J. OPERATOR THEORY
91:2(2024), 323–333
doi: 10.7900/jot.2023nov13.2451

OPÉRATEURS HYPOFERMÉS

JACQUES DIXMIER

Communicated by Stefaan Vaes

ABSTRACT. Range spaces of bounded linear operators between Hilbert spaces, as well as linear operators between Hilbert spaces, whose graph is a bounded linear range of some Hilbert space, were systematically studied in an early paper. Here extensions of the above topics to the framework of general Banach spaces are discussed. A hypoclosed linear subspace of a Banach space is the range space of a bounded linear operator defined on some Banach space, while a hypoclosed linear operator is a linear operator between Banach spaces, whose graph is hypoclosed. Characterizations, permanence properties, pathologies are presented, and several significant differences to the Hilbert space case are emphasized.

KEYWORDS: *Sous-espaces hypofermés, présentation d'un sous-espace hypofermé, homomorphismes hypofermés.*

MSC (2020): 47A05, 47B01.

INTRODUCTION

Dans le mémoire [6], j'ai étudié les "variétés de Julia" (les images d'opérateurs continus $H_1 \to H_2$, où H_1, H_2 sont des espaces hilbertiens) et les "opérateurs de Julia" (les opérateurs entre espaces hilbertiens dont le graphe est une variété de Julia). Soixante-quinze ans plus tard, je tente de généraliser cette étude aux espaces de Banach. Le rapporteur (que je remercie pour une foule d'améliorations, notamment pour les énoncés 1 et 3 de la proposition 3.8) m'a appris que, durant ces soixante-quinze ans, plusieurs mémoires ont été publiés sur ce sujet (cf. notamment [7], [8], [9]). J'ai maintenu, pour des raisons de cohérence, mon plan initial (en insérant, bien entendu, les références nécessaires) et ma terminologie, bien que le mot français "hypofermé" ne corresponde pas exactement aux termes "paraclosed" et "semiclosed".

J'appelle donc *hypofermé* un sous-espace image d'un opérateur continu $E_1 \to E_2$ (E_1, E_2 espaces de Banach) et opérateur hypofermé un opérateur entre espaces de Banach, peut-être non partout défini, dont le graphe est un sous-espace hypofermé. Les produits, les sommes d'opérateurs hypofermés sont hypofermés, et tout opérateur hypofermé est produit de deux opérateurs fermés. Il s'agit donc de l'extension minimale de la notion d'opérateur fermé ayant les propriétés souhaitables de stabilité.

NOTATIONS. Pour toute application φ d'un ensemble dans un ensemble, on note $\mathrm{Df}(\varphi)$ l'ensemble de définition de φ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ son image. L'application identique d'un ensemble E est notée 1_E. La composée de deux applications se note tantôt $\varphi \circ \psi$, tantôt $\varphi\,\psi$.

Comme il s'agit presque exclusivement d'espaces vectoriels, *sous-espace* signifie sous-espace vectoriel. Les termes *homomorphisme* et *application linéaire* sont synonymes. On rappelle que, si E_1, E_2 sont des espaces vectoriels topologiques, $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ est l'ensemble des homomorphismes continus de E_1 dans E_2. "Théorème du graphe fermé" sera abrégé TGF.

1. LES SOUS-ESPACES HYPOFERMÉS

1.1. LEMME (CF. [5], PROP. 2.1). *Soient E un espace de Banach, F un sous-espace de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Il existe un espace de Banach E_1 et un $u \in \mathcal{L}(E_1, E)$ tels que* $\mathrm{Im}(u) = F$.

(a′) *Comme dans (a), avec u injectif.*

(b) *Il existe un espace de Banach E_1 et un homomorphisme fermé u avec* $\mathrm{Df}(u) = F$ *et* $\mathrm{Im}(u) \subset E_1$.

(b′) *Comme dans (b), avec u injectif.*

(c) *Il existe un espace de Banach E_1 et un homomorphisme fermé u avec* $\mathrm{Df}(u) \subset E_1$ *et* $\mathrm{Im}(u) = F$.

