(fg)$. La démonstration diffère de celle qui est donnée pour le problème analogue dans le calcul fonctionnel de Riesz ([7]), car les chemins servant à définir $\Phi(f)$ et $\Phi(g)$ ont une partie commune, à savoir un segment ouvert autour de chacun des points z_1 et z_2.

Soient donc $f, g \in A(\Gamma)$ et O un ouvert simplement connexe contenant Γ dans lequel f et g sont simultanément analytiques. La proposition 1.4 permet de choisir γ_f et γ_g tels que $\gamma_f \setminus S_i$ soit à l'intérieur de γ_g ($i = 1, 2$).

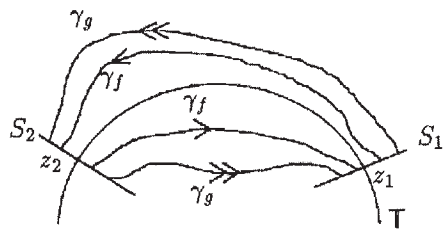

Diagramme 4.

On a

$$\Phi(f)\Phi(g) = \left(\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\right)^2 \left[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\alpha_j)R(\alpha_j, T)\right]\left[\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} g(\beta_k)R(\beta_k, T)\right]$$

où $(\alpha_j)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(\beta_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$ sont des subdivisions de γ_f et γ_g. Or, si $\alpha_j \neq \beta_k$, la résolvante vérifie

$$R(\alpha_j, T)R(\beta_k, T) = \frac{1}{(\alpha_j - \beta_k)}(R(\beta_k, T) - R(\alpha_j, T)).$$

De plus

$$\forall\, j, \quad \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \frac{g(\beta_k)}{\beta_k - \alpha_j} = g(\alpha_j) \quad \text{si} \quad \alpha_j \notin \gamma_g,$$

$$\forall\, k, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{f(\alpha_j)}{\alpha_j - \beta_k} = 0 \quad \text{si} \quad \beta_k \notin \gamma_f.$$

D'après la proposition 1.4, la longueur du segment $\gamma_f \cap S_i$ peut être arbitrairement réduite, d'autre part $f(z)$ et $g(z)$ sont de l'ordre de $(z - z_i)$ au voisinage de z_i, ce qui donne finalement

$$\Phi(f)\Phi(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\alpha_j)g(\alpha_j)R(\alpha_j, T) = \Phi(fg).$$

(ii) f et γ sont comme précédemment. Soit $z \in \Gamma \setminus \{z_1, z_2\}$ (en particulier $z \in \sigma(T)$). Pour tout $u \in \gamma\setminus\{z_1, z_2\}$, le spectre de $R(u, T)$ est $\{(u-t)^{-1}, t \in \sigma(T)\}$, donc contient $(u - z)^{-1}$. On a

$$\Phi(f) - f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma} f(u)[R(u, T) - (u - z)^{-1}]\,\mathrm{d}u.$$

Mais pour $u \in \gamma \setminus \{z_1, z_2\}$, $R(u,T) - (u-z)^{-1}$ s'écrit $(z-T)S$, où S est un opérateur qui commute avec T, donc est non inversible dans $L(H)$. L'opérateur $\Phi(f) - f(z)$ est limite (pour la topologie uniforme de $L(H)$) d'opérateurs non inversibles, par conséquent il est non inversible: $f(z) \in \sigma(\Phi(f))$. Par continuité de f et du fait que $\sigma(\Phi(f))$ est fermé, on obtient $f(\Gamma) \subset \sigma(\Phi(f))$.

S'il existe un voisinage de Γ sur lequel f n'est pas identiquement nulle, alors il existe $z \in \Gamma$ tel que $f(z) \neq 0$ et donc $\sigma(\Phi(f))$ n'est pas réduit à $\{0\}$. L'opérateur $\Phi(f)$ n'est pas nul.

