J. OPERATOR THEORY
54:1(2005), 27–68

© Copyright by THETA, 2005

C^*-GROUPOÏDES QUANTIQUES ET INCLUSIONS DE FACTEURS: STRUCTURE SYMÉTRIQUE ET AUTODUALITÉ, ACTION SUR LE FACTEUR HYPERFINI DE TYPE II_1

MARIE-CLAUDE DAVID

Communicated by Şerban Strătilă

ABSTRACT. Let $N_0 \subset N_1$ a depth 2, finite index inclusion of type II_1 factors and $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \cdots$ the corresponding Jones tower. D. Nikshych and L. Vainerman built dual structures of quantum C^*-groupoid on the relative commutants $N_0' \cap N_2$ et $N_1' \cap N_3$.

Here I define a new duality which allows a symmetric construction without changing the involution. So the Temperley-Lieb algebras are selfdual quantum C^*-groupoids and the quantum C^*-groupoids associated to a finite depth finite index inclusion can be chosen selfdual.

I show that every finite-dimensional connected quantum C^*-groupoid acts outerly on the type II_1 hyperfinite factor. In light of this particular case, I propose a deformation of any finite quantum C^*-groupoid to a regular finite quantum C^*-groupoid.

KEYWORDS: *Subfactors, quantum groupoids, Temperley-Lieb algebras, crossed product, action.*

MSC (2000): 46L37, 16W30, 57T05, 22D35.

1. INTRODUCTION

Soient une inclusion de facteurs de type II_1, $N_0 \subset N_1$, de profondeur 2 d'indice fini et

$$N_0 \subset N_1 \overset{f_1}{\subset} N_2 \overset{f_2}{\subset} N_3 \subset \cdots$$

la tour obtenue par construction de base. Si l'inclusion est irréductible, les commutants relatifs $A = N_0' \cap N_2$ et $B = N_1' \cap N_3$ peuvent être munis de structures duales d'algèbres de Kac de dimension finie (voir [5], [10], [18]). Généralisant les méthodes de W. Szymanski aux inclusions réductibles, D. Nikshych et L. Vainerman définissent dans [13] une dualité entre les commutants relatifs A et B à l'aide

de la trace tr de N_1:

$$\langle a, b\rangle = [N_1 : N_0]^2 \mathrm{tr}(a f_2 f_1 H b) \quad a \in A, b \in B.$$

(L'élément qui rend compte du fait que l'inclusion n'est pas irréductible est l'indice H de la restriction à $N_1' \cap N_2$ de la trace tr.) A l'aide de cette dualité, ils définissent des structures duales de C^*-groupoïde quantique sur A et B. Les coproduits sont définis par dualité, aussi pour qu'ils soient compatibles avec l'involution, ils ont dû définir de nouvelles involutions sur A et B différentes de celles héritées du facteur N_4. L'étude de ces structures à l'aide de formules généralisant celles obtenues dans [5] pour une inclusion irréductible fait apparaître un autre inconvénient: si on note $B(N_1 \subset N_2)$ la structure définie sur B, la structure duale sur A n'est pas isomorphe, mais anti-isomorphe à $B(N_0 \subset N_1)$.

Je propose ici une autre dualité qui permet une construction symétrique conservant l'involution:

$$\langle a, b\rangle = [N_1 : N_0]^2 \mathrm{tr}(a H^{1/2} f_2 f_1 H^{1/2} b) \quad a \in A, b \in B.$$

Avec cette nouvelle définition, si on note $B(N_1 \subset N_2)$ la structure définie sur B, la structure duale sur A est $B(N_0 \subset N_1)$. Les propriétés des structures de C^*-groupoïde quantique construites à partir de cette dualité pourraient s'obtenir à partir des résultats de D. Nikshych et L. Vainerman. Certaines démonstrations sont d'ailleurs fortement inspirées des leurs. Pourtant, comme je dispose maintenant de formules pour les co-produits et les antipodes, je donne souvent des démonstrations directes.

L'intérêt de cette construction symétrique apparaît dans la partie 4. Dans le cas d'une inclusion de profondeur finie, on peut alors obtenir des C^*-groupoïdes quantiques autoduaux.

Dans la partie 5, je précise la structure de C^*-groupoïde quantique des algèbres de Temperley-Lieb. Grâce à la symétrie de la construction, ces C^*-groupoïdes quantiques sont autoduaux. J'étudie en particulier le C^*-groupoïde quantique de dimension 13 associé au graphe linéaire A_4 et montre qu' il est isomorphe à celui décrit par G. Böhm et K. Szlachanyi dans 5 de [3].

Dans la partie 6, j'étends aux C^*-groupoïdes quantiques connexes de dimension finie un résultat de D. Nikshych [11] sur les algèbres de Kac faibles en les faisant agir extérieurement sur le facteur hyperfini de type II_1.

Dans la partie 7, je montre qu'on peut déformer toute paire de C^*-groupoïdes quantiques finis duaux en une paire de C^*-groupoïdes quantiques finis réguliers sans modifier la structure de C^*-algèbre.

L'essentiel de ce texte a été écrit au printemps 2001, la partie 6 l'a complété au printemps 2003 et la 7 à l'automne de la même année. Léonid Vainerman et Jean-Michel Vallin ont été à l'origine de ce travail, je les en remercie vivement et plus particulièrement Léonid pour de nombreux échanges par courrier électronique à propos de la construction originale du C^*-groupoide quantique. Mes remerciements vont aussi à Kornel Szlachányi pour ses réponses précises. Les

calculs concernant le groupoïde quantique de dimension 13 ont été grandement facilités par les conseils Maple de Jacques Peyrière, je lui en suis reconnaissante.

2. C^*-GROUPOÏDES QUANTIQUES FINIS

On rappelle ici les définitions de C^*-groupoïde quantique fini et de C^*-groupoïde quantique fini dual (voir [2], [11], [14], [15]) ainsi que celles d'une action et du produit croisé.

2.1. C^*-GROUPOÏDE QUANTIQUE FINI.

DÉFINITION. Un *C^*-groupoïde quantique fini* est une C^*-algèbre G de dimension finie (on note m la multiplication, 1 l'unité , $*$ l'involution) munie d'une structure de co-algèbre associative avec un coproduit Δ, une co-unité ε et un antipode S tels que:

(i) Δ soit un $*$-homomorphisme d'algèbres de G dans $G \otimes G$ vérifiant:

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}\,)\Delta(1) = (1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1).$$

(ii) La co-unité soit une application linéaire de G dans G vérifiant:

$$\varepsilon(fgh) = \varepsilon(fg_{(1)})\varepsilon(g_{(2)}h) \quad (f,g,h) \in G^3$$

(propriété équivalente à

$$\varepsilon(fgh) = \varepsilon(fg_{(2)})\varepsilon(g_{(1)}h) \quad (f,g,h) \in G^3).$$

(iii) L'antipode S soit un anti-homomorphisme d'algèbre et de co-algèbre de G dans G vérifiant pour tout g de G:

$$m(\mathrm{id} \otimes S)\Delta(g) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id}\,)(\Delta(1)(g \otimes 1))$$

(propriété équivalente à

$$m(S \otimes \mathrm{id}\,)\Delta(g) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)((1 \otimes g)\Delta(1)).$$

On appelle *co-unité but* et *co-unité source* les applications ε_t et ε_s définies pour tout g de G par:

$$\varepsilon_t(g) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id}\,)(\Delta(1)(g \otimes 1)), \quad \varepsilon_s(g) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)((1 \otimes g)\Delta(1)).$$

2.2. C^*-GROUPOÏDE QUANTIQUE DUAL.

DÉFINITION. On définit sur $\widehat{G} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(G, \mathbb{C})$ une structure de C^*-groupoïde quantique dual de celle de G grâce aux formules suivantes:

$$\begin{aligned}
\langle h, \phi\psi \rangle &= \langle \Delta(h), \phi \otimes \psi \rangle, \\
\langle h \otimes g, \widehat{\Delta}(\phi) \rangle &= \langle hg, \phi \rangle, \\
\langle h, \widehat{S}(\phi) \rangle &= \langle S(h), \phi \rangle, \\
\langle h, \phi^* \rangle &= \overline{\langle S(h)^*, \phi \rangle},
\end{aligned}$$

pour tous ϕ et ψ de $\widehat{G}$ et tous h et g de G.

L'unité de $\widehat{G}$ est ε et la co-unité $\widehat{\varepsilon}$ est $\phi \mapsto \langle 1, \phi \rangle$.

2.3. PROJECTION DE HAAR, MESURE DE HAAR. D'après 4.5 de [2] et 7.3.1 de [13], il existe une unique projection p de G invariante par l'antipode, appelée *projection de Haar normalisée* telle que pour tout g de G, on ait les propriétés équivalentes suivantes:

(i) $\varepsilon_t(g)p = gp$, et $\varepsilon_t(p) = 1$;

(ii) $p\varepsilon_s(g) = pg$, et $\varepsilon_s(p) = 1$.

La forme linéaire duale $\widehat{\phi}$ de la projection de Haar normalisée est appelée *mesure de Haar normalisée de* $\widehat{G}$. Elle est fidèle, invariante par l'antipode et vérifie les propriétés équivalentes suivantes:

(i) $(\mathrm{id} \otimes \widehat{\phi})\widehat{\Delta} = (\widehat{\varepsilon}_t \otimes \widehat{\phi})\widehat{\Delta}$, et $\widehat{\phi} \circ \widehat{\varepsilon}_t = \widehat{\varepsilon}$;

(ii) $(\widehat{\phi} \otimes \mathrm{id}\,)\widehat{\Delta} = (\widehat{\phi} \otimes \widehat{\varepsilon}_s)\widehat{\Delta}$, et $\widehat{\phi} \circ \widehat{\varepsilon}_s = \widehat{\varepsilon}$.

2.4. LES SOUS-ALGÈBRES CO-UNITALES. ([15], 2.2, [2], 2.5 et 2.9) L'algèbre $G_s = \varepsilon_s(G)$ (respectivement $G_t = \varepsilon_t(G)$) est appelée *sous-algèbre co-unitale source* (respectivement *sous-algèbre co-unitale but*).

Les co-unités but et source sont des homomorphismes idempotents de G_t (respectivement G_s) et vérifient pour tout g de G:

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon_t)\Delta(g) = 1_{(1)}g \otimes 1_{(2)} \quad \text{et} \quad (\varepsilon_s \otimes \mathrm{id}\,)\Delta(g) = 1_{(1)} \otimes g1_{(2)}.$$

On a aussi les formules suivantes:

$$\varepsilon_t \circ S = \varepsilon_t \circ \varepsilon_s = S \circ \varepsilon_s \quad \text{et} \quad \varepsilon_s \circ S = \varepsilon_s \circ \varepsilon_t = S \circ \varepsilon_t.$$

Les sous-algèbres co-unitales commutent entre elles et vérifient:

$$G_t = \{g \in G : \Delta(g) = 1_{(1)}g \otimes 1_{(2)} = g1_{(1)} \otimes 1_{(2)}\} = \{(\omega \otimes \mathrm{id}\,)\Delta(1) : \omega \in \widehat{G}\},$$

$$G_s = \{g \in G : \Delta(g) = 1_{(1)} \otimes g1_{(2)} = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}g\} = \{(\mathrm{id} \otimes \omega)\Delta(1) : \omega \in \widehat{G}\}.$$

2.5. C^*-GROUPOÏDE QUANTIQUE FINI RÉGULIER. On dit que le C^*-groupoïde quantique fini G est *régulier* si son antipode est involutif sur les algèbres co-unitales.

2.6. ACTION D'UN GROUPOÏDE QUANTIQUE. ([12], definiton 1.2.2, [11], 2.2)

2.6.1. Soit M une algèbre involutive unitaire. On dit qu'un groupoïde quantique G fini agit à gauche (respectivement à droite) sur M s'il existe une application linéaire $g \otimes m \mapsto g \triangleright m$ de $G \otimes M$ dans M (respectivement $m \otimes g \mapsto m \triangleleft g$ de $M \otimes G$ dans M) définissant une structure de G-module à gauche (respectivement à droite) sur M et vérifiant pour g dans G et x et y dans M:

(1) $g \triangleright (xy) = (g_{(1)} \triangleright x)(g_{(2)} \triangleright y)$ (respectivement $(xy) \triangleleft g = (x \triangleleft g_{(1)})(y \triangleleft g_{(2)})$);

(2) $(g \triangleright x)^* = S(g)^* \triangleright x^*$ (respectivement $(g \triangleleft x)^* = x^* \triangleleft S(g)^*$);

(3) $g \triangleright 1 = \varepsilon_t(g) \triangleright 1$ (respectivement $1 \triangleleft g = 1 \triangleleft \varepsilon_s(g)$).

Si M est une C^*-algèbre ou une algèbre de von Neumann, l'application $g \otimes m \mapsto g \triangleright m$ (respectivement $m \otimes g \mapsto m \triangleleft g$) doit être continue en norme ou faiblement pour tout g de G.

D'après definition 1.2.4 de [12], une action à gauche est dite *standard* si l'application $x \otimes 1_M \mapsto x \triangleright 1_M$ est un isomorphisme de A_t sur une sous-algèbre de M.

Une action à gauche est standard si et seulement si elle vérifie:

$$g \triangleright 1 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_t(g) = 0.$$

2.6.2. Rappelons les définitions des actions duales des groupoïdes l'un sur l'autre (voir [12] ou [11]). Posons $A = G$ et $B = \widehat{G}$. Le groupoïde A agit à droite sur B:

$$b \triangleleft a = \langle a, b_{(1)} \rangle b_{(2)} \quad a \in A, b \in B.$$

Le groupoïde B agit à gauche sur A:

$$b \triangleright a = \langle a_{(2)}, b \rangle a_{(1)} \quad a \in A, b \in B.$$

De façon équivalente, pour tous x et a de A et y et b de B, on a

$$\langle x, b \triangleleft a \rangle = \langle ax, b \rangle \quad \text{et} \quad \langle b \triangleright a, y \rangle = \langle a, yb \rangle.$$

2.6.3. Les actions que nous venons de définir sont standard.

PROPOSITION. ([2], lemme 2.6) *L'application $x \mapsto 1_b \triangleleft x$ est un isomorphisme de l'algèbre A_s sur l'algèbre B_t. Sa réciproque est donnée par $y \mapsto y \triangleright 1_a$, $y \in B_t$.*

2.6.4. ([2], 2.7) Des propriétés des sous-algèbres co-unitales, on déduit les formules suivantes pour b dans B, x dans A_t et y dans A_s:

$$x \triangleright b = (x \triangleright 1_b)\, b \quad \text{et} \quad y \triangleright b = b\, (y \triangleright 1_b),$$
$$b \triangleleft x = (1_b \triangleleft x)\, b \quad \text{et} \quad b \triangleleft y = b\, (1_b \triangleleft y).$$

2.7. PRODUIT CROISÉ D'UNE ALGÈBRE PAR UN GROUPOÏDE QUANTIQUE.

2.7.1. DÉFINITION. ([11], 2.2) Le produit croisé à gauche (respectivement à droite) $M \rtimes G$ (respectivement $G \ltimes M$) est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M \otimes_{G_t} G$ (respectivement $G \otimes_{G_s} M$) oú on identifie $m(z \triangleright 1) \otimes g$ et $m \otimes zg$ (respectivement $gz \otimes m$ et $g \otimes (1 \triangleleft z)m$) pour m dans M, g dans G et z dans G_t (respectivement G_s). Soit $[m \otimes g]$ (respectivement $[g \otimes m]$) la classe de $m \otimes g$ (respectivement $g \otimes m$).

On munit le produit croisé d'une structure d'une algèbre involutive en posant pourtous g et h dans G et x et y dans M:

$$[x \otimes g][y \otimes h] = [x(g_{(1)} \triangleright y) \otimes g_{(2)}h] \quad \text{et} \quad [x \otimes g]^* = [(g^*_{(1)} \triangleright x^*) \otimes g^*_{(2)}],$$

respectivement,

$$[g \otimes x][h \otimes y] = [gh_{(1)} \otimes (x \triangleleft h_{(2)})y] \quad \text{et} \quad [g \otimes x]^* = [g^*_{(1)} \otimes (x^* \triangleleft g^*_{(2)})]).$$

De plus si M est une C^*-algèbre ou une algèbre de von Neumann, le produit croisé devient une C^*-algèbre ou une algèbre de von Neumann.

Les applications $i_G : g \mapsto [1 \otimes g]$ (respectivement $g \mapsto [g \otimes 1]$) et $i_M : m \mapsto [m \otimes 1]$ (respectivement $m \mapsto [1 \otimes m]$) sont des homomorphismes injectifs d'algèbres involutives de G et M dans le produit croisé telles que:

$$M \rtimes G = i_M(M) i_G(G) \quad \text{(respectivement } G \ltimes M = i_G(G) i_M(M)\text{)}.$$

2.7.2. ACTION DUALE SUR LE PRODUIT CROISÉ. ([11], 2.2). On définit l'action duale à gauche (respectivement à droite) de $\widehat{G}$ sur $M \rtimes G$ (respectivement $G \ltimes M$) par:

$$h \triangleright [m \otimes g] = [m \otimes h \triangleright g] \quad g \in G, h \in \widehat{G}, m \in M$$
$$\text{(respectivement } [g \otimes m] \triangleleft h = [g \triangleleft h \otimes m] \quad g \in G, h \in \widehat{G}, m \in M\text{)}.$$

2.8. INCLUSIONS DE PROFONDEUR 2. Nous rappelons ici quelques résultats de [12] qui motivent cet article. Nous considèrons un C^*-groupoïde quantique A de dimension finie agissant sur une algèbre de von Neumann M.

2.8.1. PRODUIT CROISÉ ET TOUR DE JONES.

COROLLAIRE. ([12], 4.1.5) *Soient N et M des algèbres de von Neumann et A un C^*-groupoïde quantique de dimension finie tel que M soit $N \rtimes \widehat{A}$. La tour*

$$N \subset M \subset M \rtimes A \subset M \rtimes A \rtimes \widehat{A} \rtimes \cdots$$

est une tour de Jones de profondeur 2.

En particulier, si on prend $N = A_t$ et $M = A_t \rtimes A = A$, alors

$$A_t \subset A \subset A \rtimes \widehat{A} \subset A \rtimes \widehat{A} \rtimes A \rtimes \cdots$$

est une tour de Jones.

2.8.2. ACTION EXTÉRIEURE. Nous prendrons le résultat du théorème suivant comme définition pour une action extérieure.

THÉORÈME. ([12], 4.2.3) *L'action de A sur M est extérieure si et seulement si on a l'égalité:*

$$M' \cap (M \rtimes A) = Z(M) \rtimes A_s.$$

2.8.3. C^*-GROUPOÏDE QUANTIQUE CONNEXE.

DÉFINITION. Un C^*-groupoïde quantique A est dit *connexe* (terminologie de [11] que nous gardons car elle fait référence à l'inclusion $A_s \subset A$) ou *pur* (terminologie de [12]) si $A_s \cap Z(A)$ est réduit à $\mathbb{C}$.