(c′) *Comme dans (c), avec u injectif.*

(d) *Il existe un espace de Banach E_1 et un sous-espace fermé G de $E \oplus E_1$ tels que $p(G) = F$, où $p : E \oplus E_1 \to E$ est la projection canonique.*

(d′) *Comme dans (d), avec $G \cap E = G \cap E_1 = 0$.*

Preuve. Les implications b′ ⇒ c′ ⇒ d′ ⇒ a′ ⇒ b′ sont évidentes (c′ ⇒ d′ par considération du graphe de u).

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & b' \arrow[r, Rightarrow] & b \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
a' \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & d \arrow[r, Rightarrow] & a \\
 & c' \arrow[r, Rightarrow] & c \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

a′ ⇒ b′, a′ ⇒ c′ résultent de A), b′ ⇒ b, c′ ⇒ c, d ⇒ a sont évidents, b ⇒ d, c ⇒ d par considération des graphes.

Enfin, prouvons a ⇒ a′. Soient E, u comme dans a. Soient $K = \mathrm{Ker}(u)$, E_1 l'espace de Banach E/K, et $\widetilde{u} : E_1 \to F$ déduit de u par passage au quotient. Alors $\widetilde{u} \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $\mathrm{Im}(\widetilde{u}) = F$ et $\widetilde{u}$ est injectif. ∎

1.2. DÉFINITION. Un sous-espace F d'un espace de Banach E est dit *hypofermé* si les conditions de 1.1 sont vérifiées.

Un sous-espace fermé est hypofermé.

1.3. EXEMPLES.

a) ℓ^p est un sous-espace hypofermé de ℓ^q si $1 \leqslant p \leqslant q$.

b) $L^p(0,1)$ est un sous-espace hypofermé de $L^q(0,1)$ si $p \geqslant q \geqslant 1$.

1.4. LEMME. *Soient E, F, G des espaces de Banach, $u \in \mathcal{L}(E,G)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$:*

$$E \xrightarrow{u} G \xleftarrow{v} F \ .$$

(i) *Si u est injectif et* $\mathrm{Im}(u) \supset \mathrm{Im}(v)$, *$u^{-1}v$ est continu.*

(ii) *Si u et v sont injectifs et* $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(v)$, *$u^{-1}v$ est bicontinu.*

Preuve. Supposons u injectif et $\mathrm{Im}(u) \supset \mathrm{Im}(v)$. Alors $u^{-1}v$ est défini dans F. Soient $x_1, x_2, \dots \in F$, $y_i = u^{-1}(v(x_i))$, et supposons $x_n \to x$, $y_n \to y$. On a $u\,y_n = v\,x_n$, donc à la limite $uy = vx$, $y = u^{-1}(v(x))$. Donc $u^{-1}v$ est fermé. D'après TGF, $u^{-1}v$ est continu. Cela prouve (i), et (ii) résulte de (i). ∎

1.5. DÉFINITION. Soient E un espace de Banach, H un sous-espace hypofermé de E. On appelle *présentation* de H un couple (F, u), où F est un espace de Banach, où $u \in \mathcal{L}(F, E)$ est injectif, et où $\mathrm{Im}(u) = H$.

1.6. Toutes les présentations de H sont équivalentes, au sens suivant : si (F_1, u_1) et (F_2, u_2) sont des présentations de H, il existe un isomorphisme bicontinu de F_1 sur F_2 qui transforme u_1 en u_2. Cela résulte de 1.4 (ii).

1.7. PROPOSITION. *Soient E_1, E_2 des espaces de Banach, $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, H un sous-espace hypofermé de E_1. Alors $u(H)$ est hypofermé dans E_2.*

Preuve. En effet, soit (E, v) une présentation de H. Alors $u \circ v \in \mathcal{L}(E, E_2)$ et $\mathrm{Im}(u \circ v) = u(v(E)) = u(H)$. ∎

1.8. Soient E, F, G des espaces vectoriels, $u : E \to G$ et $v : F \to G$ des applications linéaires. A partir de ces données, on construit classiquement le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& & E \arrow[dr, "u"] & \\
H \arrow[r, "r"] & E \oplus F \arrow[ur, "p"] \arrow[rr, "w"] \arrow[dr, "q"'] & & G \\
& & F \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

où : p, q sont les projections canoniques ;
w est l'application $(e, f) \mapsto u(e) + v(f)$;
H est l'ensemble des $(e, f) \in E \oplus F$ tels que $u(e) = v(f)$;
r est l'injection canonique de H dans $E \oplus F$.