(iii) Soit $p \in \mathbb{C}[X]$. On a $p(T) - p(u) = (u-T)q(u,T)$, où $q(u,T)$ est un polynôme en u et T, donc $[p(T)-p(u)]R(u,T) = q(u,T)$,

$$p(T)\Phi(f) - \Phi(pf) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(u)[p(T)-p(u)]R(u,T)\,du = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(u)q(u,T)\,du = 0.$$

(iv) Remarquons d'abord que f est élément de $A(\Gamma)$ puisque $f(z_i) = 0$ et que f est analytique dans O (d'après un théorème de Weierstrass selon lequel l'ensemble des fonctions analytiques sur un ouvert est fermé pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de cet ouvert). Soient γ un arc inclus dans O comme dans la proposition 1.4, et K un compact tel que $O \supset \overset{\circ}{K} \supset \gamma$. On définit les fonctions g_n et g par:

$$g_n(z) = f_n(z)/(z-z_1)(z-z_2) \quad \text{et} \quad g(z) = f(z)/(z-z_1)(z-z_2) \quad \forall z \in O.$$

Le principe du maximum donne:

$$\sup_{z\in K} |g_n(z) - g(z)| \leqslant \frac{1}{\inf\limits_{z\in K} |z-z_1|\,|z-z_2|} \sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)|$$

$$\sup_{z\in K} |g_n(z) - g(z)| \leqslant \frac{1}{(\mathrm{dist}(\gamma, \delta K))^2} \sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)|.$$

Donc $(g_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers g uniformément sur K, en particulier sur γ. D'autre part, pour tout $u \in \gamma \setminus \{z_1, z_2\}$ on a:

$$(f_n(u) - f(u))R(u,T) = (g_n(u) - g(u))(u-z_1)(u-z_2)R(u,T)$$

et la fonction $u \to (u-z_1)(u-z_2)R(u,T)$ est bornée sur $\gamma \setminus \{z_1, z_2\}$. Finalement

$$\|\Phi(f_n) - \Phi(f)\| \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \quad \blacksquare$$

REMARQUE 1.6. A priori, dans (iii), $\Phi(p)$ n'est pas défini puisqu'on n'a pas imposé à p de s'annuler en z_1, z_2. Si $p(z_i) = 0$, la dernière formule donne $(p(T) - \Phi(p))\Phi(f) = 0$. D'où: $\forall f \in A(\Gamma)$, $\Phi(f) \in \mathrm{Ker}(p(T) - \Phi(p))$.

En utilisant (iv), on peut aussi déduire que si $g \in A(\Gamma)$ est développable en série de Laurent de centre 0 avec des coefficients d'indice strictement négatifs nuls, alors $g(T)\Phi(f) = \Phi(g)\Phi(f)$ pour tout $f \in A(\Gamma)$.

2. APPLICATION À L'EXISTENCE DE SOUS-ESPACES INVARIANTS.

On se donne encore un opérateur $T \in L(H)$ de spectre $\mathbf{T}$, vérifiant les conditions $C(z_1)$ et $C(z_2)$, où z_1 et z_2 sont deux points distincts du cercle unité. La construction de la section précédente s'adapte indifféremment aux deux arcs de $\mathbf{T}$ d'extrémités z_1 et z_2. On note $\Gamma^+_{1,2}$ l'arc sur lequel on va de z_1 à z_2 dans le sens trigonométrique direct et $\Gamma^-_{1,2}$ l'autre arc (ces notations seront éventuellement abrégées en Γ^+ et Γ^- s'il n'y a pas d'ambiguité). Les arcs Γ^+ et Γ^- conduisent à des algèbres $A(\Gamma^+)$ et $A(\Gamma^-)$ et à des morphismes Φ^+ et Φ^-.

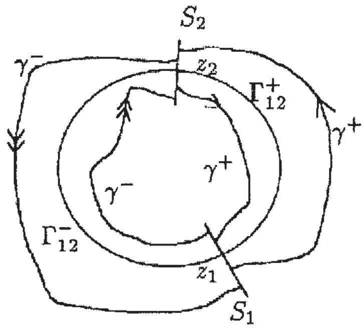

Diagramme 5.

On désigne par $A(z_1, z_2)$ l'ensemble des fonctions analytiques au voisinage de $\mathbf{T}$, nulles en z_1 et z_2.