PROPOSITION. ([12], 2.4.6) *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *A est connexe;*
(ii) $\widehat{A}_s \cap \widehat{A}_t = \mathbb{C}$*;*
(iii) $A_t \cap Z(A) = \mathbb{C}$.

REMARQUES. (i) Si A est connexe, toute action est standard ([12], 2.2.1).

(ii) D'après le théorème 3.1.1 de [12], le centre de $M \rtimes A$ contient nécessairement $1_M \rtimes (A_t \cap Z(A))$. Donc la connexité de A est nécessaire pour obtenir un facteur comme produit croisé.

(iii) D'après le corollaire 2.4.4 de [12], si l'action de A sur M est standard, le centre de M contient nécessairement une sous-algèbre isomorphe à $A_t \cap A_s$ donc la connexité de $\widehat{A}$ est nécessaire à l'action de A sur un facteur.

2.8.4. ACTION EXTÉRIEURE ET FACTEUR.

THÉORÈME. ([12], 4.2.4) *Si A agit extérieurement et de façon standard sur un facteur M, $M \rtimes A$ est un facteur si et seulement si A est connexe.*

THÉORÈME. ([12], 4.2.5) *Si A est connexe et agit extérieurement sur un facteur M alors la tour*

$$M^A \subset M \subset M \rtimes A \subset M \rtimes A \rtimes \widehat{A} \rtimes \cdots$$

est une tour de Jones de facteurs. De plus le groupoïde dual $\widehat{A}$ est aussi connexe et son action canonique sur $M \rtimes A$ est extérieure.

2.8.5. TOUR DÉRIVÉE. Le résultat suivant précise la tour dérivée de l'inclusion obtenue par l'action de A.

COROLLAIRE. ([12], 4.3.5) *Soient A un C*-groupoïde quantique fini agissant extérieurement sur un facteur M et N la sous-algèbre des points fixes de M sous A. On a les égalités suivantes:*

$$N' \cap M = 1_M \rtimes A_t,$$
$$M' \cap M \rtimes A = 1_M \rtimes A_s,$$
$$N' \cap M \rtimes A = 1_M \rtimes A.$$

3. C*-GROUPOÏDES QUANTIQUES ASSOCIÉS À UNE INCLUSION D'INDICE FINI DE PROFONDEUR 2 DE FACTEURS DE TYPE II_1

Soit $N_0 \subset N_1$ une inclusion d'indice fini τ^{-1} de facteurs de type II_1. On note

$$N_0 \subset N_1 \overset{f_1}{\subset} N_2 \overset{f_2}{\subset} N_3 \overset{f_3}{\subset} N_4 \subset \cdots \subset N_n \overset{f_n}{\subset} N_{n+1} \subset \cdots$$

la tour de Jones obtenue par construction de base ([7], 3) et tr la trace normale finie normalisée sur les facteurs considérés.

On suppose que l'inclusion $N_0 \subset N_1$ est de profondeur 2 c'est-à-dire qu'elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes:

(1) le commutant relatif $N_0' \cap N_3$ est obtenu par construction de base à partir de $N_0' \cap N_1 \subset N_0' \cap N_2$;

(2) l'algèbre $N_0' \cap N_3$ est linéairement engendrée par $(N_0' \cap N_2) f_2 (N_0' \cap N_2)$;

(3) $\dim Z(N_0' \cap N_1) = \dim Z(N_0' \cap N_3)$.

On remarque que $N_0 \subset N_1$ est de profondeur 2 si et seulement si $N_1 \subset N_2$ est de profondeur 2.

3.1. ANTI-AUTOMORPHISMES ASSOCIÉS À LA TOUR DÉRIVÉE. Soit J_n l'isométrie bijective anti-linéaire canonique de l'espace standard $L^2(N_n, \mathrm{tr})$ de N_n, $n \in \mathbb{N}$. A partir de cette isométrie, A. Ocneanu définit un anti-automorphisme j_n de $N_0' \cap N_{2n}$ en posant:

$$j_n(x) = J_n x^* J_n, \quad x \in N_0' \cap N_{2n}.$$

L'anti-automorphisme j_n envoie $N_0' \cap N_n$ sur $N_n' \cap N_{2n}$.

3.1.1. On rappelle ici les principales propriétés de ces anti-automorphismes.

THÉORÈME. ([5], 1- 2.2.1, 2.2.2) *Pour tout entier naturel n, les anti-automorphismes j_n sont involutifs et satisfont les relations suivantes:*

(i) *La restriction de $j_{n+2}j_{n+1}$ à $N_0' \cap N_{2n}$ coïncide avec $j_{n+1}j_n$.*

(ii) *Si on note F_n le projecteur de Jones de l'inclusion $N_0 \subset N_n$, pour tout x de $N_0' \cap N_n$, on a l'égalité $F_n x = F_n j_n(x)$.*

(iii) *$j_n(f_p) = f_{2n-p}, 1 \leqslant p \leqslant n$.*

(iv) *Si l'inclusion $N_0 \subset N_1$ est de profondeur finie, l'anti-automorphisme j_n conserve la trace de $N_0' \cap N_{2n}$ pour tout entier n.*

3.1.2. Comme les isomorphismes $j_{n+1}j_n$ se prolongent les uns les autres, on peut définir un isomorphisme γ de la tour dérivée par $\gamma_{/N_0' \cap N_{2n}} = j_{n+1}j_n$. Cet isomorphisme γ ajoute 2 aux indices, par exemple:

$$\gamma(f_n) = f_{n+2}, \quad \gamma(N_0' \cap N_{2n}) = N_2' \cap N_{2n+2}.$$

3.1.3. REMARQUE. D'après 2.2.3.v et 2.3 de [6], on peut affirmer que les applications S_A et S_B utilisées par D. Nikshych et L. Vainerman dans 8.2 (68) de [15] sont respectivement j_1 et j_2, nous les noterons ainsi, gardant les notations S_A et S_B pour les antipodes. On a donc pour tous a de $N_0' \cap N_2$ et b de $N_1' \cap N_3$:

$$E_{N_1'}(j_1(a)f_2f_1) = E_{N_1'}(f_1f_2a) \quad \text{et} \quad E_{N_2}(bf_1f_2) = E_{N_2}(f_2f_1j_2(b)).$$

Nous utiliserons sans cesse et pour différentes constructions de base le résultat suivant de [16]:

$$\forall x \in N_2 \quad xf_1 = \tau^{-1}E_{N_1}(xf_1)f_1.$$

3.2. L'OPÉRATEUR h. L'élément qui va rendre compte du fait que l'inclusion n'est pas irréductible est l'indice de la restriction à $N_1' \cap N_2$ de la trace tr défini par Watatani [21]. Cet opérateur noté H est un élément inversible et autoadjoint du centre de $N_1' \cap N_2$. Si l'algèbre $N_1' \cap N_2$ se décompose sur son centre comme $\bigoplus_{j \in J} M_{\nu_j}(\mathbb{C})q_j$ et que, pour tout j de J, t_j soit la valeur de la restriction à $N_1' \cap N_2$

de la trace tr sur les projecteurs minimaux de $M_{\nu_j}(\mathbb{C})q_j$, alors H est donné par la formule:

$$H = \sum_{j\in J} t_j^{-1}\nu_j q_j.$$

On vérifie facilement que la trace de H est égale à la dimension de $N_1' \cap N_2$. On notera h l'opérateur $H^{1/2}$.

LEMME. *Pour tout élément x de $N_1' \cap N_2$, en particulier pour $x = h$, on a:*
(i) $f_2 j_2(x) = f_2 x$ *et* $f_1 x = f_1 j_1(x)$;
(ii) $j_2(x) f_1 f_2 = f_1 f_2 j_1(x)$.

Démonstration. (i) D'après 3.1.1 (iii).
(ii) On utilise (i) et les propriétés de commutation des projecteurs f_1 et f_2. ∎

3.3. UNITÉS MATRICIELLES ET QUASI-BASES.

3.3.1. NOTATIONS. Les notations et les résultats utilisés ici se trouvent dans [7] aux paragraphes 2.3.11, 2.4.6 et 2.6.5. On peut voir en 5.3 un exemple. Soit une inclusion $K \subset L$ de C^*-algèbres unitaires de dimension finie:

$$K = \bigoplus_{j\in J} M_{\nu_j}(\mathbb{C})q_j \subset L = \bigoplus_{i\in I} M_{\mu_i}(\mathbb{C})p_i.$$

On suppose qu'il existe sur L une trace fidèle tr et on note $\vec{t}$ et $\vec{s}$ les vecteurs définis par:

$$t_j = \nu_j^{-1}\mathrm{tr}(q_j) \quad j \in J, \quad \text{et} \quad s_i = \mu_i^{-1}\mathrm{tr}(p_i) \quad i \in I.$$

et h l'élément $\sum_{j\in J} \sqrt{\nu_j t_j^{-1}} q_j$ de K.

On considère le diagramme de Bratelli (augmenté d'un sommet $*$ de $K \subset L$). On appelle étage 1 du diagramme celui des sommets représentant les facteurs de K, étage 2 l'étage de ceux de L. Soit P l'ensemble des couples de chemins $p = (\xi, \eta)$ joignant le sommet $*$ à un même sommet du deuxième étage noté end (p) et on note s_p la valeur $s_{\mathrm{end}\,(p)}$. L'ensemble des opérateurs $\{T_p : p \in P\}$ est une famille d'unités matricielles de L.

3.3.2. QUASI-BASE D'UNE ESPÉRANCE CONDITIONNELLE.

DÉFINITION. ([21], 1.2.2) Soit E une espérance conditionnelle fidèle de L sur K. Une famille finie $\{(u_1, v_1) \cdots (u_n, v_n)\}$ de $L \times L$ est dite une *quasi-base* si pour tout x de L, on a:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i E(v_i x) = x = \sum_{i=1}^{n} E(x u_i) v_i.$$

PROPOSITION. ([21], 2.4.1) *Soit E l'espérance conditionnelle définie par la trace tr de L sur K. Posons, pour $p \in P$, $u_p = \frac{1}{\sqrt{s_p}} T_p h^{-1}$; alors $\{(u_p : u_p^*), p \in P\}$ est une quasi-base pour E.*

On dira dans ce cas que $\{u_p : p \in P\}$ est une quasi-base pour E.

3.3.3. CAS PARTICULIER DE LA TOUR DÉRIVÉE. On considère le diagramme de Bratelli de la tour dérivée de l'inclusion $N_1 \subset N_2$:

$$N_1' \cap N_1 = \mathbb{C} \subset N_1' \cap N_2 = \bigoplus_{j\in J} M_{\nu_j}(\mathbb{C})q_j \subset N_1' \cap N_3$$
$$= \bigoplus_{i\in I} M_{\mu_i}(\mathbb{C})p_i \subset N_1' \cap N_4 \cap \cdots .$$

La restriction de la trace tr aux algèbres de la tour dérivée est une trace de Markov caractérisée par les vecteurs $\vec{t}$ et $\vec{s}$ définis par:

$$t_j = \nu_j^{-1}\mathrm{tr}(q_j), \quad j \in J, \quad \text{et} \quad s_i = \mu_i^{-1}\mathrm{tr}(p_i), \quad i \in I.$$

Dans le cas d'une inclusion irréductible de profondeur 2, une famille d'unités matricielles normalisées (par $\mathrm{tr}(b_p^* b_p) = 1$) de B est une base orthonormale de B pour le produit scalaire issu de la trace tr mais aussi une base de Pimsner-Popa de N_3 sur N_2. Dans le cas d'une inclusion réductible de profondeur 2, ces deux propriétés ne coïncident plus. Si la normalisation est modifiée par h^{-1}, nous obtenons des quasi-bases.

PROPOSITION. (i) *L'ensemble* $\left\{b_p = \frac{1}{\sqrt{s_p}} T_p : p \in P\right\}$ *est une famille d'unités matricielles normalisées (ou une base orthonormale) de* B.

(ii) *L'ensemble* $\{b_p h^{-1} : p \in P\}$ *est une quasi-base de* $N_3 \cap N_1'$ *sur* $N_2 \cap N_1'$.

(iii) *Si l'inclusion* $N_1 \subset N_2$ *est de profondeur* 2, *l'ensemble* $\{b_p h^{-1} : p \in P\}$ *est une quasi-base de* N_3 *sur* N_2, *c'est-à-dire que pour tout* x *de* N_3, *on a:*

$$x = \sum_{p\in P} b_p h^{-1} E_{N_2}(h^{-1} b_p^* x) = \sum_{p\in P} E_{N_2}(x b_p h^{-1}) h^{-1} b_p^*.$$

Démonstration. La première affirmation est évidente puisque la trace de $T_{p'}^* T_p$ vaut $\delta(p, p')s_p$ pour (p, p') dans $P \times P$. La deuxième résulte du lemme 2.4.1 de [21] rappelé en 3.3.2.

Si l'inclusion $N_1 \subset N_2$ est de profondeur 2, le commutant relatif $N_1' \cap N_4$ est obtenu par construction de base à partir de l'inclusion $N_1' \cap N_2 \subset N_1' \cap N_3$ donc il existe une famille finie $\{(u_\mu, v_\mu) : \mu \in M\}$ de couples de $N_1' \cap N_3$ telle que $\sum_{\mu\in M} u_\mu f_3 v_\mu = 1$. Alors $\{(u_\mu, v_\mu) : \mu \in M\}$ est une quasi-base de N_3 sur N_2; en effet $\sum_{\mu\in M} u_\mu f_3 v_\mu = 1$ implique $\sum_{\mu\in M} u_\mu E_{N_2}(v_\mu x) f_3 = x f_3$ pour tout x de N_3 et donc grâce à 2.6.7 (iii) de [7], on peut écrire:

$$\sum_{\mu\in M} u_\mu E_{N_2}(v_\mu x) = x.$$

En utilisant (ii) pour chaque u_μ, on obtient:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{\mu\in M, p\in P} b_p h^{-1} E_{N_2}(h^{-1} b_p^* u_\mu) E_{N_2}(v_\mu x) \\ &= \sum_{\mu\in M, p\in P} b_p h^{-1} E_{N_2}(h^{-1} b_p^* u_\mu E_{N_2}(v_\mu x)) = \sum_{p\in P} b_p h^{-1} E_{N_2}(h^{-1} b_p^* x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.3.4. REMARQUE. Dans le cas d'une inclusion de profondeur 2, on a donc une quasi-base formée d'éléments du commutant relatif $N_1' \cap N_3$, de plus on peut la choisir très proche d'une base orthonormale de cette algèbre. Nous verrons dans les calculs que ces propriétés sont très précieuses.

3.4. DUALITÉ. Contrairement à D. Nikshych et L. Vainerman, nous définissons une dualité entre A et B en utilisant une formule symétrique:

$$\langle a, b\rangle = \tau^{-2}\mathrm{tr}(ahf_2f_1hb) \quad a \in A, b \in B.$$

On remarque que, grâce à 3.2, la dualité s'écrit aussi:

$$\langle a, b\rangle = \tau^{-2}\mathrm{tr}(aj_2(h)f_2f_1j_1(h)b), \quad a \in A, b \in B,$$

et on a pour tout a de A, tout b de B et tout x de $N_1' \cap N_2$:

$$\langle a, bx\rangle = \langle xa, b\rangle \quad \text{et} \quad \langle a, j_2(x)b\rangle = \langle aj_1(x), b\rangle.$$

Remarque: Ce crochet définit une dualité car l'inclusion est de profondeur 2 (voir [18] ou 3.2 de [13]).

3.5. LES CO-ALGÈBRES A ET B. Les algèbres A et B sont des C^*-algèbres. Grâce à la dualité entre A et B, nous définissons sur A et B des structures de co-algèbres co-associatives. Nous allons voir que les co-produits et les co-unités de ces co-algèbres sont définis par des formules analogues pour A et B et montrer qu'ils vérifient les propriétés (i) et (ii) des C^*-groupoïdes quantiques (2.1).

3.5.1. FORMULE POUR LES CO-PRODUITS. Le co-produit Δ_B de B est défini comme dual de la multiplication de l'algèbre A. De même pour le co-produit Δ_A de A.

PROPOSITION. *Soient $\{b_p : p \in P\}$ une famille d'unités matricielles normalisées de B et $\{a_s : s \in S\}$ une famille d'unités matricielles normalisées de A.*

Premières formules:

Le co-produit Δ_B de B est donné pour x dans B par

$$\Delta_B(x) = \tau^{-2} \sum_{p\in P} E_{N_3}(f_3 x E_{N_2'}(b_p^* f_3 h^{-1} f_2 h^{-1})) \otimes b_p$$

et le co-produit Δ_A de A vérifie pour x dans A une formule analogue

$$\Delta_A(x) = \tau^{-2} \sum_{s\in S} E_{N_2}(f_2 x E_{N_1'}(a_s^* f_2 j_1(h^{-1}) f_1 j_1(h^{-1}))) \otimes a_s,$$

formule qui s'écrit aussi

$$\Delta_A(x) = \tau^{-2} \sum_{s\in S} E_{N_2}(f_2 x E_{N_1'}(a_s^* f_2 h^{-1} f_1 h^{-1})) \otimes a_s.$$

Deuxième formule pour Δ_B:
Si $\{\alpha_r : r \in R\}$ est une base de Pimsner-Popa de A sur $N_0' \cap N_1$, on a aussi:

$$\Delta_B(x) = \sum_{p\in P}\sum_{r\in R} E_A(x\alpha_r b_p^*)h^{-1}f_2h^{-1}\alpha_r^* \otimes b_p.$$

Démonstration. Soient a_1 et a_2 deux éléments de A, on a:

$$\begin{aligned}\langle a_1 \otimes a_2, \Delta_B(x)\rangle &= \tau^{-6}\sum_{p\in P}\mathrm{tr}(a_1hf_2f_1hf_3xE_{N_2'}(b_p^*h^{-1}f_3f_2h^{-1}))\mathrm{tr}(a_2hf_2f_1hb_p)\\ &= \tau^{-6}\mathrm{tr}\Big(f_1hf_3xa_1E_{N_2'}\Big(\sum_{p\in P}\mathrm{tr}(a_2hf_2f_1hb_p)b_p^*h^{-1}f_3f_2\Big)f_2\Big)\\ &= \tau^{-6}\mathrm{tr}(f_1hf_3xa_1E_{N_2'}[E_{N_1'}(a_2hf_2f_1)f_3f_2]f_2).\end{aligned}$$

Comme les tours $N_3' \subset \overset{f_2}{N_2'} \subset N_1'$ et $N_2' \subset \overset{f_1}{N_1'} \subset N_0'$ sont standard, on obtient:

$$\begin{aligned}\langle a_1 \otimes a_2, \Delta_B(x)\rangle &= \tau^{-5}\mathrm{tr}(f_1hxa_1E_{N_1'}(a_2hf_2f_1)f_3f_2f_3)\\ &= \tau^{-4}\mathrm{tr}(f_1hxa_1E_{N_1'}(a_2hf_2f_1)f_3) = \tau^{-3}\mathrm{tr}(a_1E_{N_1'}(a_2hf_2f_1)f_1hx)\\ &= \tau^{-2}\mathrm{tr}(a_1a_2hf_2f_1hx) = \langle a_1a_2, x\rangle.\end{aligned}$$

La première formule pour Δ_A se montre de manière analogue.