Alors :

(i) L'application $u \circ p \circ r = v \circ q \circ r$ de H dans G a pour image $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)$.

(ii) $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(w)$.

(iii) $\mathrm{Im}(p \circ r) = u^{-1}(v(F)), \mathrm{Im}(q \circ r) = v^{-1}(u(F))$.

Les preuves, purement algébriques, sont laissées au lecteur.

1.9. PROPOSITION (CF. [5], PROP. 2.2). *Soient G un espace de Banach, F_1 et F_2 des sous-espaces hypofermés de G. Alors $F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2$ sont hypofermés.*

Preuve. Soit (E_1, u_1) (resp. (E_2, u_2)) une présentation de F_1 (resp. F_2) dans G. Appliquons 1.8 avec $E = E_1$, $F = E_2$, $u = u_1$, $v = u_2$. Les applications r, p, q, w sont continues. Donc $F_1 \cap F_2$ et $F_1 + F_2$ sont hypofermés d'après 1.8 (i) et (ii). ∎

1.10. PROPOSITION. *Soient E_1, E_2 des espaces de Banach, $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, H un sous-espace hypofermé de E_2. Alors $u^{-1}(H)$ est hypofermé dans E_1.*

Preuve. Soit (E, v) une présentation de H dans E_2. On applique 1.8 aux deux applications $E \to E_2$, $E_1 \to E_2$. Alors la proposition résulte de 1.8 (iii). ∎

1.11. PROBLÈME 1. Tout sous-espace hypofermé de E peut-il s'obtenir à partir des sous-espaces fermés de E par un nombre fini d'opérations $+$ et $\cap$?

Toute variété de Julia s'écrit $(V_1 + V_2) \cap (V_3 + V_4)$ où les V_i sont des sous-espaces fermés (cf. [6], pp. 46-47, au prix de quelques raisonnements supplémentaires).

1.12. PROPOSITION (CF. [5], TH. 2.4). *Soient E un espace de Banach, F_1 et F_2 des sous-espaces hypofermés de E tels que $F_1 \cap F_2 = 0$. Si $F_1 + F_2$ est fermé, F_1 et F_2 sont fermés.*

Preuve. Soient (G_1, u_1), (G_2, u_2) des présentations de F_1, F_2. Soit $u \in \mathcal{L}(G_1 \oplus G_2, E)$ tel que $u((x_1, x_2)) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$. Comme $F_1 \cap F_2 = 0$, u est injectif d'image $F_1 + F_2$, qui est fermé. D'après TGF, u est bicontinu, donc u_1 et u_2 sont bicontinus, donc F_1 et F_2 sont fermés. ∎

1.13. REMARQUE. Si l'hypothèse $F_1 \cap F_2 = 0$ est supprimée, la conclusion peut être en défaut.

1.14. COROLLAIRE. *Soient E un espace de Banach, F un sous-espace hypofermé de E de codimension algébrique finie dans E. Alors F est fermé.*

Preuve. Soit G un supplémentaire, de dimension finie, de F dans E. On a $F \cap G = 0$, $F + G = E$, donc F est fermé d'après 1.12. ∎

2. LES HOMORPHISMES HYPOFERMÉS

2.1. DÉFINITION. Soient E, E_1 des espaces de Banach, u une application linéaire telle que $\mathrm{Df}(u) \subset E$, $\mathrm{Im}(u) \subset E_1$. On dit que u est *hypofermé* si son graphe dans $E \oplus E_1$ est hypofermé.

Un homomorphisme fermé est hypofermé.

Dans [4] sont définis les "semi-closed operators". Les théorèmes 2.4 et et 2.7 ci-après montrent qu'il s'agit de la même notion.