PROPOSITION 2.1. *Pour tout $f \in A(z_1, z_2)$, on a l'égalité $f(T) = \Phi^+(f) + \Phi^-(f)$, où $f(T)$ est donné par le calcul fonctionnel de Dunford-Riesz.*

Démonstration. Si on note γ^+ et γ^- les lacets qui servent à définir $\Phi^+(f)$ et $\Phi^-(f)$, il suffit de voir que les intégrales sur $\gamma^+ \cap \gamma^- \cap S_i$ $(i = 1, 2)$ se compensent. Il reste une intégrale sur un chemin γ qui est la réunion de deux lacets ne rencontrant pas $\mathbf{T}$.

L'intégrale sur γ est la somme des intégrales sur γ^+ et γ^-, et on a, par définition,

$$f(T) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(u) R(u, T)\, du. \quad \blacksquare$$

PROPOSITION 2.2. *Pour tout $f \in A(z_1, z_2)$, on a $\Phi^+(f)\Phi^-(f) = 0$.*

Démonstration. $(\Phi^+(f) + \Phi^-(f))^2 = \Phi^+(f)^2 + \Phi^-(f)^2 + 2\Phi^+(f)\Phi^-(f)$ car R_T est commutative.

$$(2.1) \qquad (\Phi^+(f) + \Phi^-(f))^2 = \Phi^+(f^2) + \Phi^-(f^2) + 2\Phi^+(f)\Phi^-(f)$$

d'après proposition 1.5 et la ligne précédente. Or

$$(2.2) \qquad (\Phi^+(f) + \Phi^-(f))^2 = (f(T))^2 = f^2(T) = \Phi^+(f^2) + \Phi^-(f^2).$$

La comparaison de (2.1) et (2.2) donne le résultat. ∎

COROLLAIRE 2.3. *Si la fonction $f \in A(z_1, z_2)$ n'est pas identiquement nulle au voisinage de $\mathbf{T}$, alors $\operatorname{Ker}\Phi^+(f)$ et $\operatorname{Ker}\Phi^-(f)$ sont des sous-espaces hyperinvariants non triviaux pour T.*

Démonstration. On a $\operatorname{Ker}\Phi^-(f) \supset \operatorname{Im}\Phi^+(f)$ et $\operatorname{Ker}\Phi^+(f) \supset \operatorname{Im}\Phi^-(f)$ (proposition 2.2). De plus $\Phi^-(f)$ et $\Phi^+(f)$ sont non nuls (proposition 1.5), d'où le corollaire. ∎

COROLLAIRE 2.4. *Soient $f, g \in A(z_1, z_2)$. Si $\Phi^+(f) = \Phi^-(g)$, alors f et g sont identiquement nulles au voisinage de $\mathbf{T}$.*

Démonstration. Si $\Phi^+(f) = \Phi^-(g)$ alors $\Phi^+(f)\Phi^+(g) = 0 = \Phi^-(f)\Phi^-(g)$. Φ^+ et Φ^- étant des morphismes d'algèbres, il s'en suit que $\Phi^+(fg) = 0 = \Phi^-(fg)$. Via la proposition 1.5.(ii), fg est nulle au voisinage de Γ^+ et Γ^- donc de $\mathbf{T}$. Une des fonctions f, g est nulle au voisinage de $\mathbf{T}$.

Si f est nulle au voisinage de $\mathbf{T}$, alors $\Phi^-(g) = 0$, donc g est nulle au voisinage de Γ^-, et par le théorème du prolongement analytique g est nulle au voisinage de $\mathbf{T}$.

Le cas où g est nulle au voisinage de $\mathbf{T}$ se traite de façon analogue. On obtient la nullité de f et g au voisinage de $\mathbf{T}$. ∎

PROPOSITION 2.5. *Soit f une fonction analytique au voisinage de $\mathbf{T}$. Il existe des opérateurs S^+ et S^-, non nuls, dans R_T tels que:*

$$f(T) = (z_1 - z_2)^{-1}[f(z_1)(T - z_2) - f(z_2)(T - z_1)] + S^+ + S^- \quad \textit{et} \quad S^+S^- = 0.$$

Démonstration. La fonction g définie par:

$$g(z) = f(z) - (z_1 - z_2)^{-1}[f(z_1)(z - z_2) - f(z_2)(z - z_1)]$$

est élément de $A(z_1, z_2)$. On prend $S^+ = \Phi^+(g)$ et $S^- = \Phi^-(g)$. ∎

COROLLAIRE 2.6. *Il existe des opérateurs S^+ et S^-, non nuls, dans R_T tels que*

$$(T - z_1)(T - z_2) = S^+ + S^- \quad \textit{et} \quad S^+S^- = 0.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 2.5 à la fonction polynôme $z \rightarrow (z - z_1)(z - z_2)$. ∎

Nous sommes maintenant en mesure de donner le résultat principal de cette section.