Nous pouvons établir une expression du co-produit Δ_B semblable à celle de 5.3.1 de [5], c'est la deuxième formule. Soit $\{\alpha_r : r \in R\}$ une base de Pimsner-Popa de A sur $N_0' \cap N_1$, on vérifie facilement que $\{\alpha_r : r \in R\}$ est une base de Pimsner-Popa de N_2 sur N_1. On sait d'après 2.7 de [1] que pour tout y de $N_1' \cap N_4$, on a:

$$\tau\sum_{r\in R}\alpha_r y\alpha_r^* = E_{N_2'}(y).$$

En appliquant ce résultat à la première formule de Δ_B , on obtient la seconde. ∎

On utilisera la notation habituelle de Sweedler: $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$.

3.5.2. Des définitions des co-produits par dualité et des propriétés de la dualité, on déduit:

PROPOSITION. *Soit x un élément de $N_1' \cap N_2$. Pour tous a de A et b de B, on a:*

$$\begin{aligned}\Delta_B(bx) &= \Delta_B(b)(x\otimes 1), & \Delta_B(j_2(x)b) &= (1\otimes j_2(x))\Delta_B(b),\\ \Delta_A(aj_1(x)) &= \Delta_A(a)(j_1(x)\otimes 1), & \Delta_A(xa) &= (1\otimes x)\Delta_A(a).\end{aligned}$$

3.5.3. LES PROJECTEURS $\Delta_A(1)$ ET $\Delta_B(1)$. Nous calculons maintenant les images de l'unité par les co-produits et nous faisons le lien avec les projecteurs relatifs aux produits fibrés en dimension finie définis par Jean-Michel Vallin dans [19].

PROPOSITION. *Si $\{\lambda_k : k \in K\}$ est une famille d'unités matricielles de $N_1' \cap N_2$ telle que l'élément λ_k appartienne au facteur $M_{\nu_{j_k}}(\mathbb{C})q_{j_k}$, l'élément $\Delta_B(1)$ est le projecteur $\sum_k \frac{1}{\nu_{j_k}} j_2(\lambda_k^*) \otimes \lambda_k$ de $N_2' \cap N_3 \otimes N_1' \cap N_2$.*

Démonstration. Ecrivons la deuxième formule du co-produit pour $x = 1$; comme $\sum_{r\in R} \alpha_r f_2 \alpha_r^*$ vaut 1, la propriété 3.2 (i) donne:

$$\Delta_B(1) = \sum_p j_2(h^{-1}E_{N_2}(b_p^*)h^{-1}) \otimes b_p.$$

Si $\{\lambda_k : k \in K\}$ est une famille d'unités matricielles de $N_1' \cap N_2$, $\left\{\sqrt{\frac{1}{t_{j_k}}}\lambda_k : t \in I\right\}$ est une base orthonormale de $N_1' \cap N_2$ et comme $E_{N_2}(b_p^*)h^{-1}$ appartient à $N_1' \cap N_2$, on a:

$$\Delta_B(1) = \sum_{p,k} \frac{1}{t_{j_k}} j_2(h^{-1}\lambda_k^*) \otimes \mathrm{tr}(E_{N_2}(b_p^*)h^{-1}\lambda_k)b_p = \sum_k \frac{1}{t_{j_k}} j_2(h^{-1}\lambda_k^*) \otimes h^{-1}\lambda_k.$$

On obtient donc la formule annoncée et l'appartenance de $\Delta_B(1)$ à $N_2' \cap N_3 \otimes N_1' \cap N_2$; $\Delta_B(1)$ est un projecteur car Δ_B est un homomorphisme d'algèbres, comme on le montre au paragraphe suivant. ∎

Considérons l'identité comme représentation de $N_1' \cap N_2$ dans A et B, j_1 (respectivement j_2) comme antireprésentation de $N_1' \cap N_2$ dans A (respectivement B). Alors $\Delta_A(1)$ (respectivement $\Delta_B(1)$) est le projecteur e_{Id,j_1} (respectivement $e_{j_2,\mathrm{Id}}$) défini par Jean-Michel Vallin [19].

3.5.4. PROPRIÉTÉS DES CO-PRODUITS.

PROPOSITION. *Les co-produits sont des homomorphismes d'algèbres involutives vérifiant:*

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}\,)\Delta(1) = (1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1).$$

Démonstration. Montrons la proposition pour Δ_B par exemple. D'après 3.5.1, pour tous x et y de B, on a:

$$\begin{aligned}
&\Delta_B(x)\Delta_B(y)\\
&\quad= \tau^{-2} \sum_{p,p'\in P} E_{N_3}(f_3 x E_{N_2'}(b_p^* f_3 h^{-1} f_2 h^{-1})) \sum_{r\in R} E_A(y\alpha_r b_{p'}^*)h^{-1}f_2h^{-1}\alpha_r^* \otimes b_p b_{p'}\\
&\quad= \tau^{-2} \sum_{p,p'\in P} \sum_{r\in R} E_{N_3}[f_3 x E_A(y\alpha_r b_{p'}^*)h^{-1}E_{N_2'}(b_p^* f_3 h^{-1} f_2 j_2(h^{-1}))f_2h^{-1}\alpha_r^*] \otimes b_p b_{p'}\\
&\quad= \tau^{-2} \sum_{p,p'\in P} \sum_{r\in R} E_{N_3}[f_3 x E_A(y\alpha_r b_{p'}^*)H^{-1}E_{N_2'}(b_p^* f_3 h^{-1} f_2) f_2h^{-1}\alpha_r^*] \otimes b_p b_{p'}
\end{aligned}$$

$$= \tau^{-1} \sum_{p,p' \in P} \sum_{r \in R} E_{N_3}[f_3 x E_A(y\alpha_r b_{p'}^*) H^{-1} b_p^* f_3 h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^*] \otimes b_p b_{p'}$$

$$= \sum_{p,p' \in P} \sum_{r \in R} E_{N_2}[x E_A(y\alpha_r b_{p'}^*) H^{-1} b_p^*] h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes b_p b_{p'}$$

$$= \sum_{p,p',q \in P} \sum_{r \in R} E_{N_2}[x E_A(y\alpha_r b_{p'}^* \mathrm{tr}(b_{p'} b_q^* b_p)) H^{-1} b_p^*] h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes b_q$$

$$= \sum_{p,q \in P} \sum_{r \in R} E_{N_2}[x E_A(y\alpha_r b_q^* b_p h^{-1}) h^{-1} b_p^*] h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes b_q$$

$$= \sum_{p,q \in P} \sum_{r \in R} E_{N_2}(xy\alpha_r b_q^*) h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes b_q \quad \text{(d'après 3.3.3)}$$

$$= \Delta_B(xy).$$

Traitons maintenant le cas de l'involution:

$$\begin{aligned}\Delta_B(x)^* &= \sum_{p \in P} \sum_{r \in R} \alpha_r h^{-1} f_2 h^{-1} E_A(b_p \alpha_r^* x^*) \otimes b_p^* \\ &= \sum_{p \in P} \sum_{r,s \in R} \alpha_r h^{-1} f_2 h^{-1} E_{N_1}(b_p \alpha_r^* x^* \alpha_s) \alpha_s^* \otimes b_p^* \\ &= \sum_{p \in P} \sum_{r,s \in R} \alpha_r E_{N_1}(b_p \alpha_r^* x^* \alpha_s) h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_s^* \otimes b_p^*.\end{aligned}$$

Comme b_p commute avec N_1, on a:

$$E_{N_1}(b_p \alpha_r^* x^* \alpha_s) = E_{N_1}(\alpha_r^* x^* \alpha_s b_p).$$

Puisque $\{\alpha_r : r \in R\}$ est une base de Pimsner-Popa de A sur $N_0' \cap N_1$ et que $\{b_p^* : p \in P\}$ est une famille d'unités matricielles normalisées, on obtient:

$$\Delta_B(x)^* = \sum_{p \in P} \sum_{s \in R} E_A(x^* \alpha_s b_p) h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_s^* \otimes b_p^* = \Delta_B(x^*).$$

Montrons la relation pour $\Delta_B(1)$. Comme $1_{(1)}$ appartient à $N_2' \cap N_3$, d'après 3.5.2, on a:

$$\begin{aligned}(\Delta_B \otimes \mathrm{id})\Delta_B(1) = \Delta_B(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)} &= (1 \otimes 1_{(1)})\Delta_B(1) \otimes 1_{(2)} \\ &= (1 \otimes \Delta_B(1))(\Delta_B(1) \otimes 1) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

3.5.5. ETUDE DES CO-UNITÉS.

PROPOSITION. *Pour tout élément b de B, la co-unité ε_B de B est donnée par:*

$$\varepsilon_B(b) = \tau^{-1} \mathrm{tr}(h f_2 h b).$$

Pour tout élément a de A, la co-unité ε_A de A vérifie une formule analogue:

$$\varepsilon_A(a) = \tau^{-1} \mathrm{tr}(h f_1 h a) = \tau^{-1} \mathrm{tr}(j_1(h) f_1 j_1(h) a).$$

Chaque co-unité vérifie: $\varepsilon(xyz) = \varepsilon(xy_{(2)})\varepsilon(y_{(1)}z)$.

Démonstration. Les formules sont évidentes compte-tenu des propriétés des projecteurs de Jones. Montrons la relation pour la co-unité de B. Soient x, y et z trois éléments de B. On pose:

$$\Delta_A(1) = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)} \quad \text{et} \quad \Delta_B(y) = y_{(1)} \otimes y_{(2)}.$$

On peut alors écrire:

$$\begin{aligned}\varepsilon(xy_{(2)})\varepsilon(y_{(1)}z) &= \langle 1_{(1)}, x\rangle\langle 1_{(2)}, y_{(2)}\rangle\langle 1_{(1)}, y_{(1)}\rangle\langle 1_{(2)}, z\rangle \\ &= \langle 1_{(1)}, x\rangle\langle 1_{(2)}, \varepsilon_B(y_{(1)}1_{(1)})y_{(2)}\rangle\langle 1_{(2)}, z\rangle.\end{aligned}$$

Or comme $1_{(1)}$ est un élément de $N_1' \cap N_2$ et B une co-algèbre, d'après 3.5.2, on a: $\varepsilon_B(y_{(1)}1_{(1)})y_{(2)} = (\varepsilon_B \otimes \mathrm{id}\,)(\Delta_B(y)(1_{(1)} \otimes 1)) = (\varepsilon_B \otimes \mathrm{id}\,)\Delta_B(y1_{(1)}) = y1_{(1)}$. On obtient donc

$$\begin{aligned}\varepsilon(xy_{(2)})\varepsilon(y_{(1)}z) &= \langle 1_{(1)}, x\rangle\langle 1_{(2)}, y1_{(1)}\rangle\langle 1_{(2)}, z\rangle = \langle 1, xy1_{(1)}\rangle\langle 1_{(2)}, z\rangle \\ &= \langle 1_{(1)}, xy\rangle\langle 1_{(2)}, z\rangle = \varepsilon_B(xyz). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Nous donnons maintenant les expressions des co-unités but et source de B; les formules pour A sont analogues:

PROPOSITION. *Pour tout x de B, on a:*

$$\begin{aligned}\varepsilon_B^t(x) &= \tau^{-1}E_{N_1'\cap N_2}(xhf_2h^{-1}), \\ \varepsilon_B^s(x) &= \tau^{-1}j_2(E_{N_1'\cap N_2}(xhf_2h^{-1})) = \tau^{-1}E_{N_2'\cap N_3}(j_2(x)h^{-1}f_2h).\end{aligned}$$

La sous-algèbre co-unitale but A_t de A est $N_0' \cap N_1$, la sous-algèbre co-unitale source B_s de B est $N_2' \cap N_3$, les sous-algèbres co-unitales but B_t et source A_s coïncident avec $N_1' \cap N_2$.

Démonstration. Avec les notations de 3.5.3 et grâce à la proposition précédente, on a:

$$\begin{aligned}\varepsilon_B^t(x) &= \tau^{-1}\sum_k \frac{1}{\nu_{j_k}}\mathrm{tr}(xhf_2hj_2(\lambda_k^*))\lambda_k = \tau^{-1}\sum_k \frac{1}{\nu_{j_k}}\mathrm{tr}(xhf_2\lambda_k^*h)\lambda_k \\ &= \tau^{-1}\sum_k \mathrm{tr}\Big(xhf_2\frac{1}{\sqrt{t_{j_k}}}\lambda_k^*\Big)\frac{1}{\sqrt{t_{j_k}}}\lambda_k h^{-1}.\end{aligned}$$

On obtient la formule annoncée en remarquant que $\Big\{\frac{1}{\sqrt{t_{j_k}}}\lambda_k : k \in K\Big\}$ est une famille d'unités matricielles normalisées de $N_1' \cap N_2$. La deuxième formule se montre de même. $\blacksquare$

3.6. ANTIPODES SUR A ET B. Pour obtenir des structures de C*-groupoïdes quantiques duaux sur A et B, nous complétons nos données par les antipodes S_A et S_B définis pour tous a de A et b de B par:

$$\langle S_A(a)^*, b\rangle = \overline{\langle a, b^*\rangle}, \quad \langle a, S_B(b)^*\rangle = \overline{\langle a^*, b\rangle}.$$

3.6.1. FORMULES POUR LES ANTIPODES. Nous obtenons alors les formules suivantes:

$$S_B(b) = hj_2(h^{-1})j_2(b)h^{-1}j_2(h), \quad S_A(a) = j_1(h)h^{-1}j_1(a)j_1(h^{-1})h.$$

Il est évident que S_A et S_B sont des anti-automorphismes d'algèbres conservant l'unité. On vérifie facilement la formule de dualité:

$$\langle S_A(a), b\rangle = \langle a, S_B(b)\rangle.$$

Et par dualité, on obtient que S_A et S_B sont des anti-automorphismes de co-algèbres conservant les co-unités.

3.6.2. Il nous reste à vérifier la formule liant l'antipode, la co-unité et le co-produit.

PROPOSITION. *Les antipodes S_A et S_B vérifient la relation:*

$$m(\mathrm{id} \otimes S)\Delta(x) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id}\,)(\Delta(1)(x \otimes 1)) = \varepsilon_t(x).$$

Démonstration. Soit x un élément de B; avec les notations de 3.5.1, on a:

$$\begin{aligned} m(\mathrm{id} \otimes S_B)\Delta_B(x) &= x_{(1)}S_B(x_{(2)}) \\ &= \tau^{-2}\sum_{p\in P} E_{N_3}[f_3xE_{N_2'}(b_p^*f_3h^{-1}f_2h^{-1})]hj_2(h^{-1})j_2(b_p)h^{-1}j_2(h) \\ &= \tau^{-2}\sum_{p\in P} E_{N_3}[f_3xE_{N_2'}(b_p^*f_3h^{-1}f_2)hj_2(b_ph^{-2})h^{-1}j_2(h)]. \end{aligned}$$

Or, si $\{\alpha_r : r \in R\}$ est une base de Pimsner-Popa de A sur $N_0' \cap N_1$, la formule de 3.2.1 de [5] nous donne une expression de $j_2(b_ph^{-2}) = \tau^{-1}\sum_{r\in R} E_A(f_2\alpha_r b_p h^{-2})f_2\alpha_r^*$. On peut donc écrire:

$$\begin{aligned} m(\mathrm{id} \otimes S_B)\Delta_B(x) &= \tau^{-3}\sum_{p\in P, r\in R} E_{N_3}[f_3xhE_A(f_2\alpha_r b_p h^{-2})E_{N_2'}(b_p^*f_3h^{-1}f_2)f_2\alpha_r^*h^{-1}j_2(h)] \\ &= \tau^{-2}\sum_{p\in P, r\in R} E_{N_3}[f_3xhE_A(f_2\alpha_r b_p h^{-1})h^{-1}b_p^*f_3h^{-1}f_2\alpha_r^*h^{-1}j_2(h)]. \end{aligned}$$

Comme l'ensemble $\{b_ph^{-1} : p \in P\}$ est une quasi-base de N_3 sur N_2 (3.3.3), on a: $\sum_{p\in P} E_A(f_2\alpha_r b_p h^{-1})h^{-1}b_p^* = f_2\alpha_r$; d'autre part, puisque $\{\alpha_r : r \in R\}$ est une base de Pimsner-Popa, la somme $\sum_{r\in R} \alpha_r f_2\alpha_r^*$ vaut 1 et on en déduit:

$$\begin{aligned} m(\mathrm{id} \otimes S_B)\Delta_B(x) &= \tau^{-2}\sum_{r\in R} E_{N_3}(f_3xhf_2\alpha_r f_3j_2(h^{-1})f_2\alpha_r^*h^{-1}j_2(h)) \\ &= \tau^{-2}E_{N_3}(f_3xhf_2f_3h^{-1}) = \tau^{-2}E_{N_3}(E_{N_2}(xhf_2h^{-1})f_3) \\ &= \tau^{-1}E_{N_2}(xhf_2h^{-1}). \end{aligned}$$

On obtient la formule annoncée grâce à l'expression de ε_B^t démontrée en 3.5.5. ∎

3.6.3. REMARQUES. Les formules définissant S_A et S_B sont analogues. Les automorphismes S_A^2 et S_B^2 sont intérieurs:

$$S_A^2 = \mathrm{Ad}\,(j_1(H)H^{-1}), \quad S_B^2 = \mathrm{Ad}\,(j_2(H^{-1})H).$$

Les C^*-groupoïdes quantiques construits sont donc réguliers.

3.7. PROJECTION DE HAAR, MESURE DE HAAR. On démontre facilement la proposition suivante.

PROPOSITION. *Soit d la dimension de $N_1' \cap N_2$. La projection de Haar normalisée du C^*-groupoïde quantique B est $p_B = d^{-1}hf_2h$. La mesure de Haar normalisée du C^*-groupoïde quantique B est ϕ_B définie par:*

$$\phi_B(x) = d^{-1}\mathrm{tr}(Hj_2(H)x) \quad x \in B.$$

On a des formules analogues pour le C^*-groupoïde quantique A.

3.8. ACTIONS DES C^*-GROUPOÏDES QUANTIQUES.

D'après 6.1 de [13], le C^*-groupoïde quantique B agit à gauche sur l'algèbre N_2. Nous définissons ici une action à gauche du C^*-groupoïde quantique A sur N_1 puis nous obtiendrons par dualité une action à gauche du C^*-groupoïde quantique B sur N_2. On trouvera toutes les définitions concernant les actions et les produits croisés dans la partie 2.