2.2. Soit F un sous-espace hypofermé d'un espace de Banach. Alors 1_E est hypofermé.

2.3. PROPOSITION. *Soient E, E_1, u comme dans 2.1, avec u hypofermé.*

(i) $\mathrm{Df}(u)$ *et* $\mathrm{Im}(u)$ *sont hypofermés.*

(ii) *Si de plus u est injectif, u^{-1} est hypofermé.*

Preuve. Soit $G \subset E \oplus E_1$ le graphe de u. Il existe un espace de Banach E_2 et un sous-espace fermé H de $E \oplus E_1 \oplus E_2$ tels que $G = p(H)$, où $p : E \oplus E_1 \oplus E_2 \to E \oplus E_1$ est la projection canonique. On a $\mathrm{Df}(u) = q(H)$ et $\mathrm{Im}(u) = q'(H)$ où $q : E \oplus E_1 \oplus E_2 \to E$ et $q' : E \oplus E_1 \oplus E_2 \to E_1$ sont les projections canoniques. Cela prouve (i). Si u est injectif, le graphe de u^{-1} dans $E_1 \oplus E$ est l'image de G par l'application canonique $E \oplus E_1 \to E_1 \oplus E$. ∎

2.4. THÉORÈME. *Soient E_1, E_2, E_3 des espaces de Banach, u et v des homomorphismes hypofermés où* $\mathrm{Df}(u) \subset E_1$, $\mathrm{Im}(u) \subset E_2$, $\mathrm{Df}(v) \subset E_2$, $\mathrm{Im}(v) \subset E_3$. *Alors vu est hypofermé.*

Preuve. Soient $G \subset E_1 \oplus E_2$, $H \subset E_2 \oplus E_3$ les graphes de u, v. On identifie $E_1 \oplus E_2$ et $E_2 \oplus E_3$ à des sous-espaces de $(E_1 \oplus E_2) \oplus (E_2 \oplus E_3)$. Soit L l'ensemble des $(x_1, x_2, x_2, x_3) \in E_1 \oplus E_2 \oplus E_2 \oplus E_3$. Soit $M = L \cap (G + H) \subset E_1 \oplus E_2 \oplus E_2 \oplus E_3$. Soit $N = p(M)$ où p est la projection canonique de $E_1 \oplus E_2 \oplus E_2 \oplus E_3$ sur $E_1 \oplus E_3$.

Soit $(x_1, x_3) \in N$. Il existe $(y, z) \in E_2 \oplus E_2$ tel que $(x_1, y, z, x_3) \in M$. Alors $(x_1, y) \in G$, $y = z$, et $(z, x_3) \in H$ donc (x_1, x_3) appartient au graphe de vu. Ainsi,

N est contenu dans le graphe de vu, et l'inclusion inverse est encore plus facile. Ainsi, le graphe de vu est $N = p(M) = p(L \cap (G + H))$.

Or, L est fermé, G et H sont hypofermés, donc N est hypofermé d'après 1.9 et 1.7. ∎

2.5. COROLLAIRE. *Soient E_1, E_2 des espaces de Banach, u un homomorphisme hypofermé avec* $\mathrm{Df}(u) \subset E$, $\mathrm{Im}(u) \subset E_1$. *Soit F un sous-espace hypofermé de E contenu dans* $\mathrm{Df}(u)$. *Alors la restriction de u à F est hypofermée.*

En effet, cette restriction est $u \circ 1_F$.

2.6. LEMME. *Soient E, E_1 des espaces de Banach, u un homomorphisme hypofermé avec* $\mathrm{Df}(u) \subset E$, $\mathrm{Im}(u) \subset E_1$. *Soient F un espace de Banach et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que* $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Df}(u)$. *Alors uv est continu.*

Preuve. Soient G le graphe de u, $p : G \to E$ et $p_1 : G \to E_1$ les applications canoniques.

$$\begin{tikzcd}
& & H \arrow[d, "w"] & \\
& & G \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\
F \arrow[r, "v"] & E \arrow[rr, "u"'] & & E_1
\end{tikzcd}$$

Soit (H, w) une présentation de G. On a

$$u = (p_1 \circ w) \circ (p \circ w)^{-1}$$

donc

$$uv = (p_1 \circ w) \circ (p \circ w)^{-1} \circ v\,. \leqslant no(*)$$

Or, $p \circ w$ est un homomorphisme continu injectif de H dans E, tel que $\mathrm{Im}(p \circ w) = p(w(H)) = p(G) = \mathrm{Df}(u) = \mathrm{Im}\, v$. D'après 1.4 (i), $(p \circ w)^{-1} \circ v : F \to H$ est continu. Comme $p_1 \circ w$ est continu, le lemme résulte de $(*)$. ∎