THÉORÈME 2.7. *Soit $T \in L(H)$ un opérateur tel que $\sigma(T) = \mathbf{T}$, possédant les propriétés $C(z_1)$ et $C(z_2)$ (z_i points distincts sur cercle unité). Si*

(i) *les z_i ne sont pas valeurs propres de T,*

(ii) *les $\bar{z}_i$ ne sont pas valeurs propres de T^*,*

alors il existe deux SHNT *pour T disjoints, dont la somme est dense dans H.*

Démonstration. On reprend la décomposition donnée par le corollaire 2.6.

• $\forall x \in H$, $(T - z_1)(T - z_2)x = S^+x + S^-x$, avec $S^+x \in \operatorname{Ker} S^-$ et $S^-x \in \operatorname{Ker} S^+$. Donc $\operatorname{Im}(T - z_1)(T - z_2)$ est inclus dans $\operatorname{Ker} S^- + \operatorname{Ker} S^+$.

• Si $x \in \operatorname{Ker} S^- \cap \operatorname{Ker} S^+$, alors $(T - z_1)(T - z_2)x = 0$, et donc $x = 0$ (cf. hypothèse (i)).

• $\operatorname{Im}(T - z_1)(T - z_2)$ est dense dans H d'après l'hypothèse (ii).

Les espaces $H^+ = \operatorname{Ker} S^-$ et $H^- = \operatorname{Ker} S^+$ ont les propriétés indiquées. ∎

A noter que pour une contraction, les hypothèses (i) et (ii) sont équivalentes puisque un vecteur propre pour T relativement à la valeur propre $z \in \mathbf{T}$ est propre pour T^* relativement au conjugué $\bar{z}$ de z, et réciproquement.

3. CAS DES OPÉRATEURS DE DÉPLACEMENT (SHIFTS À POIDS)

On appelle opérateur de déplacement, ou shift à poids, dans l'espace de Hilbert H un opérateur qui envoie chaque vecteur d'une base orthonormée $(e_n)_{n\in I}$ de H sur un multiple du suivant ($I = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$): $Te_n = w_n e_{n+1} \forall n \in I$, où $(w_n)_{n\in I}$ est une suite complexe. L'opérateur est dit unilatéral si $I = \mathbb{N}$, bilatéral si $I = \mathbb{Z}$.

Nous convenons de noter $T = [(w_n)]_{n\in\mathbb{Z}}$ le shift bilatéral de H associé à la suite de poids $(w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans une base orthonormée de H.

On va étudier les shifts à poids dans le cadre du calcul fonctionnel défini précédemment.

N'oublions pas que le problème qui reste en toile de fond est celui de l'existence de sous-espaces hyperinvariants (SH). Or pour un shift T unilatéral ou bilatéral non inversible, le commutant de T (i.e. l'ensemble des opérateurs qui commutent avec T) est la sous-algèbre fortement fermée de $L(H)$ engendrée par T. Donc tout sous-espace invariant (SI) — ils sont abondants, citons par example le sous-espace fermé engendré par les e_k, $k \geqslant n$, où n est un entier fixé — est hyperinvariant. En résumé le problème n'est ouvert que pour les shifts bilatéraux inversibles, et il n'est pas restrictif de se placer dans ce cas.

Soit donc $T = [(w_n)]_{n\in\mathbb{Z}}$. A. Shields a montré les propriétés suivantes ([9]):

(i) T est unitairement équivalent au shift $[(|w_n|)]_{n\in\mathbb{Z}}$, ainsi qu'à $[(c_n w_n)]_{n\in\mathbb{Z}}$ pour toute suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes de module 1.

(ii) T est inversible si et seulement si $\inf\limits_{n\in\mathbb{Z}} |w_n| > 0$.