3.8.1. ACTION DU C^*-GROUPOÏDE QUANTIQUE A SUR N_1.

PROPOSITION. *L'application:* $\begin{array}{ccc} A \otimes N_1 & \to & N_1 \\ a \otimes x & \mapsto & a \triangleright x = \tau^{-1}E_{N_1}(axhf_1h^{-1}) \end{array}$ *est une action à gauche standard et extérieure du C^*-groupoïde quantique A sur l'algèbre N_1.*

Démonstration. Tout au long de cette démonstration, nous utilisons l'égalité: $f_1h = f_1j_1(h)$ (voir 3.2 (i)). Montrons d'abord que l'application définit une structure de A-module à gauche sur N_1:

$$\begin{aligned} 1 \triangleright x &= \tau^{-1}E_{N_1}(xhf_1h^{-1}) = x, \\ a \triangleright (c \triangleright x) &= \tau^{-2}E_{N_1}(aE_{N_1}(cxhf_1h^{-1})hf_1h^{-1}) = \tau^{-2}E_{N_1}(aE_{N_1}(cxhf_1)f_1h^{-1}) \\ &= \tau^{-1}E_{N_1}(acxhf_1h^{-1}) = (ac) \triangleright x. \end{aligned}$$

Nous étudions maintenant l'action de A sur un produit.

LEMME. *Pour tout a de A et x de N_1, on a:*

$$(a_{(1)} \triangleright x)a_{(2)} = ax.$$

Démonstration. Soit $\{a_s : s \in S\}$ une famille d'unités matricielles normalisées de A. D'après 3.5.1, on peut écrire:

$$\begin{aligned}(a_{(1)} \triangleright x)a_{(2)} &= \tau^{-3} \sum_{s\in S} E_{N_1}[E_{N_2}(f_2 a E_{N_1'}(a_s^* f_2 h^{-1} f_1 h^{-1}))xhf_1h^{-1}]a_s \\ &= \tau^{-3} \sum_{s\in S} E_{N_1}[f_2 a x E_{N_1'}(a_s^* f_2 h^{-1} f_1) f_1 h^{-1}]a_s \\ &= \tau^{-2} \sum_{s\in S} E_{N_1}(f_2 a x a_s^* f_2 h^{-1} f_1 h^{-1})a_s \\ &= \tau^{-2} \sum_{s\in S} E_{N_1}(f_2 E_{N_1}(a x a_s^*) j_1(h^{-1}) f_1 j_1(h^{-1}))a_s \\ &= \sum_{s\in S} E_{N_1}(a x a_s^* j_1(h^{-1})) j_1(h^{-1}) a_s.\end{aligned}$$

On conclut en remarquant que si $\{a_s : s \in S\}$ est une famille d'unités matricielles normalisées de A, $\{a_s^* : s \in S\}$ l'est aussi et d'après 3.3.3, $\{a_s^* j_1(h^{-1}) : s \in S\}$ est une quasi-base de N_2 sur N_1. ∎

On reprend maintenant la démonstration des propriétés de l'action. En appliquant le lemme précédent pour a dans A et x et y dans N_1, on obtient:

$$(a_{(1)} \triangleright x)(a_{(2)} \triangleright y) = \tau^{-1} E_{N_1}((a_{(1)} \triangleright x)a_{(2)} y h f_1 h^{-1}) = a \triangleright xy.$$

Pour montrer la relation $(a \triangleright x)^* = S_A(a)^* \triangleright x^*$, commençons par un lemme:

LEMME. *Si x et y sont des éléments de N_1 et que a appartienne à A, alors on a:*

$$\mathrm{tr}(j_1(a)xf_1y) = \mathrm{tr}(f_1xay).$$

Démonstration. Ici, en considérant l'inclusion des commutants, la formule 4.5 (i) de [13] s'écrit: $j_1(a) = \tau^{-3} E_{N_2}(f_2 f_1 E_{N_1'}(a f_2 f_1))$. En utilisant les propriétés de commutation, on obtient donc:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(j_1(a)xf_1y) &= \tau^{-3}\mathrm{tr}(E_{N_2}(f_2f_1E_{N_1'}(af_2f_1))xf_1y) = \tau^{-3}\mathrm{tr}(f_2f_1xE_{N_1'}(af_2f_1)f_1y) \\ &= \tau^{-2}\mathrm{tr}(f_2f_1xaf_2f_1y) = \mathrm{tr}(E_{N_1}(f_1xa)y) = \mathrm{tr}(f_1xay). \quad ∎\end{aligned}$$

Grâce à ce lemme, pour x et y éléments de N_1 et a dans A, on peut écrire:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}((S_A(a)^* \triangleright x^*)y) &= \tau^{-1}\mathrm{tr}(hj_1(h^{-1})j_1(a^*)h^{-1}j_1(h)x^*hf_1h^{-1}y) \\ &= \tau^{-1}\mathrm{tr}(j_1(ha^*h^{-1})x^*f_1y) = \tau^{-1}\mathrm{tr}(f_1x^*ha^*h^{-1}y) \\ &= \tau^{-1}\mathrm{tr}(h^{-1}f_1hx^*a^*y) = \mathrm{tr}((a \triangleright x)^*y).\end{aligned}$$

On étudie ensuite l'action de A sur l'unité de N_1:

$$a \triangleright 1 = \tau^{-1}E_{N_1}(ahf_1h^{-1}) = \varepsilon_A^t(a) = \varepsilon_A^t(a) \triangleright 1.$$

On vérifie facilement que $a \triangleright 1$ est nul si et seulement si $\varepsilon_A^t(a)$ l'est. L'action est donc standard. La proposition 3.8.3 nous permet d'affirmer qu'elle est extérieure (voir 2.8.2) puisque d'après 3.5.5, $N_1' \cap N_2$ est la sous-algèbre co-unitale A_s . ∎

3.8.2. POINTS FIXES SOUS L'ACTION DE A. Par définition, un élément x de N_1 est un point fixe sous l'action de A si on a l'égalité

$$(*) \qquad a \triangleright x = \varepsilon_A^t(a) \triangleright x.$$

PROPOSITION. *L'algèbre N_0 est l'algèbre des points fixes de N_1 sous l'action du C^*-groupoïde quantique A.*

Démonstration. Si x est dans N_0, alors x commute à A donc vérifie l'égalité $(*)$. Si x est un point fixe, écrivons l'égalité $(*)$ pour $a = f_1 h^{-1}$; en utilisant le lemme 3.2, nous obtenons alors la suite d'égalités équivalentes:

$$\begin{aligned}(f_1 h^{-1}) \triangleright x &= \varepsilon_A^t(f_1 h^{-1}) \triangleright x,\\ \tau^{-1} E_{N_1}(f_1 x f_1 h^{-1}) &= \tau^{-2} E_{N_1}(E_{N_1}(f_1 h^{-1}) x h f_1 h^{-1}),\\ E_{N_0}(x) j_1(h^{-1}) &= x j_1(h^{-1}),\\ E_{N_0}(x) &= x.\end{aligned}$$

Donc x appartient à N_0. ∎

3.8.3. PRODUIT CROISÉ DE N_1 PAR A.

PROPOSITION. *L'application $\Theta : [x \otimes a] \mapsto xa$ est un isomorphisme d'algèbres de von Neumann entre $N_1 \rtimes A$ et N_2.*

Démonstration. La démonstration est semblable à celle donnée dans 6.3 de [13] par D. Nikshych et L. Vainerman; nous la donnons pour être complets.

Si z appartient à $A_t = N_0' \cap N_1$, on a:

$$z \triangleright 1 = \varepsilon_A^t(z) = z;$$

donc Θ définit une application linéaire de $N_1 \otimes_{A_t} A$ dans N_2 qui est surjective puisque A fournit une quasi-base de N_2 sur N_1.

En utilisant le premier lemme démontré en 3.8.1, on obtient pour a et c dans A, x et y dans N_1:

$$\begin{aligned}\Theta([x \otimes a][y \otimes c]) &= \Theta([x(a_{(1)} \triangleright y) \otimes a_{(2)} c]) = x(a_{(1)} \triangleright y) a_{(2)} c = xayc\\ &= \Theta([x \otimes a])\Theta([y \otimes c]),\\ \Theta([x \otimes a]^*) &= \Theta([(a_{(1)}^* \triangleright x^*) \otimes a_{(2)}^*]) = (a_{(1)}^* \triangleright x^*) a_{(2)}^* = a^* x^* = \Theta([x \otimes a]).\end{aligned}$$

L'application est donc un homomorphisme surjectif d'algèbres involutives. Puisque ces algèbres sont des facteurs de type II_1, Θ est injectif et la proposition est démontrée. ∎

3.8.4. ACTION DU C^*-GROUPOÏDE QUANTIQUE B SUR N_2. On précise maintenant l'action à gauche de B sur A.

LEMME. *L'action à gauche de B sur A définie par dualité est:*

$$b \triangleright a = \tau^{-1} E_A(bah f_2 h^{-1}), \quad a \in A, b \in B.$$

Démonstration. D'après 2.6.2, l'action duale de B sur A est définie par

$$b \triangleright a = a_{(1)} \langle a_{(2)}, b \rangle, \quad a \in A, b \in B.$$

Pour tout c dans B, on a donc:

$$\begin{aligned}\langle b \triangleright a, c \rangle &= \langle a_{(1)}, c \rangle \langle a_{(2)}, b \rangle = \langle a, cb \rangle = \tau^{-2}\mathrm{tr}(bahf_2f_1hc) \\ &= \tau^{-2}\mathrm{tr}(\tau^{-1}E_{N_2}(bahf_2)f_2f_1hc) = \tau^{-2}\mathrm{tr}(\tau^{-1}E_{N_2}(bahf_2h^{-1})hf_2f_1hc) \\ &= \langle \tau^{-1}E_A(bahf_2h^{-1}), c \rangle. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

PROPOSITION. *L'application:* $\begin{array}{ccc} B \otimes N_2 & \to & N_2 \\ b \otimes x & \mapsto & b \triangleright x = \tau^{-1}E_{N_2}(bxhf_2h^{-1}) \end{array}$ *est une action à gauche du C^*-groupoïde quantique B sur l'algèbre N_2 qui prolonge l'action duale de B sur A et dont l'algèbre de points fixes est N_1. Le facteur N_3 est isomorphe au produit croisé de N_2 par B.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que la formule est analogue à celle qui définit l'action de A sur N_1 et que si x appartient à A, on retrouve l'action duale. C'est l'action duale de B sur $N_1 \rtimes A$ (voir 2.7.2). Comme l'algèbre N_2 est linéairement engendrée par les produits xa pour $x \in N_1, a \in A$, on a plus précisément pour x dans N_1 et a dans A l'égalité $b \triangleright xa = x(b \triangleright a)$. $\blacksquare$

3.9. CONCLUSION. Nous avons donc défini sur les commutants relatifs $N_0' \cap N_2$ et $N_1' \cap N_3$ des structures duales de C^*-groupoïde quantique données par des formules analogues. Ces C^*-groupoïdes quantiques agissent extérieurement de manière analogue et duale sur les facteurs N_1 et N_2. L'intérêt de la symétrie des définitions apparaîtra dans les parties suivantes.

Les C^*-groupoïdes quantiques associés à une inclusion de profondeur 2 de facteurs de type II_1 sont un peu particuliers, d'une part ils sont réguliers (en 7, nous montrons que la régularité est possible par déformation), d'autre part ils sont connexes en effet:

$$A_t \cap Z(A) \subset N_0' \cap N_1 \cap \{f_1\}' = N_0' \cap N_0 = \mathbb{C}.$$

Cela tient au fait qu'on considère des inclusions de facteurs.

4. C^*-GROUPOÏDES QUANTIQUES ASSOCIÉS À UNE INCLUSION D'INDICE FINI DE PROFONDEUR FINIE DE FACTEURS DE TYPE II_1

4.1. INCLUSION DE PROFONDEUR FINIE. Soit $P_0 \subset P_1$ une inclusion d'indice fini δ^{-1} et de profondeur finie de facteurs de type II_1. On note

$$P_0 \subset P_1 \overset{e_1}{\subset} P_2 \overset{e_2}{\subset} P_3 \subset \cdots \subset P_n \overset{e_n}{\subset} P_{n+1} \subset \cdots$$

la tour de Jones obtenue par construction de base ([7], 3) et tr la trace normale finie normalisée sur les facteurs considérés.

4.1.1. La proposition suivante montre qu'une inclusion de profondeur finie peut être vue comme intermédiaire d'une inclusion de profondeur 2.

PROPOSITION. ([14], 4.1) *Soit $P_0 \subset P_1$ une inclusion d'indice fini et de profondeur finie p de facteurs de type II_1. Si l'entier m est supérieur ou égal à $p-1$ alors l'inclusion $P_0 \subset P_m$ est de profondeur* 2.

4.1.2. On suppose donc que l'inclusion $P_0 \subset P_m$ est de profondeur 2 (4.1.1). Pour cette inclusion, on prend les notations suivantes:

$$N_0 = P_0 \subset N_1 = P_m \overset{f_1}{\subset} N_2 = P_{2m} \overset{f_2}{\subset} N_3 = P_{3m}.$$

D'après [17], les projecteurs f_j s'expriment en fonction des projecteurs e_i, on a par exemple:

$$f_1 = \delta^{-m(m-1)/2}(e_m e_{m-1} \cdots e_1)(e_{m+1} e_m \cdots e_2)(e_{2m-1} e_{2m-2} \cdots e_m).$$

L'anti-automorphisme j_n est l'anti-automorphisme de $P_0' \cap P_{2n}$ défini en posant:

$$j_n(x) = J_n x^* J_n \quad x \in P_0' \cap P_{2n}$$

où J_n est l'isométrie bijective anti-linéaire canonique de l'espace standard $L^2(P_n, \mathrm{tr})$ de P_n, $n \in \mathbb{N}$, (voir 3.1.1).

Les commutants relatifs $A = N_0' \cap N_2$ et $B = N_1' \cap N_3$ sont donc munis de structures duales de C*-groupoïde quantique.

4.2. FACTEUR INTERMÉDIAIRE ET $*$-SOUS-ALGÈBRE CO-IDÉALE. D'après le théorème 4.3 de [14], le commutant relatif $P_m' \cap P_{2m+1}$ est une $*$-sous-algèbre co-idéale de B et P_{2m+1} est isomorphe au produit croisé de P_{2m} par ce co-idéal. Précisons la structure de $P_m' \cap P_{2m+1}$, son action sur P_{2m} et les points fixes de P_{2m} sous cette action.

4.2.1. Nous gardons les notations de 3.5.1 pour la proposition suivante.

PROPOSITION. *Le co-produit d'un élément y du co-idéal à gauche $P_m' \cap P_{2m+1}$ est donné par:*

$$\Delta_B(y) = \sum_{l \in L} \sum_{r \in R} E_A(y \alpha_r \mu_l^*) h^{-1} f_2 h^{-1} \alpha_r^* \otimes \mu_l$$

où $\{\mu_l : l \in L\}$ est une famille d'unités matricielles normalisées de $P_m' \cap P_{2m+1}$.

Les restrictions à $P_m' \cap P_{2m+1}$ de la co-unité et de la co-unité but de B vérifient pour tout élément y de $P_m' \cap P_{2m+1}$:

$$\varepsilon_B(y) = \delta^{-1} \mathrm{tr}(y h e_{2m} h), \quad \varepsilon_B^t(y) = \delta^{-1} E_{N_2}(y h e_{2m} h^{-1}).$$

La restriction à $P_m' \cap P_{2m+1}$ de l'action de B sur P_{2m} est donnée par

$$y \triangleright x = \delta^{-1} E_{N_2}(y x h e_{2m} h^{-1}), \quad y \in P_m' \cap P_{2m+1}, x \in P_{2m}.$$

Si l'on appelle algèbre des points fixes de P_{2m} sous l'action du co-idéal $P'_m \cap P_{2m+1}$, l'algèbre P^f_{2m} définie par:

$$P^f_{2m} = \{x \in P_{2m} : y \triangleright x = \varepsilon^t_B(y) \triangleright x, \forall y \in P'_m \cap P_{2m+1}\}$$

alors P^f_{2m} est l'image de P_{2m-1} par l'automorphisme intérieur Ad (h).

Démonstration. Pour le co-produit, on écrit la deuxième formule:

$$\Delta_B(y) = \sum_{p\in P}\sum_{r\in R} E_A(y\alpha_r b^*_p)h^{-1}f_2h^{-1}\alpha^*_r \otimes b_p.$$

Comme $y\alpha_r$ est un élément de $P'_0 \cap P_{2m+1}$, on a: $E_A(y\alpha_r b^*_p) = E_A(y\alpha_r E_{P_{2m+1}}(b^*_p))$. Soit $\{\mu_l : l \in L\}$ une famille d'unités matricielles normalisées de $P'_m \cap P_{2m+1}$. En décomposant $E_{P_{2m+1}}(b^*_p)$ sur cette base, on obtient la formule annoncée.

Les formules pour la co-unité, la co-unité but et l'action résultent de leurs définitions et du lemme suivant:

LEMME. *$E_{P_{2m+1}}(f_2)$ vaut $\delta^{m-1}e_{2m}$.*

Démonstration. Comme f_2 est le projecteur de Jones de l'inclusion $P_m \subset P_{2m}$ qui est d'indice δ^{-m}, on sait que $E_{P_{2m}}(f_2)$ est le scalaire δ^m. D'autre part, d'après [17], on a l'égalité $f_2 = f_2e_{2m}$. On en déduit, pour tout x de P_{2m+1}:

$$\mathrm{tr}(E_{P_{2m+1}}(f_2)x) = \mathrm{tr}(f_2x) = \mathrm{tr}(f_2e_{2m}x) = \delta^{-1}\mathrm{tr}(f_2e_{2m}E_{P_{2m}}(e_{2m}x)) = \delta^{m-1}\mathrm{tr}(e_{2m}x).$$

La formule annoncée en résulte. ∎

La démonstration du troisième point est analogue à celle de 3.8.2. ∎

4.2.2. De cette proposition et du théorème 4.3 de [14], on déduit le corollaire:

COROLLAIRE. *La tour $P_1 \subset P_2 \subset P_3$ est isomorphe à la tour*

$$hP_{2m-1}h^{-1} \subset P_{2m} \subset P_{2m} \ltimes (P'_m \cap P_{2m+1}).$$

Si m est impair, la tour $P_0 \subset P_1 \subset P_2$ est isomorphe à la tour

$$j_m(h)P_{m-1}j_m(h^{-1}) \subset P_m \subset P_m \ltimes (P'_0 \cap P_{m+1}).$$

La deuxième assertion résulte de la symétrie de la construction.