2.7. THÉORÈME. *Soient E, E_1 des espaces de Banach, u un homomorphisme hypofermé avec* $\mathrm{Df}(u) \subset E$, $\mathrm{Im}(u) \subset E_1$. *Il existe un espace de Banach F, $v \in \mathcal{L}(F, E)$, $v_1 \in \mathcal{L}(F, E_1)$ tels que v soit injectif* $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Df}(u)$, $\mathrm{Im}(v_1) = \mathrm{Im}(u)$, *et $u = v_1 v^{-1}$.*

Preuve. Soit (F, v) une présentation de $\mathrm{Df}(u)$. D'après 2.6, $uv : F \to E_1$ est continu. On a $u = u(vv^{-1}) = (uv)v^{-1}$, d'où le théorème. ∎

2.8. THÉORÈME. *Soient E, E_1 des espaces de Banach, u un homomorphisme hypofermé tel que* $\mathrm{Df}(u) \subset E$, $\mathrm{Im}(u) \subset E_1$. *Si* $\mathrm{Df}(u)$ *est fermé, u est continu.*

Preuve. En effet, avec les notations de 2.7, l'homomorphisme v, dont l'image est fermée, est bicontinu d'après TGF. ∎

2.9. PROPOSITION. *Soient* E, E_1 *des espaces de Banach,* u *et* v *des homomorphismes hypofermés avec* $\mathrm{Df}(u) \subset E$*,* $\mathrm{Df}(v) \subset E$*,* $\mathrm{Im}(u) \subset E_1$*,* $\mathrm{Im}(v) \subset E_1$*. Alors* $u + v$ *est hypofermé.*

Preuve. On a $\mathrm{Df}(u+v) = \mathrm{Df}(u) \cap \mathrm{Df}(v)$, donc $\mathrm{Df}(u+v)$ est hypofermé (1.9). Soient $\widetilde{u}, \widetilde{v}$ les restrictions de u, v à $\mathrm{Df}(u+v)$. Alors $\widetilde{u}$ et $\widetilde{v}$ sont hypofermés (2.5), et $u + v = \widetilde{u} + \widetilde{v}$. On peut donc supposer désormais que $\mathrm{Df}(u) = \mathrm{Df}(v) := D$. Soit (L, w) une présentation de D. D'après 2.6, $u \circ w \in \mathcal{L}(L, E)$, $v \circ w \in \mathcal{L}(L, E_1)$. Posons $t = (u + v) \circ w$. On a $t = (u \circ w) + (v \circ w) \in \mathcal{L}(F, E_1)$. Donc $u + v = t \circ w^{-1}$ est hypofermé (2.5). ∎

2.10. PROPOSITION. *Soient* E, E_1 *des espaces de Banach,* u *un homomorphisme hypofermé avec* $\mathrm{Df}(u) \subset E$*,* $\mathrm{Im}(u) \subset E_1$*.*

(i) *Si* F *est un sous-espace hypofermé de* E*,* $u(F)$ *est hypofermé dans* E_1*.*

(ii) *Si* G *est un sous-espace hypofermé de* E_1*,* $u^{-1}(G)$ *est hypofermé dans* E*.*

Preuve. Comme $F \cap \mathrm{Df}(u)$ est hypofermé (1.9) on est ramené au cas où $F \subset \mathrm{Df}(u)$. La restriction $\widetilde{u}$ de u à F est hypofermée (2.5). Alors $u(F) = \widetilde{u}(F) = \mathrm{Im}(\widetilde{u})$ est hypofermé.

On a $u = vw^{-}$ avec v, w continus et w injectif (2.7). Alors (ii) résulte de 1.7 et 1.8. ∎

2.11. Soient E, F des espaces de Banach, u une application linéaire (sans aucune hypothèse topologique) avec $\mathrm{Df}(u)$ dense dans E, $\mathrm{Im}(u) \subset F$. Soit E' (resp. F') l'espace de Banach dual de E (resp. F). Soit ${}^t u$ la transposée de u, avec $\mathrm{Df}({}^t u) \subset F'$, $\mathrm{Im}({}^t u) \subset E'$. On rappelle que le graphe de ${}^t u$ dans $F' \oplus E'$ est l'orthogonal du graphe de $-u$ dans $E \oplus F$. Donc, comme il est bien connu, ${}^t u$ est fermée.