On suppose donc réalisée l'hypothèse $\left[\inf\limits_{n\in\mathbb{Z}} |w_n| > 0\right]$. Le spectre $\sigma(T)$ est alors la couronne $\{z \in \mathbf{C}, r(T^{-1})^{-1} \leqslant |z| \leqslant r(T)\}$.

D'après la première propriété rappelée, pour tout $z \notin \sigma(T)$, les normes de $R(z,T)$ et $R(|z|,T)$ sont égales. Donc T entre dans les hypothèses du calcul fonctionnel des parties 1 et 2 si et seulement si $[r(T) = (r(T^{-1}))^{-1}$ et T a la propriété $C(1)]$. Si ces deux conditions sont réalisées, T a la propriété $C(z)$ en tout point $z \in \mathbf{T}$ et pour une même constante a. Nous allons voir, en donnant sans démonstration un théorème de Nagy et Foiaş ([5], p. 344), qu'alors l'opérateur a une forme bien particulière.

THÉORÈME 3.1. ([5]) *Si $T \in L(H)$ est un opérateur de spectre inclus dans $\mathbf{T}$ et vérifiant $\|R(u,T)\| \leqslant d(1-|u|)^{-1}$, $\forall u \in \mathbf{D}$ (d constante > 0), alors T est semblable à un opérateur unitaire.*

COROLLAIRE 3.2. *Les seuls shifts auquels on puisse appliquer le calcul fonctionnel défini en partie 1 sont ceux qui sont semblables au shifts bilatéral sans poids, c'est-à-dire les shifts inversibles dont les itérés directs ($T^n, n \geqslant 0$) et inverses ($T^n, n < 0$) sont bornés.*

Démonstration. Comme on l'a déja remarqué, si T a la propriété $C(1)$, alors T a la propriété $C(z)$ pour tout $z \in \mathbf{T}$. Il existe $b > 0$ et $c \in]0,1[$ tels que:

$$\|R(u,T)\| \leqslant b(1-|u|)^{-1} \quad \forall u \in \mathbf{D} \text{ vérifiant } |u| > 1-c.$$

On pose $d = \max\left(b, \sup\limits_{|u|\leqslant 1-c} \|R(u,T)\|(1-|u|)\right)$. Cette constante vérifie l'hypothèse du théorème 3.1, donc T est semblable à un opérateur unitaire, en particulier les suites $(\|T^n\|)_{n\geqslant 0}$ et $(\|T^{-n}\|)_{n\geqslant 0}$ sont majorées indépendamment de n et, d'après [9], Section 2, T est semblable au shift bilatéral sans poids noté T_0. ∎

REMARQUE 3.3. On connait les sous espaces hyperinvariants pour T_0. En identifiant T_0 et la multiplication par la variable z dans $L_2(\mathbf{T})$, ces espaces sont les F_A

$$F_A = \{f \in L_2(\mathbf{T}), f|_A = 0\},$$

où A est un borélien de $\mathbf{T}$. Donc les espaces hyperinvariants obtenus, pour un shift bilatéral semblable à T_0, par le calcul fonctionnel construit ici sont isomorphes à des F_A. Il est légitime de se demander si ces A sont des boréliens particuliers, par exemple des arcs de $\mathbf{T}$. La question est pour l'instant ouverte.

4. APPLICATION AUX CONTRACTIONS DE SPECTRE $\mathbb{T}$

Pour situer le problème, nous allons faire une présentation de la notation d'algèbre duale et de la classe $\mathbf{A}$.

Si T est une contraction, il existe une décomposition $T = T_0 \oplus T_1$ (correspondant à la décomposition $H = H_0 \oplus H_1$) où T_0 est unitaire et T_1 est complètement non unitaire, notation cnu (i.e. il n'existe pas de sous-espace fermé F de H_1 tel que $T_1 F$ soit inclus dans F et que $T_1|_F$ soit unitaire). Lorsqu'on s'intéresse à l'existence de SI ou SH, on peut sans restriction supposer T cnu puisque, dans le cas contraire, T_0 a des SHNT, qui sont aussi hyperinvariants pour T.

Avec les notations ci-dessus, la contraction T est dite *absolument continue* si H_0 est réduit à $\{0\}$ ou si la mesure spectrale de T_0 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m sur $\mathbb{T}$.