4.2.3. CALCUL DE $\Delta_B(e_{2m})$.

COROLLAIRE. *Si $\{\mu_l : l \in L\}$ est une famille d'unités matricielles normalisées de $P'_m \cap P_{2m+1}$, on a la formule:*

$$\Delta_B(e_{2m}) = \delta \sum_{l\in L} j_{2m}(h^{-1}\mu^*_l) \otimes h^{-1}\mu_l.$$

Démonstration. De la proposition et du lemme 4.2.1, on déduit:

$$\Delta_B(e_{2m}) = \delta^{-(m-1)} \sum_{l\in L}\sum_{r\in R} E_A(f_2\alpha_r\mu^*_l)f_2\alpha^*_r j_{2m}(h^{-1}) \otimes h^{-1}\mu_l.$$

Et la formule 3.2.1 de [5] permet d'écrire l'égalité annoncée. ∎

4.3. AUTODUALITÉ. Pour la fin de cette partie, nous choisissons m pair ($m = 2k$) et nous adoptons les notations suivantes: M_q est le facteur P_{qk} et N_q le facteur M_{2q} pour tout entier q. L'inclusion $N_0 \subset N_1$ est donc de profondeur 2 et son indice est $\tau^{-1} = [M_1 : M_0]^2$. Les projecteurs de Jones sont indiqués sur les tours:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} M_0 & \subset & M_1 & \overset{e_1}{\subset} & M_2 & \overset{e_2}{\subset} & M_3 & \overset{e_3}{\subset} & M_4 & \overset{e_4}{\subset} & M_5 & \overset{e_5}{\subset} & M_6 \\ N_0 & & \subset & & N_1 & & \overset{f_1}{\subset} & & N_2 & & \overset{f_2}{\subset} & & N_3 \end{array} .$$

Ici l'anti-automorphisme j_q est l'anti-automorphisme de $M_0' \cap M_{2q}$ défini à partir de l'isométrie bijective anti-linéaire canonique de l'espace standard $L^2(M_q, \mathrm{tr})$. Dans les diverses formules de la partie 3, il faut donc remplacer j_2 par j_4 et j_1 par j_2.

Les algèbres $A = N_0' \cap N_2$ et $B = N_1' \cap N_3$ sont munies de structures de C^*-groupoïde quantique que nous allons comparer. Quand on choisit m pair, on bénéficie de l'existence de l'isomorphisme $\gamma = j_4 j_3 = j_3 j_2$ qui envoie l'algèbre involutive (A, j_2) sur (B, j_4) (3.1.2). L'isomorphisme γ décale de 2 les indices de la tour des M_n mais de 1 ceux de la tour des N_q. De plus comme l'anti-isomorphisme j_3 de $N_0' \cap N_3$ conserve la trace et échange les algèbres A et B, il conserve aussi l'indice H de la restriction à $N_1' \cap N_2$ de la trace tr, on a donc:

$$\gamma(j_2(h)) = h \quad \text{et} \quad \gamma(h) = j_4(h).$$

Ces remarques et la symétrie des structures de C^*-groupoïde quantique permettent d'affirmer que γ est un isomorphisme du C^*-groupoïde quantique A sur le C^*-groupoïde quantique B.

THÉORÈME. *Soit $P_0 \subset P_1$ une inclusion d'indice fini et de profondeur finie de facteurs de type II_1 telle que $P_0 \subset P_{2k}$ soit de profondeur 2. Alors les C^*-groupoïdes quantiques $P_0' \cap P_{4k}$ et $P_{2k}' \cap P_{6k}$ sont isomorphes, ils sont donc autoduaux.*

5. STRUCTURE DE C^*-GROUPOÏDE QUANTIQUE SUR LES ALGÈBRES DE TEMPERLEY-LIEB

Comme dans 2.7 de [15], nous précisons la structure de C^*-groupoïde quantique sur les algèbres de Temperley-Lieb dans le cas non générique. Ces algèbres sont apparues dès le début de l'étude des inclusions [8]. Ce sont les commutants relatifs des facteurs de Jones dans le facteur hyperfini.

5.1. FACTEURS DE JONES ET ALGÈBRES DE TEMPERLEY-LIEB. ([7], 2.1, 4.7b, II.7). Soient l un entier supérieur à 2 et $(e_i')_{i \geqslant 0}$ une suite de projecteurs satisfaisant les relations suivantes:

$$e_i' e_{i\pm1}' e_i' = \delta e_i' \quad \text{et} \quad e_i' e_j' = e_j' e_i' \quad \text{pour } |i-j| \geqslant 2$$

avec $\delta = \left(4\cos^2\frac{\pi}{l+1}\right)^{-1}$. Le facteur P_1 engendré par les projecteurs $(e'_i)_{i\geqslant 0}$ est le facteur hyperfini de type II_1 et le sous-facteur P_0 de P_1 engendré par les projecteurs $(e'_i)_{i\geqslant 1}$ est le sous-facteur de Jones d'indice δ^{-1}. On note tr la trace normalisée de P_1. Le graphe principal de l'inclusion $P_0 \subset P_1$ est le graphe linéaire A_l à l sommets (voir 1.4.3 de [7], 4 et 5 de [8]), de même pour l'inclusion $P_1 \subset P_2$ qui lui est isomorphe. La profondeur de ces inclusions est donc $l-1$. Les commutants relatifs sont des algèbres de Temperley-Lieb de paramètre non-générique δ^{-1}:

$$P'_q \cap P_n = (1, e_{q+1}, e_{q+2}, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1})''.$$

D'après 4.1 de [13] (voir 4.1.1), pour $m = l-2$, l'inclusion $P_0 \subset P_m$ est de profondeur 2, de plus elle est isomorphe à l'inclusion $P_m \subset P_{2m}$. L'algèbre de Temperley-Lieb $A = P'_0 \cap P_{2m} = (1, e_1, e_2, \ldots, e_{2m-1})''$ est donc munie d'une structure de C^*-groupoïde quantique autodual qu'on va préciser.

5.2. STRUCTURE DE C^*-GROUPOÏDE QUANTIQUE DES ALGÈBRES DE TEMPERLEY-LIEB.

PROPOSITION. *Le co-produit de A est donné par:*

$$\begin{aligned}
\Delta_A(1) &= \sum_k \frac{1}{\nu_{j_k}} j_m(\lambda_k^*) \otimes \lambda_k, \\
\Delta_A(e_p) &= \Delta_A(1)(e_p \otimes 1) = (e_p \otimes 1)\Delta_A(1), && 1 \leqslant p \leqslant m-1, \\
\Delta_A(e_q) &= \Delta_A(1)(1 \otimes e_q) = (1 \otimes e_q)\Delta_A(1), && m+1 \leqslant q \leqslant 2m-1, \\
\Delta_A(e_m) &= \delta \sum_{l\in L} j_m(j_m(h^{-1})\mu_l^*) \otimes j_m(h^{-1})\mu_l.
\end{aligned}$$

où $\{\lambda_k : k \in K\}$ est une famille d'unités matricielles de $P'_0 \cap P_m$ (ν_{j_k} est la dimension du facteur de $P'_0 \cap P_m$ auquel appartient λ_k), $\{\mu_l : l \in L\}$ une famille d'unités matricielles normalisées de $P'_0 \cap P_{m+1}$ et h la racine carrée de l'indice de la restriction à $P'_m \cap P_{2m}$ de tr.

La co-unité de A est donnée par:

$$\varepsilon_A(x) = \delta^{-m}\mathrm{tr}(hf_1hx), \quad x \in A,$$

où f_1 est le projecteur de Jones de l'inclusion $P_0 \subset P_m$

$$f_1 = \delta^{-m(m-1)/2}(e_m e_{m-1} \cdots e_1)(e_{m+1} e_m \cdots e_2)(e_{2m-1} e_{2m-2} \cdots e_m).$$

L'antipode de A est donnée par:

$$\begin{aligned}
S_A(e_p) &= e_{2m-p}, \quad 1 \leqslant p \leqslant 2m-1, p \neq m, \\
S_A(e_m) &= j_m(h)h^{-1}e_m j_m(h^{-1})h.
\end{aligned}$$

Démonstration. Le co-produit est un homomorphisme d'algèbres, il suffit donc de le connaître sur les générateurs $1, e_1, \ldots, e_{2m-1}$ de A. L'expression de $\Delta(1)$ résulte de 3.5.3. Tous les projecteurs sauf e_m sont soit dans $N'_0 \cap N_1$ soit dans $N'_1 \cap N_2$, leur co-produit est calculé grâce à 3.5.2 et 3.5.3.

L'expression de $\Delta(e_m)$ est donnée par le corollaire 4.2.3 grâce à la symétrie de la construction.

La formule de la co-unité découle de 3.5.5 et de [17].

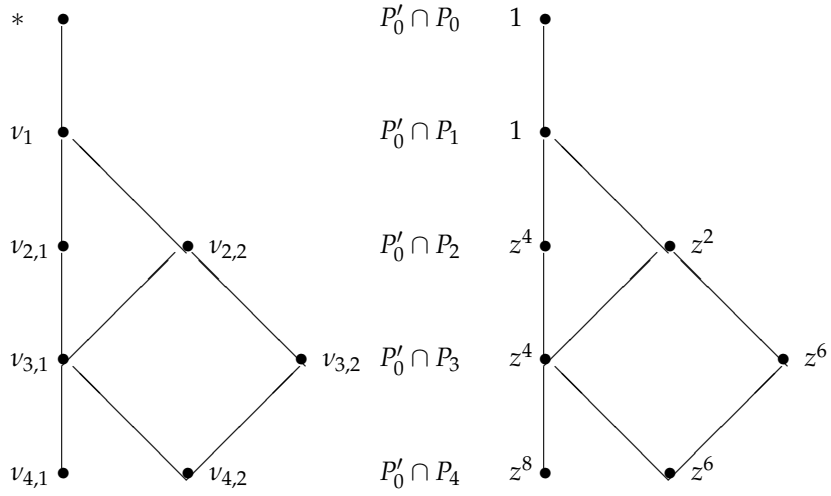
L'antipode est un anti-automorphisme d'algèbres conservant l'unité, il suffit donc de le connaître sur les projecteurs de Jones. D'après 2.2.1 de [5], on sait que, pour $p = 1, \ldots, 2m-1$, $j_m(e_p)$ est le projecteur e_{2m-p}; les formules résultent alors des propriétés de commutation de h. ∎

5.3. C*-GROUPOÏDE QUANTIQUE DE DIMENSION 13 ASSOCIÉ AU FACTEUR DE JONES DE GRAPHE A_4. Dans cette partie, on suppose que l vaut 4, l'inclusion $P_0 \subset P_1$ est alors d'indice $\delta^{-1} = 4\cos^2\frac{\pi}{5}$, de graphe principal A_4 et l'inclusion $P_0 \subset P_2$ est de profondeur 2. La C^*-algèbre $A_\delta = P_0' \cap P_4$ est un C^*-groupoïde quantique autodual; nous le décrivons et montrons qu'il est isomorphe à celui, que nous nommerons G, décrit par G. Böhm et K. Szlachanyi dans 5 de [3]. Dans [13], D. Nikshych et L. Vainerman munissent cette même algèbre d'une structure de groupoïde quantique pour laquelle l'involution est modifiée mais on peut montrer par les méthodes employées ici qu'elle est isomorphe aux deux autres.

Pour simplifier les calculs, nous utilisons le paramètre $z = \sqrt[4]{\delta}$ introduit dans 5 de [3] et qui vérifie les relations suivantes et bien d'autres encore:

$$1 - 3\delta + \delta^2 = 0, \qquad z^4 + z^2 - 1 = 0, \qquad 1 + z^2 = z^{-2},$$
$$z^2 = 1 - \delta = \tfrac{\delta}{1-\delta}, \qquad z^3 = \sqrt{\delta(1-\delta)}.$$

5.3.1. ALGÈBRE DES CHEMINS DE A_δ. Comme dans 2.3.11 de [7], nous représentons l'algèbre A_δ comme algèbre des chemins du graphe A_4 avec les notations suivantes pour les sommets du graphe (graphe de gauche) et les chemins (voir page suivante); la trace des projecteurs minimaux des algèbres correspondant aux sommets du graphe est donnée sur le graphe de droite (d'après 5.2 de [8]):



$$\begin{aligned}
\xi'_1 &= (*, \nu_1, \nu_{2,1}, \nu_{3,1}), & \xi_1 &= (\xi'_1, \nu_{4,1}),\\
\xi'_2 &= (*, \nu_1, \nu_{2,2}, \nu_{3,1}), & \xi_2 &= (\xi'_2, \nu_{4,1}),\\
\eta_1 &= (\xi'_1, \nu_{4,2}), & \eta_2 &= (\xi'_2, \nu_{4,2}),\\
\eta' &= (*, \nu_1, \nu_{2,2}, \nu_{3,2}), & \eta_3 &= (\eta', \nu_{4,2}).
\end{aligned}$$

L'algèbre A_δ est somme directe de l'algèbre $C = \text{Vect}\{c_{i,j} : (i,j) \in \{1,2\}^2\}$ et l'algèbre $D = \text{Vect}\{d_{h,k} : (h,k) \in \{1,2,3\}^2\}$ avec $c_{i,j} = T_{\xi_i,\xi_j}$ et $d_{h,k} = T_{\eta_h,\eta_k}$.

L'algèbre $P'_0 \cap P_3$ est somme directe de $\text{Vect}\{b_{i,j} : (i,j) \in \{1,2\}^2\}$ et $\mathbb{C}b_5$ avec $b_{i,j} = T_{\xi'_i,\xi'_j} = c_{i,j} + d_{i,j}$ et $b_5 = T_{\eta',\eta'} = d_{3,3}$.

5.3.2. PROJECTEURS DE JONES. L'algèbre A_δ est engendrée, en tant qu'algèbre, par l'unité et les projecteurs e_1, e_2 et e_3. La formule 2.6.5.4 de [7] nous fournit l'expression de ces projecteurs dans la base d'unités matricielles de l'algèbre des chemins:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad + \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\\
e_2 &= \begin{pmatrix} z^4 & z^3 \\ z^3 & z^2 \end{pmatrix} \quad + \quad \begin{pmatrix} z^4 & z^3 & 0 \\ z^3 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\\
e_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad + \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & z^3 \\ 0 & z^3 & z^4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, d'après 3.2 et 3.1.1, on a:

$$h = z^{-2}e_3 + z^{-1}(1 - e_3), \quad j_2(h) = z^{-2}e_1 + z^{-1}(1 - e_1).$$

5.3.3. EXPRESSION DES UNITÉS MATRICIELLES EN FONCTION DES PROJECTEURS DE JONES. On vérifie facilement par le calcul les expressions suivantes pour les unités matricielles de A_δ:

$$\begin{aligned}
c_{1,1} &= e_1 e_3,\\
c_{1,2} &= z^{-3} e_3 e_1 (e_2 - \delta),\\
d_{1,1} &= e_1(1 - e_3),\\
d_{1,2} &= z^{-3}(1 - e_3) e_1 (e_2 - \delta),\\
d_{1,3} &= z^{-6} e_1 (1 - e_3)(e_2 - \delta)(e_3 - z^2).
\end{aligned}$$

Et on obtient les autres expressions grâce aux relations entre les unités matricielles.

5.3.4. NOUVELLES UNITÉS MATRICIELLES. Nous définissons maintenant des nouvelles unités matricielles sur D qui vont permettre d'obtenir des formules plus simples pour le co-produit et l'antipode et d'identifier A_δ et le C^*-groupoïde quantique G.

PROPOSITION. *$(D, *)$ admet $\{e_{i,j} : i, j = 1, 2, 3\}$ comme unités matricielles avec:*

$$e_{1,2} = z^2 d_{1,2} - z d_{1,3} = z^{-3} e_1 (1 - e_3)(e_2 - \delta)(1 - e_3),$$
$$e_{1,3} = z d_{1,2} + z^2 d_{1,3} = \delta^{-1} e_1 (1 - e_3)(e_2 - \delta) e_3.$$

On a alors en particulier:

$$\begin{aligned} e_1 &= c_{1,1} + e_{1,1}, \\ e_3 &= c_{1,1} + e_{3,3}, \\ e_2 &= z^4 c_{1,1} + z^3 c_{1,2} + z^3 c_{2,1} + z^2 c_{2,2} + z^4 e_{1,1} + z^5 e_{1,2} + z^4 e_{1,3}, \\ &\quad + z^5 e_{2,1} + z^6 e_{2,2} + z^5 e_{2,3} + z^4 e_{3,1} + z^5 e_{3,2} + z^4 e_{3,3}. \end{aligned}$$

Les calculs nécessaires à la vérification de cette proposition et des suivantes se font facilement à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

5.3.5. EXPRESSION DU CO-PRODUIT.

PROPOSITION. ([3], 5) *Si $\{e^0_{i,j} : i, j = 1, 2\}$ (respectivement $\{e^1_{i,j} : i, j = 1, 2, 3\}$) est une famille d'unités matricielles du facteur de dimension 4 (respectivement 9) de G, le co-produit de G est donné par:*

$$\begin{aligned} \Delta_G(e^0_{1,1}) &= e^0_{1,1} \otimes e^0_{1,1} + e^1_{1,1} \otimes e^1_{3,3}, \\ \Delta_G(e^0_{1,2}) &= e^0_{1,2} \otimes e^0_{1,2} + z^2 e^1_{1,3} \otimes e^1_{3,1} + z e^1_{1,2} \otimes e^1_{3,2}, \\ \Delta_G(e^0_{2,2}) &= e^0_{2,2} \otimes e^0_{2,2} + z^4 e^1_{3,3} \otimes e^1_{1,1} + z^3 e^1_{3,2} \otimes e^1_{1,2} + z^3 e^1_{2,3} \otimes e^1_{2,1} + z^2 e^1_{2,2} \otimes e^1_{2,2}, \\ \Delta_G(e^1_{1,1}) &= e^0_{1,1} \otimes e^1_{1,1} + e^1_{1,1} \otimes e^0_{2,2} + e^1_{1,1} \otimes e^1_{2,2}, \\ \Delta_G(e^1_{1,2}) &= e^0_{1,2} \otimes e^1_{1,2} + e^1_{1,2} \otimes e^0_{2,2} + z e^1_{1,3} \otimes e^1_{2,1} - z^2 e^1_{1,2} \otimes e^1_{2,2}, \\ \Delta_G(e^1_{1,3}) &= e^0_{1,2} \otimes e^1_{1,3} + e^1_{1,3} \otimes e^0_{2,1} + e^1_{1,2} \otimes e^1_{2,3}, \\ \Delta_G(e^1_{2,2}) &= e^0_{2,2} \otimes e^1_{2,2} + e^1_{2,2} \otimes e^0_{2,2} + z^4 e^1_{2,2} \otimes e^1_{2,2} \\ &\quad + z^2 e^1_{3,3} \otimes e^1_{1,1} - z^3 e^1_{3,2} \otimes e^1_{1,2} - z^3 e^1_{2,3} \otimes e^1_{2,1}, \\ \Delta_G(e^1_{2,3}) &= e^0_{2,2} \otimes e^1_{2,3} + e^1_{2,3} \otimes e^0_{2,1} + z e^1_{3,2} \otimes e^1_{1,3} - z^2 e^1_{2,2} \otimes e^1_{2,3}, \\ \Delta_G(e^1_{3,3}) &= e^0_{2,2} \otimes e^1_{3,3} + e^1_{2,2} \otimes e^1_{3,3} + e^1_{3,3} \otimes e^0_{1,1}. \end{aligned}$$

Dans la proposition suivante, nous donnons deux séries de formules pour le coproduit Δ_A; l'une en fonction des nouvelles unités matricielles permet de le comparer avec Δ_G, l'autre en fonction des projecteurs de Jones permet de le comparer avec celui de 7.3 de [13].