2.12. LEMME. *Soient* E, F *des espaces de Banach,* u *une application linéaire avec* $\mathrm{Df}(u)$ *dense dans* E*,* $\mathrm{Im}(u) \subset F$*. On suppose que, pour tout hyperplan fermé* K *de* F*,* $u^{-1}(K)$ *est fermé. Alors* u *est continu.*

Preuve. Soit $f \in F'$ et montrons que $f \in \mathrm{Df}({}^t u)$. On peut supposer $f \neq 0$. Soit $K = \mathrm{Ker}(f)$, qui est un hyperplan fermé de F. Soit $H = u^{-1}(K)$ qui est fermé d'après l'hypothèse du lemme, et qui est de codimension $\leqslant 1$ dans E. Si $x \in H$, on a $u(x) \in K$, donc $f(u(x)) = 0$. Ainsi, la forme linéaire $y \mapsto \langle f, u(y) \rangle$ s'annule sur H, elle est donc continue. On a bien prouvé que $f \in \mathrm{Df}({}^t u)$. D'après 2.11 et TGF, ${}^t u$ est continue, donc u est continue. ∎

2.13. PROPOSITION. *Soient* E, F *des espaces de Banach,* u *une application linéaire avec* $\mathrm{Df}(u)$ *dense dans* E*,* $\mathrm{Im}(u) \subset F$*. On suppose que :*

1) u *est injective ;*

2) $\mathrm{Im}(u)$ *est hypofermé ;*

3) *pour tout sous-espace hypofermé* K *de* F*,* $u^{-1}(K)$ *est hypofermé dans* E*.*

Alors u est hypofermé.

Preuve. D'abord, $\mathrm{Df}(u) = u^{-1}(F)$ est hypofermé, et $\mathrm{Im}(u)$ est hypofermé par hypothèse. L'application u est une bijection de $\mathrm{Df}(u)$ sur $\mathrm{Im}(u)$.

Soit (E_1, u_1) (resp. (E_2, u_2)) une présentation de $\mathrm{Df}(u)$ (resp. $\mathrm{Im}(u)$). Dans le diagramme

$$E_1 \xrightarrow{u_1} \mathrm{Df}(u) \xrightarrow{u} \mathrm{Im}(u) \xleftarrow{u_1} E_2$$

toutes les applications sont bijectives.

Si H est un sous-espace hypofermé de E_2, $u_2(H)$ est hypofermé dans F (1.7), $u^{-1}(u_2(H))$ est hypofermé dans E par hypothèse, $u_1^{-1}(u^{-1}(u_2(H)))$ est hypofermé (1.10). D'après 2.12, $u_2^{-1} \circ u \circ u_1$ est continu, donc $u = u_2 \circ (u_2^{-1} \circ u \circ u_1) \circ u_1^{-1}$ est hypofermé (2.3). ∎

3. COMPLÉMENTS

3.1. DÉFINITIONS. Soient E un espace de Banach, H un sous-espace hypofermé de E, (F, u) une présentation de H. Alors H est dit :

1) *de type séparable* si F est séparable ;

2) *de type réflexif* si F est réflexif

3) *de type compact* si u est compact.

D'après 1.6, ces définitions sont indépendantes de la présentation choisie.

3.2. EXEMPLE. Si $1 < p < q$, ℓ^p est un sous-espace hypofermé de type séparable et de type réflexif de ℓ^q.

3.3. PROPOSITION. *Soient E un espace de Banach, H un sous-espace hypofermé de E de type séparable. Alors H est un espace lusinien et est borélien dans E, et il est maigre dans E sauf si $H = E$.*

Preuve. H est lusinien d'après [1], p. IX.62, prop. 11, et borélien dans E d'après [1], p. IX.67, Lemme 7. Si H est non maigre, $H - H$ est un voisinage de 0 ([1], p. IX.69, lemme 9), donc H est un voisinage de 0, donc $H = E$. ∎

3.4. REMARQUE. On donnera en 3.8 une caractérisation des sous-espaces hypofermés qui sont des ensembles F_σ. On verra alors que ceci n'est pas toujours le cas.