Une *algèbre duale* dans $L(H)$ est une sous-algèbre unitaire de $L(H)$ fermée pour la topologie faible de dual, résultant de la dualité $L(H) = C_1(H)'$ représentée par la forme bilinéaire $(T, S) \to \mathrm{tr}(TS)$ $\forall T \in L(H)$, $\forall S \in C_1(H)$, où $C_1(H)$ est l'ensemble des opérateurs à trace sur H.

La classe $\mathbf{A}$ est l'ensemble des contractions absolument continues pour lesquelles le calcul fonctionnel de Nagy-Foiaş est isométrique. Rappelons que ce calcul est défini sur l'ensemble $H^\infty(\mathbb{T})$ des fonctions intégrables bornées sur $\mathbb{T}$, dont les coefficients de Fourier d'indice strictement négatif sont nuls.

Si T est élément de $\mathbf{A}$, l'application $\Phi_T : H^\infty \to L(H)$, $h \to h(T)$ est un isomorphisme isométrique de H^∞ sur l'algèbre duale A_T engendrée par T.

Une partie E du disque unité ouvert $\mathbb{D}$ est dite *dominante* sur $\mathbb{T}$ si

$$\forall h \in H^\infty, \quad \|h\|_\infty = \sup_{z \in E} \|h(z)\|$$

ou, formulation équivalente, si presque tout point de $\mathbb{T}$ (relativement à m) est limite non tangentielle de points de E.

Pour une contraction cnu dont le spectre est $\mathbb{T}$, on a l'alternative suivante ([4], [1]):

(i) Soit T appartient à classe $\mathbf{A}$;

(ii) soit il existe $a > 0$ tel que l'ensemble $\{z \in \mathbb{D}, \|R(T,z)\| > \frac{1}{a}(1-|z|)^{-1}\}$ n'est pas dominant sur $\mathbb{T}$.

Dans le premier cas, les formes linéaires faibles $*$-continues (i.e. continues pour la topologie faible de dual) sur A_T sont exactement les applications de la forme $S \to (Sx, y)$ $\forall S \in A_T$, où x, y sont deux éléments de H.

Cette propriété traduit l'égalité $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1$, démontrée indépendamment dans [3] et [1], et donne l'existence de $x, y \in H$ tels que $p(0) = (p(T)x, y)$ pour tout polynôme p.

L'espace fermé engendré par les $T^n x$, $n \geqslant 1$, est alors un sous-espace non trivial de H invariant pour T.

Plaçons nous dans le deuxième cas: s'il existe a tel que l'ensemble indiqué n'est pas dominant dans $\mathbf{T}$, alors il existe un ensemble de mesure strictement positive de points $z \in \mathbf{T}$ tels que T ait la propriété $C(z)$. Le calcul fonctionnel introduit en parties 1 et 2 montre qu'il existe, alors, une chaîne trés riche de SHNT, puisque chaque couple de tels points fournit deux SHNT en somme directe algébrique. Plus précisément:

PROPOSITION 4.1. *Etant donnée T, contraction* cnu *de spectre $\mathbf{T}$, on a l'alternative suivante: soit T est dans la classe $\mathbb{A}$, soit il existe deux familles de* SHNT *$(H_i^+)_{i\in I}$ et $(H_i^-)_{i\in I}$, l'ensemble d'indices I étant non dénombrable, tels que $H_i^+ \cap H_i^- = \{0\}$ et $H_i^+ + H_i^-$ est dense dans H.*

On peut extraire des suites $(H_n^+)_{n\geqslant 0}$ et $(H_n^-)_{n\geqslant 0}$ de tels espaces dont l'une est croissante et l'autre décroissante.

Remarquons que si T est une contraction cnu, alors ni T ni T^* n'ont de valeurs propres sur $\mathbf{T}$, donc on peut appliquer le théorème 2.7.

5. EXTENSIONS DU CALCUL FONCTIONNEL

5.1. CONDITIONS SUR LE SPECTRE. On s'est précédemment placé sous l'hypothèse $\sigma(T) = \mathbf{T}$, cette hypothèse permettant de présenter de façon simple le calcul fonctionnel. De plus l'idée de base était de considérer certaines contractions. En fait les choses fonctionnent de la même façon si le spectre est un lacet fermé quelconque et nous allons voir qu'on peut même modifier cette hypothèse tout en conservant de bonnes propriétes.