PROPOSITION. *Le co-produit Δ_A de A_δ est l'homomorphisme d'algèbres déterminé par les égalités suivantes:*

$$\begin{aligned}
\Delta_A(1) &= c_{1,1}\otimes c_{1,1} + c_{1,1}\otimes e_{1,1} + c_{2,2}\otimes c_{2,2} + c_{2,2}\otimes e_{2,2} + c_{2,2}\otimes e_{3,3}\\
&\quad + e_{1,1}\otimes c_{2,2} + e_{1,1}\otimes e_{2,2} + e_{1,1}\otimes e_{3,3} + e_{2,2}\otimes c_{2,2} + e_{2,2}\otimes e_{2,2}\\
&\quad + e_{2,2}\otimes e_{3,3} + e_{3,3}\otimes c_{1,1} + e_{3,3}\otimes e_{1,1},\\
\Delta_A(e_1) &= c_{1,1}\otimes c_{1,1} + c_{1,1}\otimes e_{1,1} + e_{1,1}\otimes c_{2,2} + e_{1,1}\otimes e_{2,2} + e_{1,1}\otimes e_{3,3},\\
\Delta_A(e_3) &= c_{1,1}\otimes c_{1,1} + c_{2,2}\otimes e_{3,3} + e_{1,1}\otimes e_{3,3} + e_{2,2}\otimes e_{3,3} + e_{3,3}\otimes c_{1,1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_A(e_2) &= z^4c_{1,1}\otimes c_{1,1} + z^4c_{1,1}\otimes e_{1,1}\\
&\quad + z^3c_{1,2}\otimes c_{1,2} + z^5c_{1,2}\otimes e_{1,2} + z^4c_{1,2}\otimes e_{1,3}\\
&\quad + z^3c_{2,1}\otimes c_{2,1} + z^5c_{2,1}\otimes e_{2,1} + z^4c_{2,1}\otimes e_{3,1}\\
&\quad + z^2c_{2,2}\otimes c_{2,2} + z^6c_{2,2}\otimes e_{2,2} + z^5c_{2,2}\otimes e_{2,3} + z^5c_{2,2}\otimes e_{3,2} + z^4c_{2,2}\otimes e_{3,3}\\
&\quad + z^4e_{1,1}\otimes c_{2,2} + z^4e_{1,1}\otimes e_{2,2} + z^4e_{1,1}\otimes e_{3,3}\\
&\quad + z^5e_{1,2}\otimes c_{2,2} - z^7e_{1,2}\otimes e_{2,2} + z^4e_{1,2}\otimes e_{2,3} + z^4e_{1,2}\otimes e_{3,2}\\
&\quad + z^4e_{1,3}\otimes c_{2,1} + z^6e_{1,3}\otimes e_{2,1} + z^5e_{1,3}\otimes e_{3,1}\\
&\quad + z^5e_{2,1}\otimes c_{2,2} - z^7e_{2,1}\otimes e_{2,2} + z^4e_{2,1}\otimes e_{2,3} + z^4e_{2,1}\otimes e_{3,2}\\
&\quad + z^6e_{2,2}\otimes c_{2,2} + 2z^6e_{2,2}\otimes e_{2,2} - z^7e_{2,2}\otimes e_{2,3} - z^7e_{2,2}\otimes e_{3,2} + z^4e_{2,2}\otimes e_{3,3}\\
&\quad + z^5e_{2,3}\otimes c_{2,1} + z^7e_{2,3}\otimes e_{2,1} + z^6e_{2,3}\otimes e_{3,1}\\
&\quad + z^4e_{3,1}\otimes c_{1,2} + z^6e_{3,1}\otimes e_{1,2} + z^5e_{3,1}\otimes e_{1,3}\\
&\quad + z^5e_{3,2}\otimes c_{1,2} + z^7e_{3,2}\otimes e_{1,2} + z^6e_{3,2}\otimes e_{1,3}\\
&\quad + z^4e_{3,3}\otimes c_{1,1} + z^4e_{3,3}\otimes e_{1,1}.
\end{aligned}$$

On a aussi:

$$\begin{aligned}
\Delta_A(1) &= e_3\otimes e_1 + (1-e_3)\otimes(1-e_1),\\
\Delta_A(e_1) &= e_1e_3\otimes e_1 + e_1(1-e_3)\otimes(1-e_1),\\
\Delta_A(e_3) &= e_3\otimes e_1e_3 + (1-e_3)\otimes(1-e_1)e_3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_A(e_2) &= \Big(1-\frac{(e_3-e_2)^2}{(1-\delta)}\Big)\otimes\Big(1-\frac{(e_1-e_2)^2}{(1-\delta)}\Big) + \delta e_3\otimes e_1\\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\delta(1-\delta)}}e_3(e_2-\delta)\otimes e_1(e_2-\delta) + \frac{1}{\sqrt{\delta(1-\delta)}}(e_2-\delta)e_3\otimes(e_2-\delta)e_1\\
&\quad + (1-\delta)\Big(\frac{(e_3-e_2)^2}{(1-\delta)} - e_3\Big)\otimes\Big(\frac{(e_1-e_2)^2}{(1-\delta)} - e_1\Big).
\end{aligned}$$

Démonstration. Comme l'algèbre $P_0'\cap P_2$ égale $\mathbb{C}e_1\otimes\mathbb{C}(1-e_1)$, on a

$$\Delta_A(1) = e_3\otimes e_1 + (1-e_3)\otimes(1-e_1).$$

En utilisant les expressions des projecteurs de Jones en fonction des unités matricielles, on obtient:

$$\Delta_A(1) = (c_{1,1} + e_{3,3}) \otimes (c_{1,1} + e_{1,1}) + (c_{2,2} + e_{1,1} + e_{2,2}) \otimes (c_{2,2} + e_{2,2} + e_{3,3}).$$

De même, les autres formules sont la traduction à l'aide des unités matricielles des égalités (5.2):

$$\Delta_A(e_1) = (e_1 \otimes 1)\Delta_A(1), \quad \Delta_A(e_3) = \Delta_A(1)(1 \otimes e_3).$$

Le calcul de $\Delta_A(e_2)$ demande un peu plus de travail: D'après 5.3.1 et 5.3.3, les unités matricielles normalisées de $P_0' \cap P_3$ sont:

$$\begin{array}{lll} \mu_1 = z^{-2}e_1, & \mu_2 = z^{-2}(c_{1,2} + d_{1,2}), & \mu_3 = z^{-2}(c_{2,1} + d_{2,1}), \\ \mu_4 = z^{-2}(c_{2,2} + d_{2,2}), & \mu_5 = z^{-3}d_{3,3}. & \end{array}$$

Comme $j_2(h^{-1})$ vaut $z^2e_1 + z(1 - e_1)$, la formule 5.2 s'écrit ici:

$$\begin{aligned} \Delta_A(e_2) &= \delta(j_2(z^2\mu_1) \otimes z^2\mu_1 + j_2(z\mu_3) \otimes z^2\mu_2 + j_2(z^2\mu_2) \otimes z\mu_3 \\ &\quad + j_2(z\mu_4) \otimes z\mu_4 + j_2(z\mu_5) \otimes z\mu_5) \\ &= j_2(z^2e_1) \otimes z^2e_1 + j_2(zb_{2,1}) \otimes z^2b_{1,2} + j_2(z^2b_{1,2}) \otimes zb_{2,1} \\ &\quad + j_2(zb_{2,2}) \otimes zb_{2,2} + j_2(d_{3,3}) \otimes d_{3,3}. \end{aligned}$$

Or on a:

$$\begin{aligned} b_{1,2} &= z^{-3}e_1(e_2 - \delta), \\ b_{2,2} &= z^{-6}(e_2 - \delta)e_1(e_2 - \delta) = z^{-2}[(e_2 - e_1)^2 - (1 - \delta)e_1], \\ d_{3,3} &= z^{-12}(e_3 - z^2)(e_2 - \delta)(1 - e_3)e_1(e_2 - \delta)(e_3 - z^2) = 1 - \frac{(e_1 - e_2)^2}{(1 - \delta)}. \end{aligned}$$

Ces expressions des unités matricielles en fonction des projecteurs de Jones permettent de préciser les valeurs prises par j_2 puis on exprime le résultat en fonction des nouvelles unités matricielles et on obtient les formules annoncées. ∎

COROLLAIRE. *Le co-produit de A_δ coïncide avec celui de G.*

Démonstration. Comme le projecteur e_3 est l'image de e_1 par l'antipode qui est un anti-automorphisme de co-algèbre (on verra plus loin que les antipodes coïncident), il suffit pour comparer Δ_A et le co-produit Δ_G de G de considérer leurs valeurs en 1, e_1 et e_2. On vérifie par le calcul qu'elles coïncident. ∎

5.3.6. EXPRESSION DE LA CO-UNITÉ. Comme f_1 coïncide avec e_2 dans C et est nul dans D, la co-unité ε_A est nulle sur D et comme elle est linéaire et compatible avec l'involution, il suffit de la connaître sur $c_{1,1}$ et $c_{1,2}$. Comme la trace des projecteurs minimaux de C est δ^2, si on note Tr_0 la trace de C qui vaut 1 sur les projecteurs minimaux, on a:

$$\varepsilon_A(c_{1,2}) = \mathrm{Tr}_0(hf_1hc_{1,2}) = 1, \quad \varepsilon_A(c_{1,1}) = \mathrm{Tr}_0(f_1hc_{1,1}) = 1.$$

La co-unité de A coïncide avec celle de G.

5.3.7. EXPRESSION DE L'ANTIPODE.

PROPOSITION. *L'antipode de A_δ est entièrement déterminé par les formules suivantes; il coïncide avec l'antipode de G:*

$$S_A(c_{1,2}) = c_{2,1}, \qquad S_A(c_{2,1}) = c_{1,2}, \qquad S_A(e_{1,2}) = z^{-1}e_{2,3},$$
$$S_A(e_{2,1}) = ze_{3,2}, \qquad S_A(e_{1,3}) = z^{-2}e_{1,3}, \qquad S_A(e_{3,1}) = z^2e_{3,1}.$$

Démonstration. Ces formules résultent des expressions des nouvelles unités matricielles en fonction des projecteurs de Jones (5.3.4) et de 3.1.1 (iii). Elles suffisent pour connaître S_A qui est un anti-automorphisme d'algèbre. ∎

6. ACTION D'UN GROUPOÏDE QUANTIQUE FINI SUR UN FACTEUR

Dans cette partie, nous allons considérer $(A, m_a, 1_a, \Delta_a, \varepsilon_a, S_a, \phi_a, p_a)$ et $(B, m_b, 1_b, \Delta_b, \varepsilon_b, S_b, \phi_b, p_b)$ deux groupoïdes quantiques finis en dualité (notée $\langle a, b\rangle$). Le but de cette partie est de construire une inclusion $M_1 \subset M_2$ de facteurs (que nous obtiendrons hyperfinis de type II_1) telle que M_2 soit le produit croisé $M_1 \rtimes A$. Nous généralisons ainsi les résultats de [11] qui concernaient les algèbres de Kac faibles.

6.1. HYPOTHÈSE ET REMARQUE IMPORTANTE. Les résultats de [12] rappelés en 2.8 et ceux de la partie 3 conduisent á imposer l'hypothèse: A et B sont connexes (voir 2.8.3). Par contre l'hypothèse de régularité est inutile à la construction de l'inclusion sur laquelle agissent A et B. Ce qui laisse penser que la structure obtenue dans la partie 3 à partir de l'inclusion construite n'est pas nécessairement la structure originelle (voir 6.7).

6.2. PRODUIT CROISÉ DES GROUPOÏDES EN DUALITÉ: L'ALGÈBRE $A.B$. Les produits croisés $A \ltimes B$ et $A \rtimes B$ sont isomorphes en effet grâce à 2.6.3, l'identification, pour y dans A_s, de $[ay \otimes b]$ et $[a \otimes (1_b \triangleleft y)b]$ dans $A \ltimes B$ correspond à celle, pour z dans B_t, de $[a(z \triangleright 1_a) \otimes b]$ et $[a \otimes zb]$ dans $A \rtimes B$. On vérifie facilement que les lois sont compatibles et que les injections $a \mapsto [a \otimes 1_b]$ et $b \mapsto [1_a \otimes b]$ sont des homomorphismes d'algèbres qui permettent d'écrire $A \ltimes B$ et $A \rtimes B$ comme $A.B$.

6.3. MESURES DE HAAR ET ESPÉRANCES CONDITIONNELLES.

6.3.1. MESURES DE HAAR SUR $A_s = B_t$.

PROPOSITION. *Les restrictions des mesures de Haar ϕ_a et ϕ_b coïncident sur les algèbres identifiées A_s et B_t.*

Démonstration. D'après 2.3, la restriction à A_s (respectivement B_t) de ϕ_a (respectivement ϕ_b) vaut ε_a (respectivement ε_b). Or, pour a dans A_s, on a:

$$\varepsilon_b(1_b \triangleleft a) = \langle 1_a, 1_{b(2)}\rangle\langle a, 1_{b(1)}\rangle = \langle a, 1_b\rangle = \varepsilon_a(a)$$

donc ϕ_a et ϕ_b coïncident sur les algèbres identifiées A_s et B_t. ∎

6.3.2. DES ESPÉRANCES CONDITIONNELLES.

PROPOSITION. *On pose pour a dans A:*

$$F_{A_t}(a) = (\mathrm{id} \otimes \phi_a)\Delta_a(a) = p_b \triangleright a \quad et \quad F_{A_s}(a) = (\phi_a \otimes \mathrm{id})\Delta_a(a) = a \triangleleft p_b.$$

Les applications F_{A_t} et F_{A_s} sont des espérances conditionnelles fidèles de A sur A_t (respectivement A_s). Elles conservent ϕ_a et commutent.

On définit de même F_{B_t} et F_{B_s} avec des résultats analogues.

Démonstration. Les propriétés de ϕ_a (2.3) et celles des éléments de A_t (2.6.4) permettent d'affirmer que pour tout a de A, $F_{A_t}(a)$ appartient à A_t et que l'égalité $F_{A_t}(xay) = xF_{A_t}(a)y$ est vérifiée pour tous x et y dans A_t et a dans A. Comme Δ est un homomorphisme d'algèbres involutives, on a $F_{A_t}(x^*) = F_{A_t}(x)^*$. L'identité $\langle p_b \triangleright a, p_b\rangle = \langle a, p_b\rangle$ signifie que F_{A_t} conserve ϕ_a, alors F_{A_t} est fidèle puisque ϕ_a est fidèle.

Grâce à la coassociativité du coproduit, on a:

$$F_{A_s}F_{A_t} = (\phi_a \otimes \mathrm{id} \otimes \phi_a)(\Delta_a \otimes \mathrm{id})\Delta_a = (\phi_a \otimes \mathrm{id} \otimes \phi_a)(\mathrm{id} \otimes \Delta_a)\Delta_a = F_{A_t}F_{A_s}. \quad \blacksquare$$

6.3.3. AUTOMORPHISME MODULAIRE DE ϕ_a.

PROPOSITION. ([2], 4.12 et 4.14) *Les éléments $g_s = F_{A_s}(p_a)^{1/2}$ et $g_t = F_{A_t}(p_a)^{1/2}$ sont inversibles et l'automorphisme modulaire de ϕ_a est implémenté par g_sg_t c'est-à-dire que $\phi_a(g_s^{-1}g_t^{-1})$ est une trace sur A. On posera de même*

$$\widehat{g}_s = F_{B_s}(p_b)^{1/2} \quad et \quad \widehat{g}_t = F_{B_t}(p_b)^{1/2}.$$

D'après 4.13 de [2], on a les formules suivantes:

$$\widehat{g}_t = 1_b \triangleleft g_s = 1_b \triangleleft g_t, \qquad g_t = 1_a \triangleleft \widehat{g}_s = 1_a \triangleleft \widehat{g}_t,$$
$$\widehat{g}_s = g_s \triangleright 1_b = g_t \triangleright 1_b, \qquad g_s = \widehat{g}_s \triangleright 1_a = \widehat{g}_t \triangleright 1_a,$$
$$S(g_t) = g_s = S^{-1}(g_t), \qquad S(\widehat{g}_t) = \widehat{g}_s = S^{-1}(\widehat{g}_t).$$

Grâce à 2.4 et 2.3, on en déduit la relation $g_sp_a = \varepsilon_t(g_s)p_a = S(g_s)p_a = g_tp_a$ avec les projecteurs de Haar et de même on montre $p_ag_s = p_ag_t$.

D'après 6.3.2, $F_{A_s}(g_t^{-1})$ appartient à $A_s \cap A_t$. Si A et B sont connexes, $A_s \cap A_t$ est réduit aux scalaires et $F_{A_s}(g_t^{-1})$ est un scalaire qui vaut $d^{-1}\phi_a(g_t^{-1})$ avec $d = \phi_a(1_a)$.

Les mesures de Haar sont invariantes par les antipodes et coïncident sur les algèbres co-unitales donc on peut écrire les égalités suivantes $\phi_a(g_s^{-1}) = \phi_a(g_t^{-1}) = \phi_b(\widehat{g}_s^{-1}) = \phi_b(\widehat{g}_s^{-1})$ et on notera γ ces scalaires. On en déduit:

$$F_{A_s}(g_t^{-1}) = F_{A_t}(g_s^{-1}) = F_{B_s}(\widehat{g}_t^{-1}) = F_{B_t}(\widehat{g}_s^{-1}) = d^{-1}\gamma.$$

Si la restriction de S aux algèbres co-unitales est involutive alors la restriction de ϕ_a à A_t est la trace canonique de A_t (voir 6.3.1) et d est la dimension commune des algèbres co-unitales.

6.4. TRACE SUR $A.B$.

6.4.1. TRACES SUR A ET B.

DÉFINITION. Pour a de A, on définit en posant:

$$\mathrm{tr}_a(a) = d\gamma^{-2}\phi_a(g_s^{-1}g_t^{-1}a)$$

une trace normalisée tr_a sur A. On définit de même tr_b .

6.4.2. ESPÉRANCES CONDITIONNELLES. On notera $E_{A_s}, E_{B_t}\ldots$ les espérances conditionnelles définies par les traces tr_a et tr_b. Elles sont reliées aux espérances définies par ϕ_a et ϕ_b par les formules:

$$E_{A_s}(a) = d\gamma^{-1}F_{A_s}(ag_t^{-1}), \quad a \in A,$$
$$E_{B_t}(b) = d\gamma^{-1}F_{B_t}(\widehat{g_s}^{-1}b), \quad b \in B.$$

6.4.3. LEMME. *Pour tout b de B et tout y de B_s, on a:*

(i) $b_{(1)} \otimes E_{B_t}(yb_{(2)}) = \Delta_b(E_{B_t}(yb))$;

(ii) $b^*_{(1)} \otimes E_{B_t}(yb^*_{(2)}) = \Delta_b(E_{B_t}(yb^*))$;

(iii) $S_b^{-1}E_{B_t}(b) \triangleright 1_a = E_{B_t}(b) \triangleright 1_a$.

Démonstration. La définition de E_{B_t} et les propriétés de g_s permettent d'obtenir facilement les propriétés de E_{B_t} à partir de celles de F_{B_t}.