3.5. LEMME. *Soient E, F des espaces de Banach, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec u injectif, M un sous-espace fermé de F contenu dans* $\mathrm{Im}(u)$, *et $L = u^{-1}(M)$. Alors la restriction de u à L est un isomorphisme bicontinu de L sur M.*

Preuve. En effet, cette restriction est un homomorphisme continu injectif d'image fermée, donc bicontinu d'après TGF. ∎

3.6. PROPOSITION. *Soient E un espace de Banach, H un sous-espace hypofermé de type compact de E. Alors H ne contient aucun sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie de E.*

Preuve. Soient (F, u) une présentation de H, L un sous-espace fermé de E contenu dans H, $M = u^{-1}(L) \subset F$, $v : M \to L$ la restriction de u à M, B la boule unité fermée de M. D'après 3.5, $v(B)$ est un voisinage de 0 dans L.

D'après les hypothèses, u est compact, donc $v(B)$ est compact, donc L est localement compact. D'après [2], p. I.15, th. 3, L est de dimension finie. ∎

3.7. REMARQUE. Soient E un espace de Banach, H un sous-espace hypofermé qui ne contient aucun sous-espace fermé de dimension finie. Alors H n'est pas nécessairement de type compact ([12], cor. 1). Dans le cas hilbertien cependant, cette réciproque à 3.6 est vraie ([3], lemme 3.1).

3.8. PROPOSITION. *Soient E un espace de Banach, H un sous-espace hypofermé, (F, u) une présentation de H et B la boule unité fermée de F.*

1) *Pour que H soit un F_σ dans E, il faut et il suffit que l'adhérence de $u(B)$ dans E soit contenue dans H.*
2) *Si H est de type réflexif, alors H est un F_σ dans E.*
3) *Même si H est de type compact et de type séparable, H n'est pas toujours un F_σ dans E.*

Preuve. 1) Si l'adhérence F_0 de $u(B)$ dans E est contenue dans H, alors $H = \bigcup_{n=1}^{\infty}(nF_0)$ est un F_σ dans E.

Réciproquement si $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ où les sous-ensembles $F_n \subset E$ sont fermés, on a $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} u^{-1}(F_n)$ où les sous-ensembles $u^{-1}(F_n) \subset F$ sont fermés. Par le théorème de Baire ([1], p. IX.55, Th. 1), il existe un n tel que l'intérieur de $u^{-1}(F_n)$ est non vide. Prenons une boule ouverte de centre $f_0 \in F$ et rayon $r > 0$ contenue dans $u^{-1}(F_n)$. Le sous-ensemble $F_0 := r^{-1}(F_n - u(f_0))$ de H est alors fermé dans E et contient $u(B)$.

2) Supposons F réflexif. Alors B est faiblement compacte, donc $u(B)$ est faiblement compacte, donc faiblement fermée, donc fortement fermée dans E. Donc $H = u(B) \cup u(2B) \cup \cdots$ est un F_σ.

3) (Cf. [11], p. 70, Exemple 2) Soit $E = C([-1, 1])$ l'espace de Banach des fonctions continues sur l'intervalle $[-1, 1]$ muni de la norme sup $\|\cdot\|_\infty$. Soit $F = C^1([-1, 1])$ l'espace de Banach des fonctions de classe C^1 muni de la norme $\|f\|_{C^1} := \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$. Notons $u : F \to E$ l'inclusion et $H := u(F)$.

Alors F est séparable et par le théorème d'Arzelà-Ascoli ([1], p. X.19, Corollaire 3), u est compact. Pour démontrer que H n'est pas F_σ, d'après 1) il suffit de trouver un élément $f \in E \setminus H$ qui appartient à l'adhérence de $u(B)$ dans E. Définissons $f \in E$ par $f(s) = 0$ pour $s \in [-1, 0]$ et $f(s) = s$ pour $s \in [0, 1]$. Alors $f \in E \setminus H$ et f est la limite uniforme de la suite $f_n \in u(B)$ définie par $f_n(s) = 0$ pour $s \in [-1, 0]$, $f_n(s) = ns^2$ pour $s \in [0, (2n)^{-1}]$ et $f_n(s) = s - (4n)^{-1}$ pour $s \in [(2n)^{-1}, 1]$. ∎

3.9. PROBLÈME 2. D'après [11], p. 70, exercice 11.1, le sous-espace hypofermé de E considéré dans la preuve de la partie 3) de 3.8 est un sous-ensemble $F_{\sigma\delta}$ dans E. C'est alors une question naturelle si tout sous-espace hypofermé de type séparable dans un espace de Banach E est un sous-ensemble $F_{\sigma\delta}$ de E. Remarquons que d'après 3.3, c'est toujours un sous-ensemble borélien de E.