Notons d'abord qu'il n'est pas restrictif, lorsqu'on cherche des SHNT, de supposer $\sigma(T)$ connexe (sinon le calcul fonctionnel de Riesz résoud le problème).

Soit donc $T \in L(H)$. Par analogie avec les parties précédentes, on dit que T *a la propriété $C'(z)$*, où z est un point de $\sigma(T)$, s'il existe un segment ouvert S et un réel $a \in]0,1[$ tel que: $\sigma(T) \cap S = \{z\}$ et $\|R(u,T)\| \leqslant \frac{1}{a}|u-z|^{-1}\, \forall\, u \in S \setminus \{z\}$.

Nous donnons le théorème sans détailler complètement sa démonstration.

THÉORÈME 5.1.1. *Soit T un opérateur borné sur H. Notons* (i) *et* (ii) *les hypothèses suivantes:*

(i) *$\mathbb{C}\backslash\sigma(T)$ a deux composantes connexes; T a les propriétés $C'(z_1)$ et $C'(z_2)$, où z_1 et z_2 sont deux points distincts de $\sigma(T)$ qui ne sont pas valeurs propres de T (cf. Diagramme 6).*

(ii) *$\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ est connexe; il existe $z \in \sigma(T)$ tel que $\sigma(T) \setminus \{z\}$ soit non connexe et que T ait la propriété $C'(z)$, où z est un point de $\sigma(T)$ qui n'est pas valeur propre de T (cf. Diagramme 7).*

Si (i) *est réalisée, alors il existe deux sous-espaces fermés non triviaux de H hyperinvariants pour T, notés H_1, H_2, disjoints, tels que* $\operatorname{Im}(T - z_1)(T - z_2)$ *soit inclus dans $H_1 \oplus H_2$.*

Si de plus les $\bar{z}_i$ ne sont pas valeurs propres de T^*, alors la somme $H_1 \oplus H_2$ est dense dans H.

Si (ii) *est réalisée, alors il existe deux sous-espaces fermés non triviaux de H hyperinvariants pour T, notés H_1, H_2, disjoints, tels que* $\operatorname{Im}(T - z)$ *soit inclus dans $H_1 \oplus H_2$. Si de plus le conjugué $\bar{z}$ n'est pas valeur propre de T^*, alors $H_1 \oplus H_2$ est dense dans H.*

Démonstration. Dans le cas (i), on généralise juste la construction de la partie 1 à des spectres dont la forme est indiquée ci-dessous. Remarquons que si $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ a une seule composante connexe, la situation est celle de (ii).

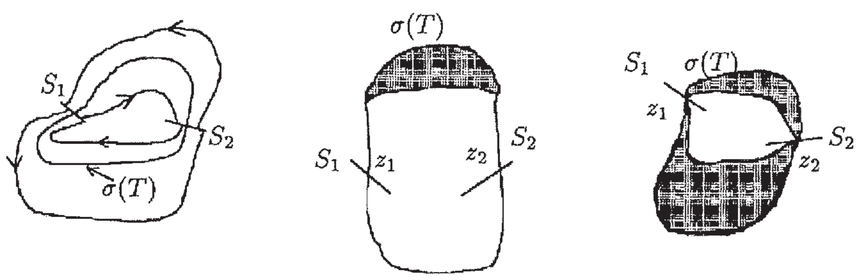

Diagramme 6.

Dans le cas (ii), pour une fonction f analytique au voisinage de $\sigma(T)$, nulle en z, on définit des opérateurs $\Psi^+(f)$ et $\Psi^-(f)$ par les intégrales

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma^+} f(u)R(u,T)\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma^-} f(u)R(u,T)\,\mathrm{d}u$$

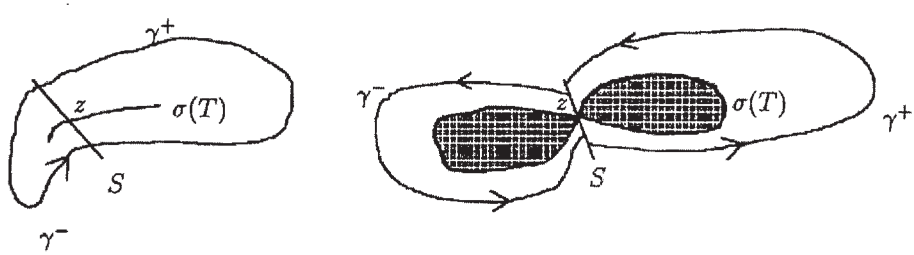

Diagramme 7.