(i) Comme $\Delta_b(y)$ égale $(1_b \otimes y)\Delta_b(1)$ on peut écrire:

$$\begin{aligned} b_{(1)} \otimes F_{B_t}(yb_{(2)}) &= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \phi_b)(\mathrm{id} \otimes \Delta_b)\Delta_b(yb) \\ &= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \phi_b)(\Delta_b \otimes \mathrm{id}\,)\Delta_b(yb) = \Delta_b(F_{B_t}(yb)). \end{aligned}$$

(ii) se démontre de même.

(iii) A l'aide de 2.3 et 2.4, on obtient:

$$\begin{aligned} S_b^{-1}F_{B_t}(b) \triangleright 1_a &= 1_{a(1)}\langle 1_{a(2)}, S_b^{-1}b_{(1)}\rangle\langle p_a, b_{(2)}\rangle &&= 1_{a(1)}\langle S_a^{-1}(1_{a(2)}), b_{(1)}\rangle\langle p_a, b_{(2)}\rangle \\ &= 1_{a(1)}\langle S_a^{-1}(1_{a(2)})p_a, b\rangle &&= 1_{a(1)}\langle p_a 1_{a(2)}, S_b^{-1}b\rangle \\ &= 1_{a(1)}\langle p_a\varepsilon_s(1_{a(2)}), S_b^{-1}b\rangle &&= 1_{a(1)}\langle p_a\varepsilon_s \circ \varepsilon_t(1_{a(2)}), S_b^{-1}b\rangle \\ &= 1_{a(1)}\langle p_aS_a \circ \varepsilon_t(1_{a(2)}), S_b^{-1}b\rangle &&= 1_{a(1)}\langle p_aS_a(1_{a(2)}), S_b^{-1}b\rangle \\ &= 1_{a(1)}\langle 1_{a(2)}p_a, b\rangle &&= F_{B_t}(b) \triangleright 1_a\,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

6.4.4. D'AUTRES ESPÉRANCES CONDITIONNELLES. La proposition 4.2 de [11] se généralise ainsi :

PROPOSITION. (i) *En posant pour tout $[a \otimes b]$ dans $A.B$,*

$$E_A([a \otimes b]) = a(E_{B_t}(b) \triangleright 1_a)$$

on définit une espérance conditionnelle fidèle de $A.B$ dans A. On définit de même l'espérance conditionnelle E_B.

(ii) *Le carré* $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} & E_A & \\ A & \subset & A.B \\ \cup & & \cup E_B \\ A_s = B_t & \subset & B \end{array}$$

est commutatif et symétrique (voir 5.3.6 *de* [9]*). L'algèbre* $A \cap B$ *est* $A_s = B_t$.

Démonstration. (i) Etudions les propriétés de E_A:

– Grâce à 2.6.3 la définition de E_A ne dépend pas du représentant de $[a \otimes b]$.

– Soient a et α dans A et b dans B, comme $[\alpha \otimes 1_b][a \otimes b]$ vaut $[\alpha a \otimes b]$, on a bien:

$$E_A([\alpha \otimes 1_b][a \otimes b]) = \alpha E_A([a \otimes b]).$$

Calculons maintenant $E_A([a \otimes b][\alpha \otimes 1_b]) = a(b_{(1)} \triangleright \alpha)(E_{B_t}(b_{(2)}) \triangleright 1_a)$. Grâce à 6.4.3 (i) et à 2.6.4, on obtient:

$$E_A([a \otimes b][\alpha \otimes 1_b]) = a(E_{B_t}(b) \triangleright \alpha) = a(E_{B_t}(b) \triangleright 1_a)\alpha = E_A([a \otimes b])\alpha.$$

– Vérifions l'égalité $E_A(x^*) = E_A(x)^*$. Grâce à 6.4.3 (ii), on peut écrire $E_A([a \otimes b]^*) = E_A([b^*_{(1)} \triangleright a^* \otimes b^*_{(2)}]) = (b^*_{(1)} \triangleright a^*)(E_{B_t}(b^*_{(2)}) \triangleright 1_a) = E_{B_t}(b^*) \triangleright a^*$. Comme S_b envoie B_t sur B_s, on obtient grâce à 2.6.4:

$$E_A([a \otimes b]^*) = (S_b^{-1}E_{B_t}(b) \triangleright a)^* = (a(S_b^{-1}E_{B_t}(b) \triangleright 1_a))^*$$

et 6.4.3 (iii) permet de conclure.

– Soit $\{u_p : p \in P\}$ une quasi-base de B sur B_t (voir 3.3.2). Alors un élément $[a \otimes b]$ de $A.B$ s'écrit:

$$\begin{aligned}[a \otimes b] &= \sum_{p \in P} [a \otimes E_{B_t}(bu_p)u_p^*] = \sum_{p \in P} [a(E_{B_t}(bu_p) \triangleright 1_a) \otimes 1_b][1_a \otimes u_p^*] \\ &= \sum_{p \in P} [E_A([a \otimes b][1_a \otimes u_p]) \otimes 1_b][1_a \otimes u_p^*].\end{aligned}$$

Par involution, nous obtenons $[a \otimes b] = \sum_{p \in P} [1_a \otimes u_p][E_A([1_a \otimes u_p^*][a \otimes b]) \otimes 1_b]$ c'est-à-dire pour tout x de $A.B$

$$x = \sum_{p \in P} [1_a \otimes u_p][E_A([1_a \otimes u_p^*]x) \otimes 1_b].$$

– Nous calculons maintenant $E_A(x^*x)$:

$$\begin{aligned}E_A(x^*x) &= \sum_{(p,q) \in P \times P} E_A(x^*[1_a \otimes u_q])(E_{B_t}(u_q^*u_p) \triangleright 1_a)E_A([1_a \otimes u_p^*]x) \\ &= \sum_{(p,q) \in P \times P} E_A(x^*[1_a \otimes u_q][1_a \otimes E_{B_t}(u_q^*u_p)])E_A([1_a \otimes u_p^*]x) \\ &= \sum_{p \in P} E_A(x^*[1_a \otimes u_p])E_A([1_a \otimes u_p^*]x) = \sum_{p \in P} E_A([1_a \otimes u_p^*]x)^*E_A([1_a \otimes u_p^*]x).\end{aligned}$$

On en déduit que E_A est positive et fidèle.

(ii) Le carré $\mathcal{C}$ est commutatif car on a $E_A E_B = E_{A_s} \otimes E_{B_t} = E_B E_A$. On en déduit que $A_s = B_t = A \cap B$. Il est symétrique par définition puisque $A.B$ est l'espace vectoriel engendré par les produits $i_a(a)i_b(b)$, $a \in A, b \in B$. ∎

COROLLAIRE. *Pour tout $[a \otimes b]$ de $A.B$, on a l'égalité:*

$$\mathrm{tr}_a(E_A([a \otimes b])) = \mathrm{tr}_b(E_B([a \otimes b])).$$

Démonstration. Soit $[a \otimes b] \in A.B$, alors

$$\mathrm{tr}_a(E_A([a \otimes b])) = \mathrm{tr}_a(a(E_{B_t}(b) \triangleright 1_a)) = \mathrm{tr}_a(E_{A_s}(a)(E_{B_t}(b) \triangleright 1_a)).$$

Par un calcul analogue on trouve $\mathrm{tr}_b(E_B([a \otimes b])) = \mathrm{tr}_b((1_b \triangleleft E_{A_s}(a))E_{B_t}(b))$. Par 2.6.3, 6.3.3 et 6.3.1, tr_a et tr_b coïncident sur $A_s = B_t$. On conclut à l'égalité:

$$\mathrm{tr}_a(E_A([a \otimes b])) = \mathrm{tr}_b(E_B([a \otimes b])). \quad ∎$$

6.4.5. PROLONGEMENT DES TRACES tr_a ET tr_b À $A.B$. Le corollaire précédent permet de prolonger tr_a et tr_b à $A.B$. Etudions ce prolongement.

PROPOSITION. *La formule*

$$\mathrm{tr}([a \otimes b]) = \mathrm{tr}_a(E_A([a \otimes b])) = \mathrm{tr}_b(E_B([a \otimes b]))$$

définit une trace normalisée fidèle sur $A.B$. Par construction, les espérances E_A et E_B conservent cette trace. On a aussi:

$$\mathrm{tr}([a \otimes b]) = \mathrm{tr}_a(E_{B_t}(b) \triangleright a) = \mathrm{tr}_b(b \triangleleft E_{A_s}(a)).$$

Démonstration. On vérifie facilement l'égalité: $\mathrm{tr}([1_a \otimes 1_b]) = 1$. De plus tr est une forme linéaire positive et fidèle puisque E_A est linéaire, positive et fidèle.

Comme $[x \otimes y]$ vaut $[x \otimes 1_b][1_a \otimes y]$ pour montrer que tr est une trace, il suffit de montrer, pour a et x dans A et b et y dans B, les deux identités:

(1) $\mathrm{tr}([a \otimes b][x \otimes 1_b]) = \mathrm{tr}([x \otimes 1_b][a \otimes b])$;
(2) $\mathrm{tr}([a \otimes b][1_a \otimes y]) = \mathrm{tr}([1_a \otimes y][a \otimes b])$.

Montrons la première, la seconde se démontre de manière analogue. Grâce à 6.4.3 (i), on a:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}([a \otimes b][x \otimes 1_b]) &= \mathrm{tr}([a(b_{(1)} \triangleright x) \otimes b_{(2)}]) = \mathrm{tr}_a(a(b_{(1)} \triangleright x)(E_{B_t}(b_{(2)}) \triangleright 1_a)) \\ &= \mathrm{tr}_a(a(E_{B_t}(b) \triangleright x)).\end{aligned}$$

Comme tr_a est une trace, à l'aide des formules 2.6.4 on peut écrire $\mathrm{tr}([a \otimes b][x \otimes 1_b]) = \mathrm{tr}_a(a(E_{B_t}(b) \triangleright 1_a)x) = \mathrm{tr}_a(xa(E_{B_t}(b) \triangleright 1_a)) = \mathrm{tr}([x \otimes 1_b][a \otimes b])$. De plus, pour tout $[a \otimes b]$ de $A.B$, on a l'égalité:

$$\mathrm{tr}([a \otimes b]) = \mathrm{tr}_a((E_{B_t}(b) \triangleright 1_a)a) = \mathrm{tr}_a(E_{B_t}(b) \triangleright a). \quad ∎$$

6.4.6. REPRÉSENTATION STANDARD DE $A.B$ SUR $L^2(A, \mathrm{tr})$.

PROPOSITION. ([3], 4.2) *L'algèbre $A.B$ admet une représentation fidèle π_ϕ sur $L^2(A, \phi_a)$ qui prolonge la représentation de A par multiplication à gauche. En particulier, π_ϕ vérifie pour b dans B et a dans A,*

$$\pi_\phi(b)\Lambda_\phi(a) = \Lambda_\phi(b \triangleright a).$$

L'algèbre $A.B$ est l'extension de Jones de $A_t \subset A$ représentée sur $L^2(A, \phi_a)$. Elle est donc engendrée par A et p_b, projecteur de Jones de l'inclusion. Plus précisément, p_b vérifie: $\pi_\phi(p_b)\Lambda_\phi(a) = \Lambda_\phi(F_{A_t}(a))$.

Considérons l'isométrie U de $L^2(A, \phi_a)$ sur $L^2(A, \mathrm{tr})$ définie par

$$U\Lambda_\phi(a) = d^{-1/2}\gamma\Lambda_{\mathrm{tr}}(ag_s^{1/2}g_t^{1/2}).$$

On vérifie facilement que la représentation $\pi = U\pi_\phi U^{-1}$ de $A.B$ prolonge la représentation standard de A sur $L^2(A, \mathrm{tr})$ et le projecteur de Jones de l'inclusion $A_t \subset A$ représentée sur $L^2(A, \mathrm{tr})$ est alors $f_b = d\gamma^{-1}\widehat{g}_t^{-1/2}p_b\widehat{g}_t^{-1/2}$. En effet à l'aide de 6.3.3 et 2.6.4, on obtient pour a dans A:

$$\begin{aligned}
\pi(f_b)\Lambda_{\mathrm{tr}}(a) &= d^{3/2}\gamma^{-2}U\Lambda_\phi(\widehat{g}_t^{-1/2} \triangleright F_{A_t}(\widehat{g}_t^{-1/2} \triangleright ag_s^{-1/2}g_t^{-1/2})) \\
&= d^{3/2}\gamma^{-2}U\Lambda_\phi(g_s^{-1/2}F_{A_t}(g_s^{-1/2}ag_s^{-1/2}g_t^{-1/2})) \\
&= d\gamma^{-1}\Lambda_{\mathrm{tr}}(g_s^{-1/2}F_{A_t}(g_s^{-1/2}ag_s^{-1/2}g_t^{-1/2})g_s^{1/2}g_t^{1/2}) \\
&= d\gamma^{-1}\Lambda_{\mathrm{tr}}(F_{A_t}(g_s^{-1/2}ag_s^{-1/2})) = \Lambda_{\mathrm{tr}}(E_{A_t}(a)).
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que $E_{B_t}(f_b)$ vaut $d^2\gamma^{-2}$.

PROPOSITION. *L'algèbre $A.B$ est l'extension de Jones de $A_t \subset A$ représentée sur $L^2(A, \mathrm{tr}_a)$. Le projecteur de Jones est $f_b = d\gamma^{-1}\widehat{g}_t^{-1/2}p_b\widehat{g}_t^{-1/2}$ avec $E_{B_t}(f_b) = d^2\gamma^{-2}$.*

6.4.7. TRACE DE MARKOV.

PROPOSITION. *La trace* tr *est la trace de Markov normalisée de l'inclusion $A_t \overset{E_{A_t}}{\subset} A$ dont l'indice est $d^{-2}\gamma^2$. C'est aussi la trace de Markov de l'inclusion $A \overset{E_A}{\subset} A.B$.*

Démonstration. Comme l'inclusion $A_t \subset A$ est connexe, il existe une unique trace de Markov dont le module est l'indice de l'inclusion ([7], 2.7.3). D'après 6.4.2 et 6.4.6, on a pour tout x de A_t:

$$\mathrm{tr}([x \otimes f_b] = \mathrm{tr}(E_{B_t}(f_b) \triangleright x) = d^2\gamma^{-2}\mathrm{tr}([x \otimes 1_b]).$$

On en déduit que tr est la trace de Markov de module $\beta = d^{-2}\gamma^2$ ([7], 2.7.1). D'après 2.7.4 dans [7], tr est aussi la trace de l'inclusion $A \overset{E_A}{\subset} A.B$. ∎

6.5. L'INCLUSION $M_1 \subset M_2$.

6.5.1. CONSTRUCTION DE $M_1 \subset M_2$. Comme le carré $\mathcal{C}$ est un carré commutatif symétrique (6.4.2) pour les espérances conditionnelles associées à la trace de Markov de l'inclusion $A \subset A.B$, il vérifie le corollaire 5.3.4 de [9]: La trace tr est aussi la trace de Markov des inclusions $A_s \subset A$, $B_t \subset B$ et $B \subset A.B$ et on obtient par construction de base une échelle périodique de carrés commutatifs (voir aussi 5.3.5 de [9]) qu'on peut préciser grâce à 2.8.1:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_0 = A & \subset & A_1 = A \rtimes B & \subset & A_2 = A \rtimes B \rtimes A & \subset & A_3 = A \rtimes B \rtimes A \rtimes B & \cdots \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup & \\ B_0 = B_t & \subset & B_1 = B & \subset & B_2 = B \rtimes A & \subset & B_3 = B \rtimes A \rtimes B & \cdots \end{array}$$

A la limite, on obtient une paire $M_1 \subset M_2$ de facteurs hyperfinis de type II_1: M_2 (respectivement M_1) est la fermeture faible de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (respectivement $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$) dans la construction GNS par rapport à la trace tr qui se prolonge.

6.5.2. De plus d'après 5.7.1 de [9], le commutant relatif $M_1' \cap M_2$ est $B' \cap A$. On en déduit la proposition suivante:

PROPOSITION. *Le commutant relatif $M_1' \cap M_2$ est l'algèbre A_t contenue dans $A = A_0$.*

Démonstration. Le calcul suivant montre que les éléments de A_t commutent à B. Soient $x \in A_t$ et $b \in B$, alors on a:

$$[1_a \otimes b][x \otimes 1_b] = [x_{(1)} \otimes b \triangleleft x_{(2)}].$$

Grâce à 2.4, on en déduit: $[1_a \otimes b][x \otimes 1_b] = [x1_{a(1)} \otimes b \triangleleft 1_{a(2)}] = [x \otimes (1_b \triangleleft 1_{a(1)})(b \triangleleft 1_{a(2)})] = [x \otimes b \triangleleft 1_a] = [x \otimes 1_b][1_a \otimes b]$. D'autre part, si un élément x de A commute à B, il commute à f_b et on a:

$$xf_b = E_{A_t}(x)f_b.$$

Or d'après 2.6.7 (iii) de [7], pour tout y de $A.B$, il existe un unique z dans A tel que $yf_b = zf_b$. On obtient donc l'égalité $x = E_{A_t}(x)$ et x appartient à A_t. ∎

6.6. ACTION DE A SUR M_1.

6.6.1. Comme en 6.2 et en 5.6 de [11], on peut transformer les produits croisés à gauche en produits croisés à droite et obtenir l'échelle de carrés commutatifs suivante isomorphe à celle considérée en 6.5.1:

$$\begin{array}{ccccccccccc} A & \subset & A \ltimes B & \subset & A \ltimes B \ltimes A & \subset & A \ltimes B \ltimes A \ltimes B & \cdots & \subset & M_2 \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & & \cup \\ B_t & \subset & B & \subset & B \ltimes A & \subset & B \ltimes A \ltimes B & \cdots & \subset & M_1 \end{array}.$$

6.6.2. Nous généralisons maintenant la proposition 5.7 de [11].

PROPOSITION. *Soient $i_a : a \mapsto [a \otimes 1_b \otimes 1_a \otimes \cdots]$ l'inclusion de A dans M_2 et E_{M_1} l'espérance conditionnelle de M_2 sur M_1 conservant la trace* tr. *Posons*

$$f_a = d\gamma^{-1} g_s^{-1/2} p_a g_s^{-1/2}.$$

L'application de $M_1 \times A$ dans M_1

$$x \triangleleft a = d^{-2}\gamma^2 E_{M_1}(i_a(g_s^{-1/2} f_a g_s^{1/2}) x i_a(a)) \quad x \in M_1, a \in A$$

définit une action extérieure à droite de A sur M_1 telle que $M_2 = A \ltimes M_1$.