3.10. LEMME. *Soient E un espace de Banach et$x_1, x_2, \cdots \in E$. Il existe $u \in \mathcal{L}(\ell^2, E)$, u injectif, avec $x_i \in \mathrm{Im}(u)$ pour tout i.*

Preuve. On peut supposer $x_i \neq 0$ pour tout i. Soit $(e_1, e_2, \cdots)$ la base orthonormale canonique de ℓ^2. Soit v l'application linéaire qui transforme toute combinaison linéaire $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ en $v(x) = \Sigma\, 2^{-i} x_i / \|x_i\|$. Si $\|x\| \leqslant 1$, on a $\|v(x)\| \leqslant \Sigma\, 2^{-i} = 1$, donc v se prolonge en $w \in \mathcal{L}(\ell^2, E)$. Soient $K = \mathrm{Ker}(u)$, L le supplémentaire orthogonal de K dans ℓ^2, et $u = w \mid L$. Si L est de dimension finie, le lemme est évident. Sinon, L est isomorphe à ℓ^2. ∎

3.11. PROPOSITION. *Soit E un espace de Banach séparable de dimension infinie. Il existe un sous-espace hypofermé F de E partout dense dans E, avec $F \neq E$.*

Preuve. Si E est hilbertien, c'est évident, donc on suppose que E n'est pas topologiquement isomorphe à un espace hilbertien. Soit $x_1, x_2, \cdots$ une suite partout dense dans E. Soit $u \in \mathcal{L}(\ell^2, E)$, injectif, d'image F, tel que $x_i \in F$ pour tout i (lemme 3.10). Alors F est hypofermé et partout dense dans E. Si $F = E$, E est topologiquement isomorphe à ℓ^2 d'après TGF, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $F \neq E$. ∎

3.12. PROBLÈME 3. Soient E un espace de Banach, H_1 et H_2 des sous-espaces hypofermés non fermés de E. Existe-t-il un automorphisme bicontinu u de E tel que $H_1 \cap u(H_2) = 0$?

Pour des résultats positifs partiels, cf. [6], lemme 8.3, et [10], 3.1.

RÉFÉRENCES

[1] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Chapitres 5 à 10, Hermann, Paris 1974.

[2] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, Chapitres 1 à 5, Masson, Paris 1981.

[3] J.W. CALKIN, Abstract symmetric boundary conditions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **46**(1939), 369–442.

[4] S.B. CARADUS, Semiclosed operators, *Pacific J. Math.* **44**(1973), 75–79.

[5] R.W. CROSS, On the continuous linear image of a Banach space, *J. Austral. Math. Soc. (Ser. A)* **29**(1980), 219–234.

[6] J. DIXMIER, Etude sur les variétés et les opérateurs de Julia, avec quelques applications, *Bull. Soc. Math. France* **77**(1949), 11–101.

[7] R.G. DOUGLAS, C. FOIAŞ, Infinite dimensional version of a theorem of Brickman–Fillmore, *Indiana Univ. Math. J.* **25**(1976), 315–320.

[8] P.A. FILLMORE, J.P. WILLIAMS, On operator ranges, *Adv. in Math.* **7**(1971), 254–281.

[9] C. FOIAŞ, Invariant para-closed subspaces, *Indiana Univ. Math. J.* **21**(1972), 887–906.

[10] M. JIMENEZ-SEVILLA, S. LAJARA, Operator ranges in Banach spaces with weak star separable dual, *J. Math. Anal. Appl.* **531**(2024), no 2, Paper No 127881, 21 pp.

[11] A.S. KECHRIS, *Classical Descriptive Set Theory*, Grad. Texts in Math., vol. 156, Springer-Verlag, Berlin 1995.

[12] E. TARAFDAR, A note on the bounded linear operators on the spaces ℓ^p and L_p, *J. Math. Anal. Appl.* **40**(1972), 683–686.

JACQUES DIXMIER, 11BIS RUE DU VAL DE GRÂCE, PARIS 75005, FRANCE

Received November 13, 2023.