Les applications Ψ^+ et Ψ^- possèdent des propriétés analogues à celles de Ψ^+ et Ψ^- énoncées dans les parties 1 et 2; l'existence de H_1, H_2 résulte de la décomposition $(T-z) = \Psi^+(p) + \Psi^-(p)$ où p est le polynôme $p(X) = (X-z)$, et de l'égalité

$$\Psi^+(p)\Psi^-(p) = \Psi^-(p)\Psi^+(p) = 0. \quad \blacksquare$$

5.2. CONDITIONS DE CROISSANCE. Nous reprenons l'hypothèse initiale $\sigma(T) = \mathbf{T}$. Soit $z \in \mathbf{T}$. On dira, par définition, que T a la propriété $C_n(z)$ s'il existe un segment radial S ouvert de centre z et une constante a tels que:

$$\forall u \in S \setminus \{z\}, \quad \|R(u,T)\| \geqslant \frac{1}{a}|1-|u||^{-n}.$$

Si T a les propriétés $C_n(z_1)$ et $C_p(z_2)$, nous construisons, cette fois, un calcul fonctionnel sur l'algèbre des fonctions analytiques au voisinage de $\mathbf{T}$, ayant un zéro d'ordre n en z_1 et p en z_2. L'analogue du théorème 2.7. s'énonce de la façon suivante:

THÉORÈME 5.2.1. *Soit T un opérateur de spectre $\mathbf{T}$, ayant les propriétés $C_n(z_1)$ et $C_p(z_2)$ (z_i points distincts sur $\mathbf{T}$). Si les z_i ne sont pas valeurs propres de T, il existe deux* SHNT *disjoints.*

Si de plus les $\bar{z}_i$ ne sont pas valeurs propres de T^*, la somme de ces espaces est dense dans H.

Démonstration. Nous ne détaillons pas, la démarche est calquée sur celle de partie 2. On décompose $(T-z_1)^n(T-z_2)^p$ en somme de S^+ et S^-, où $S^+S^- = 0$.

Les sous-espaces en question sont $H^+ = \operatorname{Ker} S^-$ et $H^- = \operatorname{Ker} S^+$. $\blacksquare$

REFERENCES

1. C. APOSTOL, Ultraweakly closed operator algebras, *J. Operator Theory* **2**(1979), 269–293.
2. H. BERCOVICI, Factorization theorems and the structure of operators on Hilbert spaces, *Ann. of Math. (2)* **128**(1988), 399–413.
3. B. CHEVREAU, Sur les contractions à calcul fonctionnel isométrique. II, *J. Operator Theory* **20**(1988), 269–293.
4. B. CHEVREAU, C. PEARCY, Growth condition on the resolvent and membership in the classes $\mathbb{A}$ and $\mathbb{A}_{N_0}$, *J. Operator Theory* **16**(1986), 375–386.
5. C. FOIAŞ, B.SZ.-NAGY, *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Spaces*, Akademiai Kiado, Budapest 1952.
6. H. RADJAVI, P. ROSENTHAL, *Invariant Subspaces*, Springer-Verlag, New York – Heidelberg – Berlin, 1973.
7. F. RIESZ, B.SZ.-NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Akademiai Kiado, Budapest 1952.
8. J. STAMPFLI, Local spectral theory. IV: hyponormal operators, *Indiana Univ. Math. J.* **22**(1972), 159–167.
9. A. SHIELDS, Weighted shift operators and analytic functions theory, in *Topics in Operator Theory*, Amer. Math. Soc., Providence, 1974, pp. 49–128.

VALÉRIE MARTEL-GOLSE
École Normale Supérieure - DMI
45, rue d'Ulm
F-75230 Paris Cedex 05
FRANCE

Reçu le 26 juin 1991; révision le 7 mars 1995.