Démonstration. Notons $x = [b \otimes z]$ un élément de B_n avec $b \in B$ et abusivement $z \in A_{n-1}$. L'élément x vu dans $A_n \subset M_2$ s'écrit $[1_a \otimes b \otimes z]$ et $[1_a \otimes 1_b \otimes z]$ commute avec A_0. Observons l'action de A sur x:

$$\begin{aligned}
x \triangleleft a &= d^{-1}\gamma E_{M_1}(i_a(g_s^{-1} p_a) x i_a(a)) = d^{-1}\gamma E_{M_1}([g_s^{-1} p_a \otimes b \otimes 1][a \otimes 1_b \otimes z]) \\
&= d^{-1}\gamma E_{M_1}([g_s^{-1} p_a a_{(1)} \otimes b \triangleleft a_{(2)} \otimes z]) \\
&= d^{-1}\gamma E_{M_1}([g_s^{-1} p_a \varepsilon_s(a_{(1)}) \otimes b \triangleleft a_{(2)} \otimes z]) \qquad \text{(d'après 2.3)} \\
&= d^{-1}\gamma E_{M_1}([g_s^{-1} p_a \otimes (1_b \triangleleft \varepsilon_s(a_{(1)}))(b \triangleleft a_{(2)}) \otimes z]) \\
&= d^{-1}\gamma E_{M_1}([g_s^{-1} p_a \otimes (1_b \triangleleft a_{(1)})(b \triangleleft a_{(2)}) \otimes z]) \\
&= d^{-1}\gamma E_{M_1}([g_s^{-1} p_a \otimes b \triangleleft a \otimes z]).
\end{aligned}$$

Le carré $\begin{array}{ccc} A_n & \subset & M_2 \\ \cup & & \cup \\ B_n & \subset & M_1 \end{array}$ muni des espérances conditionnelles conservant tr est commutatif, on en déduit $x \triangleleft a = d^{-1}\gamma E_{B_n}([g_s^{-1} p_a \otimes b \triangleleft a \otimes z]) = d^{-1}\gamma[(1_b \triangleleft E_{A_s}(g_s^{-1} p_a))(b \triangleleft a) \otimes z] = [b \triangleleft a \otimes z]$. En effet d'après 6.3.3 et 6.4.2, on a:

$$\begin{aligned}
E_{A_s}(g_s^{-1} p_a) &= d\gamma^{-1} g_s^{-1} F_{A_s}(p_a g_t^{-1}) = d\gamma^{-1} g_s^{-1} F_{A_s}(p_a g_s^{-1}) \\
&= d\gamma^{-1} g_s^{-1} F_{A_s}(p_a) g_s^{-1} = d\gamma^{-1}.
\end{aligned}$$

L'application $x \mapsto x \triangleleft a$ prolonge donc l'action duale $[b \otimes z] \mapsto [b \triangleleft a \otimes z]$ de A sur $B_n = B \ltimes A_{n-1}$. Elle définit une action à droite faiblement continue de A sur M_1. De plus $A \ltimes M_1 = i_a(A) M_1$ est le facteur M_2. L'action est extérieure d'après 2.8.2 et 6.5.2. ∎

6.7. CONCLUSION. On a donc montré que le C*-groupoïde quantique connexe fini A agit extérieurement sur le facteur hyperfini de type II_1. On peut voir A comme le commutant relatif d'une inclusion en complétant l'échelle de carrés commutatifs:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
B & \subset & B \ltimes A & \subset & B \ltimes A \ltimes B & \subset & B \ltimes A \ltimes B \ltimes A & \cdots & \subset & M_1 \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & & \cup \\
B_s = A_t & \subset & A & \subset & A \ltimes B & \subset & A \ltimes B \ltimes A & \cdots & \subset & M_0
\end{array}$$

par construction de base verticale car le projecteur de Jones est, pour chaque colonne, $e_1 = f_a \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots$,

$$\begin{array}{ccccccccc} C_0 = A \ltimes B & \subset & C_1 = A \ltimes B \ltimes A & \subset & C_2 = A \ltimes B \ltimes A \ltimes B & \subset & \cdots & \subset & M_2 \\ \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\ B & \subset & B \ltimes A & \subset & B \ltimes A \ltimes B & \subset & \cdots & \subset & M_1 . \\ \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\ A_t & \subset & A & \subset & A \ltimes B & \subset & & \subset & M_0 \end{array}$$

Le facteur $M_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ est engendré comme algèbre de von Neumann par M_1 et e_1, de plus on vérifie facilement l'égalité $e_1 x e_1 = E_{M_0}(x)e_1$ pour tout x de M_1 puisqu'elle est vraie pour tout x de C_n et tout entier n. Alors d'après [17], la tour $M_0 \subset M_1 \overset{e_1}{\subset} M_2$ est standard et le carrelage de carrés commutatifs construit vérifie les hypothèses de la proposition 5.7.5.

On peut construire de même le facteur M_3 avec $e_2 = f_b \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots$. On démontre alors à l'aide du théorème 5.7.6 de [9] que A (respectivement B) est le commutant relatif $M_0' \cap M_2$ (respectivement $M_1' \cap M_3$). En effet, on a:

$$M_0' \cap M_2 = (1_a \otimes 1_b \otimes A)' \cap A \ltimes B \ltimes 1_a$$

et on conclut comme en 6.5.2.

On peut donc munir A et B en tant que commutants relatifs de structures duales de C^*-groupoïde quantique fini régulier. Quel rapport entre ces nouvelles structures et celles de départ qui n'étaient pas nécessairement régulières? Le calcul de la dualité héritée de l'inclusion $M_0 \subset M_1$ en fonction de la dualité originelle donne la formule qui sert pour la déformation explicitée dans la partie suivante. On en déduit qu'on peut déformer un C^*-groupoïde quantique fini en un C^*-groupoïde quantique fini régulier sans modifier la structure de C^*-algèbre.

7. DÉFORMATION RÉGULIÈRE D'UN C^*-GROUPOÏDE QUANTIQUE FINI

On considère deux C^*-groupoïdes quantiques finis A et B duaux. Le but de cette partie est de déformer la structure de co-algèbre de A (on peut bien sûr faire de même dans le même temps pour B) pour faire de A un C^*-groupoïde quantique fini régulier. Comme il ne sera question que de la structure de co-algèbre de A, on ommettra l'indice A. L'étude de la structure de co-algèbre de B est analogue.

7.1. ELÉMENTS SÉPARATEURS. D'après 2.3.4 de [15], $(S \otimes \mathrm{id}\,)(\Delta(1))$ est un élément séparateur de $A_t \otimes A_t$. Plus précisément, les relations utiles sont, pour z dans A_t:

$$\Delta(1)(S^{-1}(z) \otimes 1) = \Delta(1)(1 \otimes z), \quad (S^{-1}(z) \otimes 1)\Delta(1) = (1 \otimes z)\Delta(1).$$

Si $\{\lambda_i : i \in I\}$ est une famille d'unités matricielles de $A_t = \bigotimes_{j\in J} M_{\nu_j}(\mathbb{C})q_j$ telle que l'élément λ_i appartienne au facteur $M_{\nu_{j_i}}(\mathbb{C})q_{j_i}$, posons $q = \sum_{i\in I} \frac{1}{n_{j_i}} \lambda_i^* \otimes \lambda_i$. Alors $(S^{-1} \otimes \mathrm{id}\,)(q)$ vérifie aussi, pour z dans A_t:

$$(S^{-1} \otimes \mathrm{id}\,)(q)(S^{-1}(z) \otimes 1) = (S^{-1} \otimes \mathrm{id}\,)(q)(1 \otimes z),$$
$$(S^{-1}(z) \otimes 1)(S^{-1} \otimes \mathrm{id}\,)(q) = (1 \otimes z)(S^{-1} \otimes \mathrm{id}\,)(q).$$

7.2. PROPOSITION. *Il existe un élément k positif inversible de A_t tel que:*

(i) $k^2 = 1_{(2)}S(1_{(1)})$;

(ii) k^2 *soit la dérivée de Radon-Nikodym de la trace canonique de A_t par rapport à la restriction de la co-unité à A_t;*

(iii) $\Delta(1) = \Delta(1)(S^{-1} \otimes \mathrm{id}\,)(q)$;

(iv) $\Delta(1) = (1 \otimes k^2)(S^{-1} \otimes \mathrm{id}\,)(q)$;

(v) *la restriction de S^2 à A_sA_t est* Ad $(k^{-2}S(k^2))$; *en particulier $S^2(k)$ vaut k.*

Démonstration. Le début de l'énoncé est le lemme 4.6 de [4], la dernière se trouve dans des notes manuscrites de K. Szlachanyi.

D'après 7.1, on peut écrire $\Delta(1)(S^{-1} \otimes \mathrm{id}\,)(q) = \Delta(1)\Big(1 \otimes \sum_{i\in I} \frac{1}{n_{j_i}} \lambda_i^*\lambda_i\Big) = \Delta(1)$. On obtient donc (iii) et pour (iv), on écrit

$$\Delta(1) = \Delta(1)(S^{-1} \otimes \mathrm{id}\,)(q) = (1 \otimes 1_{(2)}S(1_{(1)}))(S^{-1} \otimes \mathrm{id}\,)(q).$$

On a aussi $\Delta(1) = (S^{-1}(k^2) \otimes 1)(S^{-1} \otimes \mathrm{id}\,)(q)$ et de $\Delta(1) = \Delta(1)^*$, on déduit l'égalité, pour tout i de I: $S^{-1}(\lambda_i k^2) = S^{-1}(\lambda_i^* k^2)^*$. Comme $S \circ *$ est involutive et que les λ_i engendrent A_t , pour tout z de A_t on a $S^{-1}(zk^2) = S(k^2z)$. On en déduit les deux égalités:

$$S^2(z) = k^{-2}zk^2, \quad S^2(S(z)) = S(k^2)S(z)S(k^{-2}).$$

Comme A_t et A_s commutent, on peut traduire les deux expressions de S^2 par (v). ∎

On trouve une proposition analogue dans [20].

7.3. NOUVELLE DUALITÉ ET DÉFORMATION DES CO-ALGÈBRES. On considère une nouvelle dualité entre A et B:

$$[a, b] = \langle kaS(k), b\rangle, \quad a \in A, b \in B,$$

et la structure de co-algèbre définie sur A par cette dualité:

$$\widetilde{\Delta}(a) = (1 \otimes k^{-1})\Delta(a)(1 \otimes k^{-1}),$$
$$\widetilde{\varepsilon}(a) = \varepsilon(kaS(k)) = \varepsilon(S(k)ak),$$
$$\widetilde{S}(a) = S(k^{-1})kS(a)k^{-1}S(k).$$

De plus, le projecteur $\widetilde{\Delta}(1)$ vaut $(\widetilde{S}^{-1} \otimes \mathrm{id}\,)(q)$.

THÉORÈME. *L'algèbre A munie de sa structure d'algèbre originelle et de cette nouvelle structure de co-algèbre est un C^*-groupoïde quantique fini régulier.*

Démonstration. Les nouveaux co-produit, co-unité et antipode étant définis par dualité, il suffit de vérifier les propriétés propres aux C^*-groupoïdes quantiques.

Vérifions que le nouveau co-produit est un homomorphisme d'algèbres involutives. D'après 7.2, pour tous x et y dans A, on a:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}(x)\widetilde{\Delta}(y) &= (1\otimes k^{-1})\Delta(x)(1\otimes k^{-2})\Delta(y)(1\otimes k^{-1})\\ &= (1\otimes k^{-1})\Delta(x)\Delta(1)(1\otimes k^{-2})\Delta(1)\Delta(y)(1\otimes k^{-1})\\ &= (1\otimes k^{-1})\Delta(x)\Delta(1)(S^{-1}\otimes \mathrm{id}\,)(q)\Delta(y)(1\otimes k^{-1}) = \widetilde{\Delta}(xy).\end{aligned}$$

L'égalité $\widetilde{\Delta}(x)^* = \widetilde{\Delta}(x^*)$ est évidente.

Le projecteur $\widetilde{\Delta(1)}$ vérifie l'égalité $(\widetilde{\Delta}\otimes 1)\widetilde{\Delta}(1) = (1\otimes\widetilde{\Delta}(1))(\widetilde{\Delta}(1)\otimes 1)$. En effet, comme k commute à A_s, on a:

$$\begin{aligned}&(1\otimes\widetilde{\Delta}(1))(\widetilde{\Delta}(1)\otimes 1)\\ &\qquad= (1\otimes 1\otimes k^{-1})(1\otimes\Delta(1))(1\otimes k^{-1}\otimes k^{-1})(\Delta(1)\otimes 1)(1\otimes k^{-1}\otimes 1)\\ &\qquad= (1\otimes k^{-1}\otimes k^{-1})(1\otimes\Delta(1))(\Delta(1)\otimes 1)(1\otimes k^{-1}\otimes k^{-1})\\ &\qquad= (1\otimes k^{-1}\otimes k^{-1})(\Delta\otimes \mathrm{id}\,)\Delta(1)(1\otimes k^{-1}\otimes k^{-1}) = (\widetilde{\Delta}\otimes 1)\widetilde{\Delta}(1).\end{aligned}$$

On pose $\widetilde{\Delta}(y) = \widetilde{y}_{(1)}\otimes\widetilde{y}_{(2)}$ et on démontre sans problème la relation $\widetilde{\varepsilon}(xyz) = \widetilde{\varepsilon}(x\widetilde{y}_{(1)})\widetilde{\varepsilon}(\widetilde{y}_{(2)}z), (x,y,z)\in A^3$. Vérifions maintenant la relation entre $\widetilde{\Delta}$, $\widetilde{\varepsilon}$ et $\widetilde{S}$ pour a dans A:

$$\begin{aligned}(\widetilde{\varepsilon}\otimes \mathrm{id}\,)(\widetilde{\Delta}(1)(a\otimes 1)) &= (\varepsilon\otimes \mathrm{id}\,)((S(k)\otimes k^{-1})\Delta(1)(ak\otimes k^{-1}))\\ &= (\varepsilon\otimes \mathrm{id}\,)(\Delta(1)(ak\otimes 1)k^{-1}\quad \text{(d'après 7.1)}\\ &= m(\mathrm{id}\otimes S)(\Delta(ak))k^{-1} = a_{(1)}kS(a_{(2)})k^{-1} = \widetilde{a}_{(1)}S(k^2)\widetilde{S}(\widetilde{a}_{(2)}).\end{aligned}$$

On a donc montré pour a dans A:

$$(\widetilde{\varepsilon}\otimes \mathrm{id}\,)(\widetilde{\Delta}(1)(a\otimes 1) = \widetilde{a}_{(1)}S(k^2)\widetilde{S}(\widetilde{a}_{(2)}).$$

On écrit cette relation pour l'unité: $1 = (\widetilde{\varepsilon}\otimes \mathrm{id}\,)(\widetilde{\Delta}(1)) = \widetilde{1}_{(1)}S(k^2)\widetilde{S}(\widetilde{1}_{(2)})$. Or $\widetilde{a}_{(1)}S(k^2)\widetilde{S}(\widetilde{a}_{(2)})$ vaut $\widetilde{a}_{(1)}\widetilde{1}_{(1)}S(k^2)\widetilde{S}(\widetilde{1}_{(2)})\widetilde{S}(\widetilde{a}_{(2)})$, on obtient donc

$$(\widetilde{\varepsilon}\otimes \mathrm{id}\,)(\widetilde{\Delta}(1)(a\otimes 1)) = m(\mathrm{id}\otimes\widetilde{S})(\widetilde{\Delta}(a)).$$

L'involutivité de $\widetilde{S}$ sur les sous-algèbres co-unitales est évidente. ∎

On peut donc déformer toute paire de C^*-groupoïdes quantiques finis en une paire de C^*-groupoïdes quantiques finis réguliers sans modifier la structure de C^*-algèbre.

RÉFÉRENCES

[1] D. BISCH, Bimodules, higher relative commutants and the fusion algebra associated to a subfactor, in *Operator Algebras and their Applications (Waterloo, ON, 1994/1995)*, Fields Inst. Commun., vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI 1997, pp. 13–63.

[2] G. BÖHM, F. NILL, K. SZLACHÁNYI, Weak Hopf algebras. I. Integral theory and C^*-structure, *J. Algebra* **221**(1999), 385–438.

[3] G. BÖHM, K. SZLACHANYI, A coassociative C^*-quantum group with non-integral dimensions, *Lett. Math. Phys.* **35**(1996), 437–456.

[4] G. BÖHM, K. SZLACHÁNYI, Weak Hopf algebras. II. Representation theory, dimension and the Markov trace, *J. Algebra* **233**(2000), 156–212.

[5] M.-C. DAVID, Paragroupe d'Adrian Ocneanu et algèbre de Kac, *Pacific J. Math.* **172**(1996), pages .

[6] M.-C. DAVID, Couple assorti de systèmes de Kac et inclusions de facteurs de type II_1, *J. Funct. Anal.* **159**(1998), 1–42.

[7] F.M. GOODMAN, P. DE LA HARPE, V.F.R. JONES, *Coxeter Graphs and Towers of Algebras*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 14, Springer, New York year.

[8] V. JONES, Index for subfactors, *Invent. Math.* **72**(1983), 1–25.

[9] V. JONES, V.S. SUNDER, *Introduction to Subfactors*, London Math. Soc. Lecture Notes Ser., vol. 234, Cambridge Univ. Press, Cambridge year.

[10] R. LONGO, A duality for Hopf algebras and subfactors. I, *Comm. Math. Phys.* **159**(1994), 133–150.

[11] D. NIKSHYCH, Duality for action of weak Kac algebras and crossed product inclusions of II_1 factors, *J. Operator Theory* **46**(2001), 635–655.

[12] F. NILL, K. SZLACHÁNYI, H.-W. WIESBROCK, Weak Hopf algebras and reducible Jones inclusions of depth 2. I: From crossed products to Jones towers, *prépublication math.QA/9806130 (1998).*

[13] D. NIKSHYCH, L. VAINERMAN, A characterisation of depth 2 subfactors of II_1factors, *J. Funct. Anal.* **171**(2000), 278–307.

[14] D. NIKSHYCH, L. VAINERMAN, A Galois correspondence for II_1 factors and quantum groupoids, *J. Funct. Anal.* **178**(2000), 113–142.

[15] D. NIKSHYCH, L. VAINERMAN, Finite quantum groupoids and their applications, in *New Directions in Hopf Algebras*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 43, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2002, pp. 211–262.

[16] M. PIMSNER, S. POPA, Entropy and index for subfactors, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **19**(1986), 57–106.

[17] M. PIMSNER, S. POPA, Iterating the basic construction, *Trans. Amer. Math. Soc.* **310**(1988), 127–134.

[18] W. SZYMANSKI, Finite index subfactors and Hopf algebras crossed products, *Proc. Amer. Math. Soc.* **120**(1994), 519–528.

[19] J.-M. VALLIN, Groupoïdes quantiques finis, *J. Algebra* **239**(2001), 215–261.

[20] J.-M. VALLIN, Deformation of finite dimensional C^*-Quantum Groupoids, math.QA/0310265.

[21] Y.WATATANI, Index for C^*-subalgebras, *Mem. Amer. Math. Soc.* **424**(1990).

MARIE-CLAUDE DAVID, MATHÉMATIQUE, BÂT. 425, UNIVERSITÉ PARIS-SUD, F-91405 ORSAY CEDEX, FRANCE

E-mail address: mcld@math.u-psud.fr

Received June 14, 2003.